Математические заметки

Том 87 выпуск 5 май 2010

УДК 517.983

Об одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка

А. В. Глушак

Аннотация. В банаховом пространстве рассматривается задача определения решения и входящего в дифференциальное уравнение дробного порядка слагаемого по начальному и избыточному условиям, содержащим дробные интегралы Римана-Лиувилля. Показано, что разрешимость рассматриваемой задачи зависит от распределения нулей функции Миттаг-Леффлера.

Пусть E - банахово пространство, A - линейный, замкнутый, плотно определенный оператор в E с областью определения $D(A)$ и непустым резольвентным множеством. Рассмотрим задачу определения функции $u(t) \in C^1(0,1], E)$, принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0,1]$ и элемента $p \in E$ из условий

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + t^{k-1} p, \tag{1}$$

$$lim_{t\to 0} I^{1-\alpha} u(t) = u_0, \tag{2}$$

$$lim_{t\to 1} I^\beta u(t) = u_1, \tag{3}$$

где $k > 0$, $I^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - s)^{\beta-1} u(s)\, ds$ - левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\beta \geq 0$ (I^β - единичный оператор при $\beta = 0$), $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, $D^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} u(t)$ - левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением задачи (1) - (3) называется пара $(u(t),p)$, где $u(t) \in D(A)$ непрерывная при $t > 0$ функция такая, что $I^{1-\alpha} u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию, $p \in E$, наконец, $u(t)$ и р удовлетворяют (1) - (3).

Следуя сложившейся терминологии, назовем задачу (1) - (3) обратной задачей в противоположность прямой задаче типа Коши (1), (2) с известным элементом р ∈ E. Рассматриваемую задачу можно интерпретировать как восстановление в уравнении (1) нестационарного слагаемого $t^{k-1} p$ с помощью дополнительного граничного условия (3).

Обзор публикаций по обратным задачам вида (1) - (3) при $\alpha = 1, \beta = 0$ и различных ограничениях на оператор A можно найти в монографии [1], а также в работах [2 - 5].

Что касается обратной задачи (1) - (3), то она рассматривается впервые. В отличие от уже рассмотренных обратных задач, дополнительное условие (3) задается с помощью интеграла

1 Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант Ю 0701-00131.

дробного порядка, который можно интерпретировать как среднее Чезаро по промежутку [0,1]. В дальнейшем будет показано, что с точки зрения разрешимости обратной задачи, задание среднего Чезаро по промежутку [0, 1] лучше чем задание финального значения u(1).

Как следует из результатов работ [6, 7], корректная постановка начальной задачи для уравнения

$$D^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(t), \qquad t > 0 \tag{4}$$

при $\alpha \in (0,1)$ и достаточно гладкой функции $f(t)$ состоит в задании условия (2). В работе [6] приводятся условия на оператор A и функцию $f(t)$, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (4), (2). Эти условия в банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона-Никодима (см. [8, с. 15]), формулируются в терминах оценки нормы производных резольвенты $R(\lambda^{\alpha}) = (\lambda^{\alpha} I - A)^{-1}$ (λ^{α} - главная ветвь степенной функции), которая существует в точке λ^{α} при $Re\,\lambda > \omega$. У помянутые оценки имеют вид

$$\left\| \frac{d^n R(\lambda^{\alpha})}{d\lambda^n} \right\| \leq \frac{M\Gamma(n+\alpha)}{(Re\lambda-\omega)^{n+\alpha}}, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

и являются необходимым и достаточным условием равномерной корректности задачи (4), (2). Отметим, что другой подход к получению условий равномерной корректности, использующий метод регуляризации контурного интеграла, приводится в [9].

В дальнейшем нам понадобятся следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Оператор A таков, что задача (4), (2) равномерно корректна.

УСЛОВИЕ 2. Выполнено одно из следующих требований:

(i) $f(t) \in C((0, \infty), E)$ абсолютно интегрируема в нуле и принимает значения в $D(A)$, $Af(t) \in C((0, \infty), E)$ и также абсолютно интегрируема в нуле;

(ii) $D^{\alpha} f(t) \in C((0, \infty), E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.

В частности, если выполнено условие 2 и оператор A ограничен, то условие 1 также выполнено и решение задачи (4), (2) имеет вид (см. [7])

$$u(t) = t^{\alpha-1} E\alpha,\alpha\, (t^{\alpha} A)\, u_o + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E\alpha,\alpha\, ((t - s)^{\alpha} A)\, f(s)\, ds, \; u_o \in E, \tag{6}$$

где $E\alpha,\mu(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j+\mu)}$ - функция Миттаг-Леффлера.

В случае неограниченного оператора A, удовлетворяющего условию 1, решение задачи (4), (2) при $f(t) \equiv 0$ имеет вид (см. [6])

$$u(t) \equiv T\alpha(t)u_o = \frac{1}{2\pi i} D^{1-\alpha}\; uo\; d,\backslash, \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{\lambda t} R(\lambda^{\alpha})u_o\, d\lambda, \quad u_o \in D(A), \quad \sigma > max(0, \omega), \tag{7}$$

а в общем случае (см. [7])

$$u(t) = Ta\,(t)u_o + \int_0^t T\alpha(t - s) f(s)\, ds,$$

при этом функция f(t) должна удовлетворять условию 2.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A - линейный ограниченный оператор в E, u_o, $u_1 \in E$. Для того чтобы задача (1) - (3) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие*

$$E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z) \neq 0, \qquad z \in \sigma(A). \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (1), (2) в силу (6) сводится к задаче нахождения функции u(t) и элемента $p \in E$ таких, что справедливо соотношение

$$u(t) = t^{\alpha-1} E\alpha,\alpha\ (t^{\alpha} A)u_o + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E\alpha,\alpha\ ((t - s)^{\alpha} A)\ s^{k-1}\, p\, ds. \qquad (9)$$

Из равенства (9) и граничного условия (3) для нахождения неизвестного элемента p получаем уравнение

$$lim_{t\to 1} I^{\beta} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E\alpha,\alpha\ ((t - s)^{\alpha} A)\ s^{k-1}\, p\, ds = u_l - lim_{t\to 1} I^{\beta}\ (t^{a-1} E\alpha,\alpha\ (t^{\alpha} A)u_o)$$

или, учитывая полугрупповое свойство операции дробного интегрирования и вычисляя дробные интегралы, в операторном виде

$$B_o\, p = q_o, \qquad (10)$$

где

$$B_o p = lim_{t\to 1} I^{k+\beta}\ (t^{a-1} E\alpha,\alpha\ (t^{\alpha} A)p) = E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(A)p, \quad q_o = \frac{1}{\Gamma(k)}(u_l - E_{\alpha,\alpha+\beta}(A)u_o). \qquad (11)$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1) - (3) с ограниченным оператором A и произвольными u_o, $u_l \in E$ является разрешимость при любом $q \in E$ уравнения (10), Т.е. отсутствие в спектре $\sigma(B_o)$ оператора B_o точки $\lambda = 0$.

В силу (11) оператор B_o является аналитической функцией оператора A. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(B_o) = \sigma(E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(A)) = E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\sigma(A))$. Следовательно, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора B_o только тогда, когда на спектре оператора A не обращается в нуль функция $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий теоремы 1 решение $(u(t),p)$ линейно, а, следовательно, и непрерывно зависит от данных u_o, $u_l \in E$.

Из доказанной теоремы 1 следует, что расположение нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ определяет однозначную разрешимость задачи (1) - (3) с ограниченным оператором A. Как указано в [2], для неограниченного оператора A условие (8) при $\alpha = k = 1, \beta= 0$ и даже при $\alpha = 1, k + \beta= 1$

(в этих случаях нули функции Миттаг-Леффлера $E_{1,2}(z)$ выписываются явно) уже не будет достаточным условием однозначной разрешимости, хотя расположение нулей также играет важную роль. Поэтому мы приведем нужные нам результаты работы [10] об их расположении. В теореме 1 [10] установлено, что при $\alpha \in (0,1)$, $k+\alpha+\beta> 0$ и подходящей нумерации, все достаточно большие по модулю нули μ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ просты и при $n \to \pm\infty$ справедлива асимптотика

$$\mu_n^{1/\alpha} = 2\pi ni + (k + \beta- 1)\ (ln\ 2\pi|n| + \frac{\pi i}{2} sign\ n) + ln \frac{\alpha}{\Gamma(k+\beta)} + 0(1), \qquad n \to \pm\infty. \qquad (12)$$

Установим далее необходимое условие единственности решения обратной задачи (1) - (3) с неограниченным оператором A.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A - линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача (1) - (3) имеет решение (u(t),p). Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо, чтобы ни один нулъ* μ_n *целой функции* $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ *не являлся собственным значением оператора A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, пусть некоторый нуль μ_n из счетного множества нулей функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $h_n \neq 0$.

Введем в рассмотрение функцию $\omega(t) = \psi(t)h_n$ и подберем скалярную функцию $\psi(t)$так, чтобы функция $\omega(t)$ удовлетворяла уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевому начальному условию (2). Легко проверить, что функция $\psi(t)$ должна быть решением следующей задачи Коши

$$D^{\alpha}\,\psi(t) = \mu_n\,\psi(t) + t^{k-1}, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to 0} I^{1-\alpha}\,\psi(t) = 0. \tag{14}$$

Задача (13), (14) имеет единственное решение (см. [11, с. 602], которое представимо в виде

$$\psi(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,E\alpha,\alpha\,(\lambda(t-s)^{\alpha})\,s^{k-1}\,ds.$$

Поскольку μ_n - нуль функции $E1,k+\alpha+\beta(z)$, то аналогично (10), (11) получаем

$$\lim_{t\to 1} I^{\beta}\,\psi(t) = \Gamma(k)E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = 0.$$

Таким образом, функция $\omega(t) = \psi(t)\,h_n$ удовлетворяет уравнению (1) при $p = h_n$ и нулевым условиям (2) и (3), что противоречит предположению единственности решения, поскольку пара $(u(t) + \omega(t), p + h_n)$ также является решением задачи (1) - (3). Теорема доказана.

Для установления однозначной разрешимости задачи (1) - (3) с неограниченным оператором A, удовлетворяющим условию 1, сведем эту задачу, учитывая (7), к операторному уравнению

$$Bp = q, \tag{15}$$

где

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k)} \lim_{t\to 1} I^{\beta} \int_0^t s^{k-1}\,T_{\alpha}(t-s)p\,ds = \lim_{t\to 1} I^{k+\beta}\,T\alpha(t)p, \quad B\colon E \to E, \tag{16}$$

$$q = \frac{1}{\Gamma(k)}(\mu_1 - \lim_{t\to 1} I^{\beta}\,T_{\alpha}(t)u_0), \quad q \in D(A), \tag{17}$$

при этом функция $f(t) = t^{k-1}\,p$ должна удовлетворять условию 2.

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1) - (3) сводится к задаче о существовании у ограниченного оператора B, заданного соотношением (16), обратного оператора, определенного на некотором подмножестве банахова пространства E. Для выяснения последнего факта мы получим более удобное для исследований представление оператора с помощью резольвенты $R(\lambda^{\alpha}) = (\lambda^{\alpha} I - A)^{-1}$, сузив при этом область определения оператора B до плотного в E множества $D(A)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть оператор A удовлетворяет условию 1 и $k > \alpha$. Тогда для любого $p \in D(A)$ справедливо представление*

$$Bp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1}\,E_{1,k+\alpha+\beta}(z)R(z^{\alpha})\,p\,dz, \tag{18}$$

где $\lambda \in \rho(A)$, $\rho(A)$ - резольвентное множество оператора A, $Re\,\lambda > \sigma > \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $p \in D(A^2)$ и, стало быть, $p = R^2(\lambda)p_0$, $p_0 \in E$. Тогда из (16), (7), используя полугрупповое свойство дробного интегрирования и тождество Гильберта, после интегрирования по частям получим

$$Bp = \frac{1}{\Gamma(k+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{k+\beta-1}\, ds \frac{1}{2\pi i} D^{1-\alpha} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{exp(zs)}{z^{\alpha-1}} R(z^\alpha)\, R^2(\lambda)p_0\, dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)}\ lim_{t\to 1} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{k+\alpha+\beta-1} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{\alpha-1} exp(zs)\, \left(\frac{R(z^\alpha)p_0}{(\lambda-z^\alpha)^2} - \frac{R^2(\lambda)p_0}{\lambda-z^\alpha} - \frac{R(\lambda)p_0}{(\lambda-z^\alpha)^2}\right) d_z d_s =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha+\beta)}\ lim_{t\to 1} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{k+\alpha+\beta-1}\, ds \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{exp(zs) R(z^\alpha) p_0}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)^2}\, dz, \qquad (19)$$

при этом интегралы по прямой $Re\ z = \sigma$ от функции вида $\frac{z^{\alpha-1} exp(zs) R^j(\lambda) p_0}{(\lambda-z^\alpha)^{3-j}}$, j = 1,2

обратились в нуль в силу леммы Жордана.

Последний интеграл абсолютно сходится, поэтому, изменив порядок интегрирования и воспользовавшись равенством 1.17 [12]

$$z^\mu E_{1,\mu+1}(\lambda z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^z e^{\lambda s}\ (z-s)^{\mu-1} ds, \qquad \mu > O, \qquad (20)$$

из (19) выводим представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R(z^\alpha) p_0}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)^2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R(z^\alpha)\big((\lambda-z^\alpha)I + (z^\alpha I - A)\big)(\lambda I - A)p}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)^2}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)} R(z^\alpha)(\lambda I - A)p\, dz, \qquad p \in D(A^2) \qquad (21)$$

Если обозначить $p_1 = (\lambda I - A)p$, то $p_1 \in D(A)$ и $p = R(\lambda)p_1$. Поэтому равенство (20) примет вид

$$BR(\lambda)p_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)} R(z^\alpha) p_1\, dz, \qquad p_1 \in D(A) \qquad (22)$$

Левая и правая части равенства (22) представляют собою ограниченные операторы, которые совпадают на $D(A)$. В силу плотности $D(A)$ в E, равенство (21) справедливо при всех $p_1 \in E$. Но тогда $p = R(\lambda)p_1 \in D(A)$ и для таких p справедливо представление

$$Bp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{E_{1,k+\alpha+\beta}(z)}{z^{1-\alpha}(\lambda-z^\alpha)} R(z^\alpha)\big((\lambda - z^\alpha)I + (z^\alpha I - A)\big)p\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} dz. \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} z^{1-\alpha}\ E_{1,k+\alpha+\beta}(z) R(z^\alpha) p\, dz.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 3 ограничение $k > \alpha$ наложено для того, чтобы функция $f(t) = t^{k-1} p$ удовлетворяла условию 2(ii). Можно заменить это ограничение требованием гладкости элемента p, а именно: $p \in D(A)$. Тогда функция $f(t) = t^{k-1} p$ будет удовлетворять условию 2(i).

Переходим теперь к установлению достаточных условий однозначной разрешимости задачи (1) - (3). Как следует из теоремы 2, нам придется потребовать, чтобы ни один нуль μ_n функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ не являлся собственным значением оператора A.

Более того, для установления разрешимости потребуем, чтобы все нули принадлежали резольвентному множеству $\rho(A)$. Учитывая их асимптотику (12), отметим, что при $k + \beta > 1$ условие будет налагаться лишь на конечное число нулей μ_n, $n= 1,2, \ldots,n_0$ с $Re\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ поскольку остальные автоматически принадлежат $\rho(A)$. В случае $k + \beta \leq 1$ нулей с $Re\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть оператор A удовлетворяет условию 1,* $k > \alpha$, $k + \beta > 1$, $\sigma > \omega$ *и* $u_o, u_1 \in D(A^3)$. *Если каждый нуль* μ_n, $n= 1,2, \ldots,n_0$ *функции* $E_{\alpha,k+o+\beta}(z)$ *с* $Re\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ *принадлежит* $\rho(A)$. *то задача (1) - (3) имеет единственное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже отмечали, что существование единственного решения задачи (1) - (3) (или операторного уравнения (15) сводится к доказательству существования обратного у ограниченного оператора B, определяемого равенством (16) (или (18)). При $u_1 \in D(A^3)$ в силу инвариантности $D(A)$ относительно $T_\alpha(t)$, правая часть уравнения (15) q принадлежит $D(A^3)$. Покажем, что оператор B имеет обратный оператор $B^{-1} : D(A^3) \rightarrow E$.

Поскольку каждый нуль $\mu_n^{1/\alpha}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)$ с $Re\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$ то он принадлежит $p(A)$ вместе с некоторой круговой окрестностью Ω_n . Пусть Г - контур на комплексной плоскости, состоящий из прямой $R_e\, z = \sigma > \omega$ и границ γ_n круговых окрестностей Ω_n т.е.

$$\Gamma = \{R_e\, z = \sigma\} \bigcup_{Re\, \mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \gamma_n$$

Возьмем $\lambda \in \rho(A)$, $Re\, \lambda > \sigma > \Omega$ и рассмотрим ограниченный оператор

$$\Upsilon = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q\, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3}, \qquad \Upsilon,\ E \rightarrow E \tag{23}$$

Отметим, что интеграл в (23) абсолютно сходится в силу выбора контура Γ, оценки (5), асимптотики (12) и известного (см. [12, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера при $0 < a < 2$ и $|z| \rightarrow \infty$

$$E_{\alpha\mu}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\mu)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha j)\, z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \quad |arg\, z| \leq \nu\pi,\ \nu \in \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right), \tag{24}$$

$$E_{\alpha\mu}(z) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha j)\, z^j} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right), \qquad \nu\pi \leq |arg\, z| \leq \pi \tag{25}$$

Пусть $q \in D(A)$, $\sigma < \sigma_1 < Re\, \lambda$. Тогда, подставляя (18) в (23) и применяя тождество Гильберта, получим

$$\Upsilon Bq = \frac{\alpha}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1} R(z^\alpha) q\, dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \xi^{\alpha-1} E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi) R(\xi^\alpha) q\, d\xi =$$

$$= \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_{\sigma_1 - \infty}^{\sigma_1 + \infty} \frac{z^{\alpha-1}\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \frac{R(z^\alpha)q - R(\xi^\alpha)q}{\xi^\alpha - z^\alpha} d\xi dz. \qquad (26)$$

Интеграл в (26) абсолютно сходится, поэтому меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\Upsilon Bq = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} \int_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)\,d\xi}{\xi^\alpha - z^\alpha} -$$

$$- \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma_1-\infty}^{\sigma_1+\infty} \xi^{\alpha-1}E_{1,k+\alpha+\beta}(\xi)R(\xi^\alpha)q\,d\xi \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3(\xi^\alpha-z^\alpha)}. \qquad (27)$$

Внутренний интеграл (после замены $\mu = z^\alpha$) во втором слагаемом (27) равен нулю в силу выбора контура Γ и леммы Жордана. А для вычисления интегралов в первом слагаемом, используем равенство (20), формулу (см. [11, с. 33])

$$\int_0^{+\infty} exp(-t\xi)\, E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha)dt = \frac{\xi^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - z^\alpha}, \quad \left|\frac{z^\alpha}{\xi^\alpha}\right| < 1,$$

равенство $I^\nu E_{\alpha,l}(t^\alpha z^\alpha) = t^\nu E_{\alpha,\nu+1}(t^\alpha z^\alpha)$ $(\nu > 0)$ и лемму Жордана. Таким образом, для $q \in D(A)$, справедливо равенство

$$\Upsilon Bq = \frac{\alpha}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} lim_{t\to1} I^{k+\alpha+\beta-1} \int_{\sigma_2-\infty}^{\sigma_2+\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}exp(\xi t)d\xi}{\xi^\alpha - z^\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^3} lim_{t\to1} I^{k+\alpha+\beta-1} E_{\alpha,1}(t^\alpha z^\alpha) =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q\,dz}{(z^\alpha-\lambda)^3} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)_\alpha} \frac{R(\mu)q\,d\mu}{(\mu-\lambda)^3} = R^3(\lambda)q,$$

где $(\Gamma)_\alpha$ - контур, полученный из контура Γ после замены $\mu = z^\alpha$: $z \in \Gamma$, $\mu \in (\Gamma)_\alpha$.
Коммутирующие операторы Υ, B, $R(\lambda)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E, поэтому равенство $\Upsilon Bq = R^3(\lambda)q$ справедливо и для $q \in E$, $\Upsilon B : E \to D(A^3)$. Отсюда следует, что оператор $B^{-1}q = (\lambda I - A)^3\Upsilon q$ при $q \in D(A^3)$ является обратным по отношению к B. Действительно,

$$BB^{-1}q = B(\lambda I - A)^3\Upsilon q = R^3(\lambda)(\lambda I - A)^3 q = q, \quad q \in D(A^3),$$

$$B^{-1}Bq = (\lambda I - A)^3\Upsilon Bq = q, \qquad q \in E.$$

Что касается решения задачи (1) - (3), то принадлежащий E элемент p имеет вид $p = (\lambda I - A)^3\Upsilon q$, где элемент $q \in D(A^3)$ определяется равенством (17), оператор Υ равенством (23), $\lambda \in \rho(A)$, $Re\,\lambda > \sigma > \omega$, а для функции $u(t)$ справедливо представление

$$u(t) = T\alpha(t)u_o + \int_0^t T\alpha(t - s)p\,ds.$$

Теорема доказана.

В случае $k+\beta \le 1$, как уже отмечалось, у функции $E\alpha,k+\alpha+\beta(z)$ нулей μ_n с $Re\,\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ будет счетное множество, поэтому мы потребуем выполнения следующего условия.

УСЛОВИЕ 3. Каждый нуль μ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ функции $E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z)$ с $Re\,\mu_n^{1/\alpha} < \sigma$ принадлежит $\rho(A)$ и существует $d > 0$ такое, что

$$sup_{Re\,\mu_n^{1/\alpha} < \sigma} \left\| \frac{R(\mu_n)}{\mu_n^k} \right\| \le d.$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть выполнены условия 1 и 3,* $k > \alpha$, $k + \beta < 1$ *и* $u_0, u_1 \in D(A^3)$. *Тогда задача (1) - (3) имеет единственное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Также как и в теореме 4 введем в рассмотрение оператор Υ, определяемый равенством (23). В рассматриваемом случае контур Γ содержит уже счетное множество окружностей γ_n и для доказательства абсолютной сходимости интеграла в равенстве (23) рассмотрим интеграл по окружностям γ_n. Пусть $(\gamma_n)_\alpha$ -контур, получаемый из γ_n после замены $\xi = z_\alpha$: $z \in \gamma_n$, $\xi \in (\gamma_n)_\alpha$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2\pi i}\int_{\bigcup \gamma n} \frac{z^{\alpha-1}R(z^\alpha)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(z^\alpha)(z^\alpha-\lambda)^s} = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_{\bigcup (\gamma n)_\alpha} \frac{R(\xi)q\,dz}{E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\xi)(\xi-\lambda)^s} = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{R(\mu_n)q}{E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)(\lambda-\mu_n)^s}, \tag{28}$$

при этом, поскольку (см. [12, формула (1.5) на с. 118])

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n}\left(E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) - (k+\alpha+\beta-1)\,E_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)\right),$$

то, учитывая асимптотику (24) функции Миттаг-Леффлера и асимптотику (12), получим

$$E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n) = \frac{1}{\alpha\mu_n}\Bigg(\frac{\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha-1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}\exp(iIm\,\mu_n)}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{1}{\Gamma(k+\beta-1)\,\mu_n} -$$

$$-\frac{(k+\alpha+\beta-1)\mu_n^{(2-k-\beta)/\alpha-1}(2\pi|n|)^{k+\beta-1}\exp(iIm\,\mu_n)}{\Gamma(k+\beta)} - \frac{k+\alpha+\beta-1}{\Gamma(k+\beta)\,\mu_n} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|^2}\right)\Bigg).$$

Таким образом,

$$\left|E'_{\alpha,k+\alpha+\beta}(\mu_n)\right| = \frac{1}{|\mu_n|^{2-1/\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha\Gamma(k+\beta)} + O\left(\frac{1}{|\mu_n|}\right)\right). \tag{29}$$

В силу равенства (29), условия 3 и асимптотики (12) ряд (28), а, следовательно и интеграл по $\bigcup \gamma n$, абсолютно сходятся.

Сходимость же в равенстве (23) интеграла по прямой $Re z = \sigma$, очевидно, следует из условия 3 и асимптотики (25).

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 4, мы его опускаем и доказательство теоремы 5 тем самым завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Учитывая замечание 1, в теоремах 4 и 5 можно заменить ограничение $k > \alpha$ требованием дополнительной гладкости данных задачи (1) - (3), а именно: при $0 < k \leq \alpha$ элементы u_0 и u_1 должны принадлежать $D(A^4)$. При этом $p \in D(A)$, а решение $(u(t),p)$ задачи (1) - (3) определяется теми же формулами, что и в теоремах 4 и 5.

Таким образом, из теорем 4 и 5 следует, что при $k + \beta > 1$ рассматриваемая обратная задача (1) - (3) разрешима при меньших ограничениях на оператор A.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York. Basel: Marcel Dekker, 2000.

[2] Эйдельман Ю.С. Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром / / Докл. АН УССР. Сер А. 1983. X~ 4. С. 15 - 18.

[3] Эйдельман Ю.С. Одна обратная задача для эволюционного уравнения / / Математ. заметки. 1991. Т. 99. X~ 5. С. 135 - 141.

[4] Тихонов И.В, Эйдельман Ю.С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции МиттагЛеффлера / / Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. X~ 5. С. 637 - 644.

[5] Тихонов И.В, Эйдельман Ю.С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения снестационарным неоднородным слагаемым / / Математ. заметки. 2005. Т. 77. X~ 2. С. 273 - 290.

[6] Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной / / Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001. X~ 2. С. 74 - 77.

[7] Глушак А.В. О задаче типа Коши для неоднородного абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной / / Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2002. X~ 1. С. 121 - 123.

[8] Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel. Boston. Berlin: Birkhauser Verlag, 2001.

[9] Костин В.А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными / / ДАН СССР. 1992. Т. 326. X~ 4. С. 597 - 600.

[10] Седлецкий А.М. О нулях функции типа Миттаг-Леффлера / / Математ. заметки. 2000. т. 68. X~ 5. С. 710 - 724.

[11] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника, 1987.

[12] Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука. 1966.

Белгородский государственный университет

E-mail: aleglu@mail.ru