Д.т.н., проф. Е.Г. Жиляков, к.т.н. С.П. Белов, к.т.н. А.А. Черноморец

E.G. Zhilyakov, S.P Belov, A.A.Chernomorets

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

VARIATIONAL METHODS OF SIGNAL SYNTHESIS ON BASIS OF FREQUENCY REPRESENTATION

Рассматриваются вариационные принципы интерполяции и оценивания производных по дискретным отсчетам сигналов, а также проблема синтеза сигналов с минимальным просачиванием энергии за пределы выбранных частотных интервалов.

Keywords: Signal synthesis, variational methods, frequency representation, interpolation, derivatives.

Под синтезом сигналов (функций времени, характеристики которых в закодированном виде содержат сведения, предназначенные для участников информационного обмена) имеются в виду процедуры придания сигналу определенных свойств. Наиболее часто в основе алгоритмов синтеза сигналов используют частотные представления. При этом процедуры синтеза предполагают использование некоторых критериев, характеризующих частотные свойства сигналов, например, аппроксимацию заданных частотных характеристик либо уровень просачивания энергии за пределы частотной области. В качестве иных задач синтеза сигналов можно указать их дифференцирование либо интерполяцию по дискретным значениям.

Здесь в качестве критериев оптимального решения задач синтеза сформулированы некоторые вариационные принципы, использование которых позволяет разработать соответствующие вычислительные методы и алгоритмы.

При разработке методов синтеза сигналов наиболее широко применяются частотные представления вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega / 2\pi\,, \qquad (1)$$

где $f(t)$ – некоторая функция с конечной или неограниченной областью определения $t \in [a,b]$. При рассмотрении вопроса синтеза сигналов под функцией $F(\omega)$достаточно понимать трансформанту Фурье

$$F(\omega) = \int_a^b f(t)\exp(-j\omega t)dt, \qquad (2)$$

в этом случае переменную $\omega = 2\pi v$ называют круговой частотой.

Некоторые задачи синтеза сигналов

Восстановление значений сигналов между отсчётами (интерполяция)

С использованием частотных представлений (целые функции) можно получить интерполирующую функцию вида

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k \sin(\Omega(t-k\Delta))/(t-k\Delta)/\Omega, -\infty \le t \le \infty, \qquad (3)$$

здесь 2Ω – желаемая ширина области определения трансформанты Фурье аппроксимирующей интерполирующей функции, согласованная с шагом (частотой дискретизации) по формуле

$$\Omega = M\pi/\Delta,$$

где согласно условию равенства в узлах интерполяции эмпирическим данным M должно быть целым числом.

Очевидный интерес представляет ответ на вопрос о том, когда аппроксимация вида (3) позволяет точно воспроизвести исходную функциональную зависимость, согласно которой генерируются сигналы - **вариационный принцип минимизации погрешностей**. Ответ на него даёт известная теорема Котельникова (теорема отсчётов), которую можно сформулировать следующим образом.

Если некоторая функция $f(t)$ является непрерывной и представима через трансформанту Фурье с финитной областью определения, т.е. имеет место

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega/2\pi,$$

то при выполнении условия на шаг эквидистантной дискретизации

$$\Omega\Delta \le \pi$$

её значения могут быть точно восстановлены по дискретным отсчётам на основании интерполяционной формулы Котельникова-Шеннона

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \sin(\Omega(t-k\Delta))/(t-k\Delta)/\Omega, -\infty \le t \le \infty. \qquad (4)$$

Вариационный принцип минимизации нормы интерполирующей функции

Функция, определяемая правой частью представления (3), является решением следующей вариационной изопериметрической задачи:

$$\int^{\infty} f_d^2(t)dt = \min,$$

$$f_d(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega/2\pi; \qquad (5)$$

$$f_d(k\Delta) = f_k = f(k\Delta), k = 1,..,N.$$

То есть среди всех интерполирующих функций с финитными областями определения трансформант Фурье представление (3) определяет функцию с минимальной евклидовой нормой, причём имеет место равенство

$$\min \int_{-\infty}^{\infty} f_d^2(t)dt = \sum_{k=1}^{N} f_k^2 = \|\vec{f}\|^2. \qquad (6)$$

Развитие вариационного подхода к интерполяции и оцениванию производных на основе частотных представлений

Проблема оценивания производных имеет самостоятельное значение в связи с различными прикладными задачами. Для повышения устойчивости получаемых оценок предлагается использовать вариационный принцип минимизации их евклидовых норм при выполнении условий интерполяции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}^2(t)dt = \min,$$

$$\hat{u}(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} U(\omega)\exp(j\omega t)d\omega/2\pi; \qquad (7)$$

$$\hat{f}_d(t) = f_1 + \int_0^t \hat{u}(\tau)d\tau \tag{8}$$

$$\hat{f}_d(k\Delta) = f(k\Delta), k = 1,..,N$$

«Крышкой» отмечены аппроксимирующие функции (**$\hat{u}(t)$ - оценка** производной).

Решение вариационной задачи (7), (8) описывается следующими выражениями

$$\hat{u}(\tau) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\beta_i\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}i\right)}{\omega\Delta t/2}\cos\left[\omega\left(\tau - i\Delta t/2\right)\right]d\omega; \tag{9}$$

$$\hat{f}_d(\tau) = f_1 + \frac{\tau}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\beta_i\int_{\Omega_1}^{\Omega_2}\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}i\right)}{\left(\omega\tau/2\right)\left(\omega\Delta t/2\right)}\cos\left[\frac{\omega}{2}(\tau - i\Delta t)\right]d\omega, \tag{10}$$

где

$$A\vec{\beta} = \vec{v} = (v_1,...,v_N)^T, \tag{11}$$

$$v_i = (f_i - f_0), i = 1,...,N.$$

$$A = \{a_{ki}\};$$

$$a_{ik} = \frac{1}{\pi}\int_{\bar{\Omega}_1}^{\bar{\Omega}_2}\frac{\sin\left(\frac{xk}{2}\right)\sin\left(\frac{xi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cos\left[\frac{x}{2}(k-i)\right]dx;$$

$$\overline{\Omega}_r = \Delta\Omega_r, r = 1,2.$$

При выполнении условия

$$\Delta\Omega \geq 2\pi,$$

имеет место

$$\det A > 0,$$

т.е. обратная матрица A^{-1} существует.

Синтез сигналов с минимальной долей энергии за пределами выделенной частотной полосы

Для решения задачи синтеза сигналов с минимальной долей энергии за пределами выделенной частотной полосы предлагается использовать следующий вариационный принцип

$$\| f \|^2 - \int_{\omega\in V_r} | F(\omega)|^2 \, d\omega / 2\pi = \min, \tag{12}$$

где V_r – заданная частотная полоса,

$$V_r = [-v_{r+1}, -v_r) \cup [v_r, v_{r+1}), v_0 = 0.$$

Использование субполосных матриц позволяет преобразовать левую часть выражения (12) к виду

$$\| f \|^2 - \int_{\omega\in V_r} | F(\omega)|^2 \, d\omega / 2\pi$$

$$= \vec{f}'(I - A_r)\vec{f} = \sum_{k=1}^{N} (1-\lambda_{kr})\alpha_{kr}^2,$$

где α_{kr} – коэффициенты разложения искомого сигнала по базису собственных векторов субполосной матрицы

$$\alpha_{kr} = (\vec{q}_{kr}, \vec{f}),$$

так, что представление для оптимального в смысле (12) вектора имеет вид

$$\vec{f}_{opt} = \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_{kr}\vec{q}_{kr}, \tag{13}$$

где количество слагаемых может быть согласовано с допустимой долей просачивания δ_0

$$\delta_{N_1} = \sum_{k=1}^{N_1} (1-\lambda_{kr})\alpha_{kr}^2 / \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_{kr}^2 \leq \delta_0. \tag{14}$$

Коэффициенты суммы в (13) определяются исходя из конкретной задачи передачи сообщений, например, являются отсчётами передаваемого сигнала. Тогда количество слагаемых равно количеству передаваемых параллельно отсчётов.

Уровень просачивания будет определяться близостью к единице значений собственных чисел субполосной матрицы, которые соответствуют используемым в (13) собственным векторам. Используя соотношения

$$J_r = 2[N/2R_r],$$

$$R_r = \pi/(v_{r+1} - v_r),$$

для заданной ширины частотной полосы $v_{r+1}-v_r$ можно подобрать такую длительность передаваемого сигнала, чтобы все собственные числа в (14) были практически равны единице, что позволит полностью исключить просачивание энергии.

Статья поступила 10.12.2009