Современная математика. Фундаментальные направления. Том 35 (2010). С. 5–21

УДК 517.983

О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, НЕЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2010 г. **Х. К. АВАД, А. В. ГЛУШАК**

Аннотация. Доказывается однозначная разрешимость задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные, при возмущении уравнения нелинейным слагаемым. В качестве приложения устанавливается разрешимость обратной коэффициентной задачи для уравнения дробного порядка.

1. Введение. Постановка задачи

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши:

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t) + F(t, B(t)u(t)), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{1.2}$$

где $0 < \alpha < 1$, $D^{\alpha-1}u(t) = I^{1-\alpha}u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}u(s)\,ds$ — левосторонний дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $1-\alpha$ ($I^{1-\alpha}$ — тождественный оператор при $\alpha = 1$), $D^{\alpha}u(t) = \dfrac{d}{dt}I^{1-\alpha}u(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля порядка α, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, $B(t)$ — также линейный, замкнутый, плотно определенный, но уже переменный и, вообще говоря, неограниченный оператор, наконец, $F(t,w)$ — при каждом $t \geqslant 0$ нелинейный оператор, действующий в E и рассматриваемый как возмущение оператора A.

Излагаемые в дальнейшем результаты примыкают к теории возмущений генераторов полугрупп (см. [6, гл. 9]). Рассматривается вопрос о том, как отражается на разрешимости задачи (1.1)-(1.2) добавление слагаемого, содержащего нелинейный оператор, который в некотором смысле подчинен оператору A. Будут указаны достаточные условия, при выполнении которых корректность задачи сохранится и после возмущения оператора A.

Для абстрактных дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные Римана—Лиувилля, результаты о разрешимости возмущенных уравнений линейным замкнутым оператором $B(t)$ получены в [2]. Такого вида задачи являются актуальными в связи с многочисленными приложениями теории дифференциальных уравнений дробного порядка в физике и математическом моделировании. Некоторые такие приложения могут быть найдены в [14, гл. 8], [10, гл. 5], [17, гл. 8].

Наряду с задачей (1.1)-(1.2) для $\beta \geqslant \alpha$ рассмотрим невозмущенную задачу

$$D^{\beta}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0. \tag{1.4}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 07-01-00131.

Определение 1.1. *Решением задачи* (1.3)-(1.4) *называется непрерывная при $t > 0$ функция $u(t)$ такая, что $I^{1-\beta}u(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию, функция $u(t)$ принимает значения в $D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора A) и удовлетворяет* (1.3)-(1.4).

Определение 1.2. *Задача* (1.3)-(1.4) *называется равномерно корректной, если существует заданная на E коммутирующая с A операторная функция $T_\beta(t)$ и числа $M_1 > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, такие, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $T_\beta(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом*

$$\|T_\beta(t)\| \leqslant M_1 t^{\beta-1} e^{\omega t}. \tag{1.5}$$

Согласно определению 1.2 задача (1.3)-(1.4) равномерно корректна, если решение этой задачи существует, единственно и, как следует из (1.5), непрерывно зависит от начальных данных равномерно по t из любого компакта в $(0,\infty)$. Помимо этих обычных требований определение 1.2 содержит дополнительную информацию о поведении решения при $t \to 0$ и $t \to \infty$ (неравенство (1.5)).

Условие 1.1. *Оператор A таков, что при некотором β, удовлетворяющем неравенству $\alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, равномерно корректна задача* (1.3)-(1.4) *и $u_0 \in D(A)$.*

Укажем, что при $0 < \beta < 1$ равномерная корректность задачи (1.3)-(1.4) исследовалась в [1, 3, 7], а при $\beta = 1$ для равномерной корректности задачи Коши требуется, чтобы оператор A был генератором C_0-полугруппы.

Условие 1.2. (i) *Оператор $B(t)$ имеет не зависящую от t область определения D и при этом $D(A) \subset D$.*

(ii) *Для любого $x \in D$ либо функция $w(t) = B(t)x$ принадлежит $C((0,\infty),E)$, абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в $D(A)$, $Aw(t) \in C((0,\infty),E)$ и также абсолютно интегрируема в нуле, либо функция $I^{1-\alpha}w(t) = I^{1-\alpha}B(t)x$ является непрерывной при $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемой при $t > 0$ функцией и такой, что $D^\alpha w(t)$ абсолютно интегрируема в нуле.*

(iii) *Для любого $x \in E$ существуют постоянные $M_2 > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $\omega \in \mathbb{R}$ такие, что $T_\beta(\tau)x \in D$ (эффект сглаживания) и*

$$\|B(t)T_\beta(\tau)x\| \leqslant M_2 \tau^{-\gamma} e^{\omega\tau}\|x\|, \quad t,\tau \in (0,\infty). \tag{1.6}$$

Отметим, что если оператор $-A$ является сильно позитивным (терминология заимствована из [8]), т.е., если

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M_3}{1+|\lambda|}, \quad \mathrm{Re}\ \lambda \geqslant 0,\ M_3 > 0,$$

то в условии 1.1 можно взять $\beta = 1$, при этом $\omega = 0$, а неравенство (1.6) означает, что оператор $B(t)$ подчинен дробной степени $(-A)^\gamma$ (см. [8, с. 298]).

Если оператор $B(t)$ ограничен, а оператор A удовлетворяет условию 1.1, то неравенство (1.6) справедливо при $\gamma = 1-\beta$.

Перестановочность операторов A и $B(t)$ не предполагается.

Условие 1.3. (i) *$F : (0,\infty) \times E \longrightarrow E$ и для любой функции $w(t) = B(t)x$, $x \in D$ удовлетворяющей условию* 1.2 (ii), *функция $w_1(t) = F(t,w(t))$ также удовлетворяет условию* 1.2 (ii).

(ii) *Для $w = 0$ справедливо неравенство $\|F(t,0)\| \leqslant C_0\left(1+t^{\mu-1}\right)$, $\mu > 0$, $C_0 > 0$.*

(iii) *Оператор $F(t,w)$ удовлетворяет равномерному по $t > 0$ условию Липшица*

$$\|F(t,w_2) - F(t,w_1)\| \leqslant L\|w_2 - w_1\|, \quad \forall\ w_1, w_2 \in E.$$

Условие 1.4. *Банахово пространство E обладает свойством Радона—Никодима* (*см.* [15, с. 15]), *т.е. каждая абсолютно непрерывная функция $F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ почти везде дифференцируема.*

Например, рефлексивные банаховы пространства обладают этим свойством (см. [15], следствие 1.2.7), а пространства $L_1(a,b)$, $C[a,b]$, c_0 (пространство последовательностей, сходящихся к нулю) не обладают (см. [15, пример 1.2.8, предложения 1.2.9, 1.2.10]).

Как будет доказано в дальнейшем, условия 1.1–1.4 обеспечат однозначную разрешимость задачи (1.1)-(1.2).

При доказательстве нами будет использована функция (см. [5, с. 357])

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp\left(tz - \tau z^{\nu}\right)\, dz, \quad t \geqslant 0, \\ 0, \quad t < 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\sigma > 0,\ \tau > 0,\ 0 < \nu < 1$ и ветвь функции z^{ν} выбрана так, что $\mathrm{Re}\ z^{\nu} > 0$ при $\mathrm{Re}\ z > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (1.7) обеспечивается множителем $\exp\left(-\tau z^{\nu}\right)$.

Отметим некоторые свойства функции $f_{\tau,\nu}(t)$, которые также установлены в [5, предложения 1–3 на с. 358–361].

Если в интеграле, определяющем функцию $f_{\tau,\nu}(t)$, перейти от интегрирования по прямой $\mathrm{Re}\ z = \sigma > 0$ к контуру, состоящему из лучей $z = r\exp\left(-i\theta\right)$ и $z = r\exp\left(i\theta\right)$, где $0 < r < \infty$, $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$, то при $t > 0$ для функции $f_{\tau,\nu}(t)$ получится представление

$$f_{\tau,\nu}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(tr\cos\theta - \tau r^{\nu}\cos\nu\theta\right)\, \sin\left(tr\sin\theta - \tau r^{\nu}\sin\nu\theta + \theta\right)\, dr. \tag{1.8}$$

Функция $f_{\tau,\nu}(t)$ неотрицательна и справедливы равенства

$$\int\limits_{0}^{\infty} f_{\tau,\nu}(t)\, dt \equiv 1, \tag{1.9}$$

$$\exp\left(-\tau\lambda^{\nu}\right) = \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\lambda t\right) f_{\tau,\nu}(t)\, dt, \quad \tau > 0,\ \lambda > 0,\ 0 < \nu < 1. \tag{1.10}$$

Заметим также, что функция $f_{\tau,\nu}(t)$ при $t > 0$ может быть выражена через функцию Райта (см. [17, с. 54])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1}\phi\left(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}\right), \qquad \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\ \Gamma(ak+b)},$$

или через более общую функцию типа Райта (см. [12, гл. 1])

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1} e^{1,0}_{1,\nu}\left(-\tau t^{-\nu}\right), \qquad e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)\ \Gamma(\delta - \beta k)}, \tag{1.11}$$

где $\beta < 1,\ \delta + \beta > 0,\ \max\{0;\beta\} < \alpha < 2,\ \alpha + \beta < 2,\ \mu, z \in C$.

2. Задача типа Коши для уравнения дробного порядка. Неоднородное уравнение

В следующей теореме мы установим, когда из равномерной корректности задачи (1.3)-(1.4) будет следовать равномерная корректность соответствующей задачи типа Коши для уравнения порядка α, где $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\alpha < \beta \leqslant 1$, *выполнены условия* 1.1, 1.4 *и при этом в неравенстве* (1.5) *постоянная* $\omega = 0$. *Тогда задача*

$$D^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u(t) = u_0, \tag{2.2}$$

равномерно корректна, и ее разрешающий оператор имеет вид

$$T_{\alpha}(t)u_0 = \int\limits_{0}^{\infty} f_{\tau,\nu}(t) T_{\beta}(\tau)u_0\, d\tau, \tag{2.3}$$

где $\nu = \alpha/\beta$, а функция $f_{\tau,\nu}(t)$ определяется равенством (1.7).

Доказательство. Если задача типа Коши (1.3)-(1.4) равномерно корректна и в неравенстве (1.5) постоянная ω равна 0, то, как доказано в [1], λ^β при $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для любого $x \in E$ резольвента $R\left(\lambda^\beta\right) = \left(\lambda^\beta I - A\right)^{-1}$ представима в виде

$$R\left(\lambda^\beta\right)x = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) T_\beta(t) x\ dt \tag{2.4}$$

и при этом для всех целых $n \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$\left\| \frac{d^n R\left(\lambda^\beta\right)}{d\lambda^n} \right\| \leqslant \frac{M\Gamma\left(n+\beta\right)}{\left(\mathrm{Re}\ \lambda\right)^{n+\beta}}, \quad \mathrm{Re}\ \lambda > 0. \tag{2.5}$$

В банаховом пространстве E, обладающем свойством Радона—Никодима, выполнение неравенств (2.5) (даже для действительных $\lambda > 0$) является также и достаточным условием равномерной корректности задачи (1.3)-(1.4). При этом разрешающий оператор этой задачи имеет вид (см. [1, формула (13)])

$$T_\beta(t)u_0 = D^{1-\beta} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} \lambda^{\beta-1} \exp(\lambda t) R\left(\lambda^\beta\right) u_0\ d\lambda, \quad \omega_0 > 0. \tag{2.6}$$

Учитывая представления (2.4), (1.10) и оценку (1.5), при $\nu = \alpha/\beta$ будем иметь

$$R\left(\mu^\alpha\right)x = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\mu^\nu t\right) T_\beta(t) x\ dt = \int\limits_0^\infty T_\beta(t) x\ dt \int\limits_0^\infty \exp\left(-\tau\mu\right) f_{t,\nu}\left(\tau\right)\ d\tau.$$

Выберем в (1.8) параметр $\theta \in [\pi/2, \pi]$ так, чтобы $\cos\theta < 0,\ \cos\nu\theta > 0$. Для этого его следует взять из интервала $\pi/2 < \theta < \min\{\pi/(2\nu); \pi\}$.

Следовательно, в силу (1.8), (1.9) и теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла справедливы неравенства

$$\left\| \frac{d^n R\left(\mu^\alpha\right)x}{d\mu^n} \right\| \leqslant M_1 \left\|x\right\| \int\limits_0^\infty t^{\beta-1}\ dt \int\limits_0^\infty \tau^n \exp\left(-\tau \mathrm{Re}\ \mu\right)\ d\tau \int\limits_0^\infty \exp\left(\tau s\cos\theta - ts^\nu \cos\nu\theta\right)\ ds =$$

$$= M_4 \left\|x\right\| \int\limits_0^\infty \tau^n \exp\left(-\tau \mathrm{Re}\ \mu\right)\ d\tau \int\limits_0^\infty s^{-\alpha} \exp\left(\tau s\cos\theta\right)\ ds =$$

$$= M_5 \left\|x\right\| \int\limits_0^\infty \tau^{n-1+\alpha} \exp\left(-\tau \mathrm{Re}\ \mu\right)\ d\tau = \frac{M_6 \Gamma\left(n+\alpha\right)\left\|x\right\|}{\left(\mathrm{Re}\ \mu\right)^{n+\alpha}},$$

что и доказывает равномерную корректность задачи (2.1)-(2.2).

Разрешающий оператор этой задачи, в силу представлений (2.6), (2.4), (1.7) и (1.11) имеет вид

$$T_\alpha(t)\,u_0 = D^{1-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t)\,R(\lambda^\alpha)\,u_0\,d\lambda =$$

$$= D^{1-\alpha}\int\limits_0^\infty T_\beta(\tau)\,u_0\,d\tau\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t-\lambda^\nu\tau)\,d\lambda =$$

$$= D^{1-\alpha}\int\limits_0^\infty t^{-\alpha}e_{1,\nu}^{1,1-\alpha}\left(-\tau t^{-\nu}\right)T_\beta(\tau)u_0\,d\tau. \quad (2.7)$$

При этом мы воспользовались формулой для преобразования Лапласа

$$L\left[t^{-\alpha}e_{1,\nu}^{1,1-\alpha}\left(-\tau t^{-\nu}\right);\lambda\right] = \lambda^{\alpha-1}\exp(-\tau\lambda^\nu),$$

вытекающей из [12, равенство (1.1.13)].

Учитывая формулу для дробной производной функции типа Райта (см. [12, формула (1.2.12)])

$$D^{1-\alpha}\left(t^{-\alpha}e_{1,\nu}^{1,1-\alpha}\left(-\tau t^{-\nu}\right)\right) = t^{-1}e_{1,\nu}^{1,0}\left(-\tau t^{-\nu}\right) = f_{\tau,\nu}(t),$$

а также предельное соотношение (см. [12, формулы (1.2.3), (1.2.6)])

$$\lim_{x\to+\infty} xe_{1,\nu}^{1,0}(-x) = -\lim_{x\to+\infty} e_{1,\nu}^{0,\nu}(-x) = 0,$$

которое вместе с оценкой (1.5) при $\omega = 0$ обеспечивает сходимость интеграла в (2.3), из (2.7) получаем требуемое представление (2.3). □

Замечание 2.1. В частном случае $\nu = \alpha/\beta = 1/2$ имеем (см. [5, с. 369, формула (32)])

$$f_{\tau,1/2}(t) = \frac{\tau}{2t\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right),$$

и равенство (2.3) принимает вид

$$T_{\beta/2}(t)\,u_0 = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \tau\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t}\right)T_\beta(\tau)\,u_0 d\tau. \quad (2.8)$$

Представление (2.8) может обеспечить эффект сглаживания (см. условие 1.2 (iii)) для разрешающего оператора $T_{\beta/2}(t)$ в случае, когда для оператора $T_\beta(t)$ его не было. Например, если операторы A и B дифференциальные.

Сформулируем далее теорему о разрешимости задачи типа Коши для неоднородного уравнения.

Теорема 2.2. *Пусть $\beta < 1$ и выполнено условие* 1.1. *Пусть также выполнено одно из двух условий: либо* a) *функция $h(t) \in C((0,\infty), E)$ абсолютно интегрируема в нуле, принимает значения в $D(A)$, $Ah(t) \in C((0,\infty), E)$ и также абсолютно интегрируема в нуле, либо* b) *функция $I^{1-\beta}h(t)$ является непрерывной при $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемой при $t > 0$ функцией и такой, что $D^\beta h(t)$ абсолютно интегрируема в нуле. Тогда задача*

$$D^\beta u(t) = Au(t) + h(t), \quad t > 0, \quad (2.9)$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0 \quad (2.10)$$

имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$u(t) = T_\beta(t)u_0 + \int\limits_0^t T_\beta(t-\xi)\,h(\xi)\,d\xi. \quad (2.11)$$

Доказательство. Достаточно проверить, что функция

$$v(t) = \int_0^t T_\beta(t-\xi)\, h(\xi)\ d\xi$$

удовлетворяет уравнению (2.9) и нулевому начальному условию (2.10).

Пусть выполнено условие a), тогда при $t > 0$ имеем

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\ d\tau \int_0^\tau T_\beta(\tau-\xi)\, h(\xi)\ d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_\xi^t (t-\tau)^{-\beta} T_\beta(\tau-\xi)\, h(\xi)\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t d\xi \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{-\beta} T_\beta(x) h(\xi)\ dx.$$

Поскольку под знаком интеграла по ξ находится непрерывная по $t-\xi$ функция, то

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \lim_{\xi\to t} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{-\beta} T_\beta(x)\, h(\xi)\ dx +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t d\xi \frac{d}{dt} \int_0^{t-\xi} (t-\xi-x)^{-\beta} T_\beta(x)\, h(\xi)\ dx =$$

$$= \lim_{t-\xi\to+0} D^{\beta-1} T_\beta(t-\xi)\, h(\xi) + \int_0^t D^\beta T_\beta(t-\xi)\, h(\xi)\ d\xi =$$

$$= h(t) + \int_0^t T_\beta(t-\xi)\, A h(\xi)\ d\xi = h(t) + Av(t),$$

следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению (2.9).

Проверим далее, что функция $v(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (2.10). Имеем

$$\lim_{t\to+0} D^{\beta-1} v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \lim_{t\to+0} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\ d\tau \int_0^\tau T_\beta(\tau-\xi)\, h(\xi)\ d\xi.$$

Поскольку для $T_\beta(t)$ справедлива оценка (1.5), то для $t \in [0,1]$

$$\left\| \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\, d\tau \int_0^\tau T_\beta(\tau-\xi)\, h(\xi)\ d\xi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^t (t-\tau)^{-\beta}\, d\tau \int_0^\tau (\tau-\xi)^{\beta-1} \|h(\xi)\|\ d\xi = M\ B(\beta, 1-\beta) \int_0^t \|h(\xi)\|\ d\xi,$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция. Следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (2.10).

Пусть теперь выполнено условие b). Тогда

$$D^\beta v(t) = D^\beta \int_0^t T_\beta(\tau)h(t-\tau)\ d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\xi)^{-\beta}\ d\xi \int_0^\xi T_\beta(\tau)h(\xi-\tau)\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t T_\beta(\tau)\ d\tau \int_0^{t-\tau} (t-\tau-x)^{-\beta} h(x)\ dx =$$

$$= T_\beta(t)\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^{t-\tau}(t-\tau-x)^{-\beta}h(x)\,dx + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t T_\beta(\tau)\ d\tau\frac{d}{dt}\int_0^{t-\tau}(t-\tau-x)^{-\beta}h(x)\,dx =$$

$$= T_\beta(t)\,D^{\beta-1}h(0) + \int_0^t T_\beta(\tau)\,D^\beta h(t-\tau)\ d\tau = T_\beta(t)\,D^{\beta-1}h(0) + \int_0^t T_\beta(t-\xi)\,D^\beta h(\xi)\ d\xi. \quad (2.12)$$

С другой стороны, в силу равенства (см. [14, формула (2.61)])

$$I^\beta D^\beta h(x) = h(x) - \frac{I^{1-\beta}h(x)}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}, \qquad 0<\beta<1, \quad (2.13)$$

получим

$$v(t) = \int_0^t T_\beta(t-\xi)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}D^{\beta-1}h(0)\,\xi^{\beta-1} + I^\beta D^\beta h(\xi)\right)d\xi = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \xi^{\beta-1}T_\beta(t-\xi)\,D^{\beta-1}h(0)d\xi +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t T_\beta(t-\xi)d\xi\int_0^\xi(\xi-\tau)^{\beta-1}D^\beta h(\tau)\ d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\,T_\beta(\tau)\,D^{\beta-1}h(0)\ d\tau +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t T_\beta(\tau)\ d\tau\int_0^{t-\tau}(t-\tau-\xi)^{\beta-1}D^\beta h(\xi)\ d\xi. \quad (2.14)$$

Снова в силу равенства (2.13) и замкнутости оператора A справедливы равенства

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)}A\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\,T_\beta(\tau)\,v_0\ d\tau = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}D^\beta T_\beta(\tau)\,v_0\ d\tau =$$

$$= I^\beta D^\beta T_\beta(\tau)\,v_0 = T_\beta(t)\,v_0 - \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}D^{\beta-1}T_\beta(0)\,v_0 = T_\beta(t)\,v_0 - \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}v_0. \quad (2.15)$$

Поэтому из (2.13)–(2.15) вытекают равенства

$$Av(t) = T_\beta(t)\,D^{\beta-1}h(0) - \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}D^{\beta-1}h(0) + \int_0^t\left(T_\beta(t-\xi)\,D^\beta h(\xi) - \frac{(t-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}D^\beta h(\xi)\right)d\xi =$$

$$= T_\beta(t)\,D^{\beta-1}h(0) - \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}D^{\beta-1}h(0) + \int_0^t T_\beta(t-\xi)\,D^\beta h(\xi)d\xi - h(t) + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}D^{\beta-1}h(0) = D^\beta v(t) - h(t),$$

следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению (2.9).

Чтобы убедиться, что и в случае b) функция $v(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (2.10), функцию $D^\beta v(t)$ следует записать в виде

$$D^{\beta-1}v(t) = \int_0^t T_\beta(s)I^{1-\beta}h(t-s)\ ds.$$

□

3. Задача типа Коши для возмущенного уравнения дробного порядка

Переходим к исследованию возмущенной задачи (1.1)-(1.2). В дальнейшем, при получении оценок, нами будет использована функция типа Миттаг-Леффлера (см. [4, гл. III-IV])

$$E_{\mu,\rho}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu k+\rho)}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha<\beta\leqslant 1$, *выполнены условия* 1.1, 1.2 *и при этом в неравенствах* (1.5)-(1.6) *постоянная* ω *равна* 0. *Пусть также выполнены условия* 1.3, 1.4. *Тогда задача* (1.1)-(1.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|u(t)\|\leqslant\frac{M_1\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\,\|u_0\|+\frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}+\frac{C_0\ M_1\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}t^{\alpha+\mu-1}+\\ +L\ M_1\ M_2\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\delta/\nu)\left(t^{\alpha+\delta-1}\ E_{\delta,\alpha+\delta}\left(LM_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta}\right)\ \|u_0\|+\right.\\ \left.+C_0\ t^{\alpha+\delta}\ E_{\delta,\alpha+\delta+1}\left(LM_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta}\right)+C_0\ \Gamma(\mu)\ t^{\alpha+\delta+\mu-1}\ E_{\delta,\alpha+\delta+\mu}\left(LM_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta}\right)\right),\end{gathered}\tag{3.1}$$

где $\delta=\nu(1-\gamma)$.

Доказательство. Учитывая теоремы 2.1 и 2.2, сведем задачу (1.1)-(1.2) к интегральному уравнению, которое в силу (2.3), (2.11) запишется в виде

$$u(t)=\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int_0^t\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)F(s,B(s)u(s))\ d\tau ds,\tag{3.2}$$

где $u_0,\ T_\beta(\tau)u_0\in D(A)\subset D$, $\nu=\alpha/\beta$. Обозначив $w(t)=B(t)u(t)$, получим

$$w(t)=\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int_0^t\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)F(s,w(s))\ d\tau ds.\tag{3.3}$$

Для решения интегрального уравнения (3.3) применим метод последовательных приближений, положив

$$w_0(t)=0,\quad w_1(t)=\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int_0^t\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)F(s,0)\ d\tau ds,$$

$$w_{n+1}(t)=\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t)B(t)T_\beta(\tau)u_0\ d\tau+\int_0^t\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t-s)B(t)T_\beta(\tau)F(s,w_n(s))\ d\tau ds,\quad n\in N.$$

Используя неравенство (1.6) и условие 1.3 (ii), оценим норму

$$\|w_1(t)\|\leqslant M_2\ \ \|u_0\|\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t)\tau^{-\gamma}\ d\tau+M_2\ C_0\ \int_0^t\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t-s)\tau^{-\gamma}\left(1+s^{\mu-1}\right)\ d\tau ds.\tag{3.4}$$

Учитывая определение функции $f_{\tau,\nu}(t)$ равенством (1.7), а также [11, интегралы 2.3.4.1, 2.3.3.4], получим

$$\begin{gathered}\int_0^{\infty}f_{\tau,\nu}(t)\tau^{-\gamma}\ d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{zt}\ dz\int_0^{\infty}\tau^{-\gamma}\exp\left(-\tau z^{\nu}\right)\ d\tau=\\ =\frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{zt}z^{-\nu(1-\gamma)}\ dz=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\gamma))}\ t^{\nu(1-\gamma)-1},\quad t>0.\end{gathered}\tag{3.5}$$

Дважды применяя равенство (3.5) в (3.4) и вычисляя полученный интеграл, будем иметь

$$\|w_1(t)\| \leqslant M_2 \|u_0\| \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\nu(1-\gamma))} t^{\nu(1-\gamma)-1} + M_2 C_0 \frac{\Gamma(1-\gamma) t^{\nu(1-\gamma)}}{\Gamma(\nu(1-\gamma)+1)} +$$
$$+ M_2 C_0 \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\mu) t^{\nu(1-\gamma)+\mu-1}}{\Gamma(\nu(1-\gamma)+\mu)} \leqslant \frac{M_2\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)} \left(t^{\delta-1} \|u_0\| + \frac{C_0}{\delta} t^{\delta} + \frac{C_0 \Gamma(\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\delta+\mu)} t^{\delta+\mu-1} \right).$$

Используя условие 1.3 (iii), аналогично оценим норму разности

$$\|w_2(t) - w_1(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) \left\| B(t) T_\beta(\tau) \left(F(s,w_1) - F(s,0) \right) \right\| \, d\tau ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L\ M_2^2\ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) \tau^{-\gamma} \left(s^{\delta-1} \|u_0\| + \frac{C_0}{\delta} s^{\delta} + \frac{C_0 \Gamma(\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\delta+\mu)} s^{\delta+\mu-1} \right) \, d\tau ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L\ M_2^2\ \Gamma^2(\delta/\nu)}{\Gamma(2\delta)} \left(t^{2\delta-1} \|u_0\| + \frac{C_0}{2\delta}\ t^{2\delta} + \frac{C_0 \Gamma(2\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(2\delta+\mu)}\ t^{2\delta+\mu-1} \right). \quad (3.6)$$

Учитывая (3.6), для $n \in N$ по индукции получаем

$$\|w_n(t) - w_{n-1}(t)\| \leqslant \frac{L^{n-1}\ M_2^n\ \Gamma^n(\delta/\nu)}{\Gamma(n\delta)} \left(t^{n\delta-1} \|u_0\| + \frac{C_0}{n\delta}\ t^{n\delta} + \frac{C_0 \Gamma(n\delta)\Gamma(\mu)}{\Gamma(n\delta+\mu)}\ t^{n\delta+\mu-1} \right). \quad (3.7)$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (w_n(t) - w_{n-1}(t))$ сходится равномерно в любом интервале $[t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1$. Поэтому $w_n(t)$ на том же промежутке равномерно сходится к непрерывной на $[t_0, t_1]$ функции $w(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (3.3). В силу (3.7) для нее справедлива оценка

$$\|w(t)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n(t) - w_{n-1}(t)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k\ M_2^{k+1}\ \Gamma^{k+1}(\delta/\nu)}{\Gamma((k+1)\delta)} \quad \times$$
$$\times \quad \left(t^{(k+1)\delta-1} \|u_0\| + \frac{C_0}{(k+1)\delta} t^{(k+1)\delta} + \frac{C_0\ \Gamma((k+1)\delta)\ \Gamma(\mu)}{\Gamma((k+1)\delta+\mu)} t^{(k+1)\delta+\mu-1} \right) \leqslant$$
$$\leqslant M_2\ \Gamma(\delta/\nu) \left(t^{\delta-1} \|u_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k\ M_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta)} + C_0\ t^{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k\ M_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta+1)} + \right.$$
$$\left. + C_0 \Gamma(\mu)\ t^{\delta+\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k\ M_2^k\ \Gamma^k(\delta/\nu)\ t^{k\delta}}{\Gamma((k+1)\delta+\mu)} \right) =$$
$$= M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ \left(t^{\delta-1} E_{\delta,\delta} \left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta} \right) \|u_0\| + C_0 t^{\delta} E_{\delta,\delta+1} \left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta} \right) + \right.$$
$$\left. + C_0 \Gamma(\mu) t^{\delta+\mu-1} E_{\delta,\delta+\mu} \left(L\ M_2\ \Gamma(\delta/\nu)\ t^{\delta} \right) \right), \quad (3.8)$$

где $E_{\sigma,\rho}(\cdot)$ — функция типа Миттаг-Леффлера, $t \in [t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1$.

Поскольку промежуток $[t_0, t_1]$ произвольный, то функция $w(t)$ — непрерывное на $(0, \infty)$ решение уравнения (3.3), удовлетворяющее на $(0, \infty)$ неравенству (3.8), т.е., абсолютно интегрируема в нуле. Более того, из равенства (3.3) и условия 1.2 (ii) мы заключаем, что функция $w(t)$ удовлетворяет условию 1.2 (ii).

Наконец, из равенства (3.2), с помощью теоремы 2.2, мы получаем решение $u(t)$ задачи (1.1)-(1.2) в виде

$$u(t) = \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t) T_\beta(\tau) u_0 \, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) T_\beta(\tau) F(s, w(s)) \, d\tau ds,$$

для которого, в силу (1.5), (3.8), (3.5) и условия 1.3 (ii) справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)\| \leqslant \int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)\,\|T_\beta(\tau)u_0\|\;d\tau+\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\,\|T_\beta(\tau)F(s,0)\|\;d\tau ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)\,\|T_\beta(\tau)(F(s,w(s))-F(s,0)\|\;d\tau ds\leqslant\\
&\leqslant \frac{M_1\;\Gamma(\beta)\;t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|+\frac{C_0\;M_1\;\Gamma(\beta)\;t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{C_0\;M_1\;\Gamma(\beta)\Gamma(\mu)\;t^{\alpha+\mu-1}}{\Gamma(\alpha+\mu)}+\\
&+\frac{L\;M_1\;M_2\;\Gamma(\beta)\;\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\delta-1}E_{\delta,\delta}\left(L\;M_2\;\Gamma(\delta/\nu)\;s^\delta\right)\;ds+\\
&+\frac{C_0\;L\;M_1\;M_2\;\Gamma(\beta)\;\Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\delta}E_{\delta,\delta+1}\left(L\;M_2\;\Gamma(\delta/\nu)\;s^\delta\right)\;ds+\\
&+\frac{C_0\;L\;M_1\;M_2\;\Gamma(\beta)\;\Gamma(\delta/\nu)\;\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\delta+\mu-1}E_{\delta,\delta+\mu}\left(L\;M_2\;\Gamma(\delta/\nu)\;s^\delta\right)\;ds=\\
&=\frac{M_1\;\Gamma(\beta)\;t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\|u_0\|+\frac{C_0\;M_1\;\Gamma(\beta)\;t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{C_0\;M_1\;\Gamma(\beta)\Gamma(\mu)\;t^{\alpha+\mu-1}}{\Gamma(\alpha+\mu)}+\\
&+L\;M_1\;M_2\;\Gamma(\beta)\;\Gamma(\delta/\nu)\left(t^{\alpha+\delta-1}E_{\delta,\alpha+\delta}\left(L\;M_2\;\Gamma(\delta/\nu)\;t^\delta\right)\|u_0\|+\right.\\
&\left.+C_0\;t^{\alpha+\delta}E_{\delta,\alpha+\delta+1}\left(L\;M_2\;\Gamma(\delta/\nu)\;t^\delta\right)+C_0\;\Gamma(\mu)t^{\alpha+\delta+\mu-1}E_{\delta,\alpha+\delta+\mu}\left(L\;M_2\;\Gamma(\delta/\nu)\;t^\delta\right)\right).
\end{aligned}
$$

При этом мы использовали равенство (см. [14, формула (23) на с. 141])

$$I^\alpha\left(t^{\rho-1}\;E_{\sigma,\rho}\left(ct^\sigma\right)\right)=t^{\alpha+\rho-1}\;E_{\sigma,\alpha+\rho}\left(ct^\sigma\right),\quad \alpha,\;\sigma,\;\rho>0.$$

Установим далее единственность решения задачи (1.1)-(1.2). Пусть имеется другое решение, которое мы обозначим $U(t)$. Тогда в силу теорем 2.1 и 2.2

$$U(t)=\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t)T_\beta(\tau)u_0\;d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s)T_\beta(\tau)F(s,W(s))\;d\tau ds,$$

где $W(t)$ — решение интегрального уравнения (3.3).

Докажем единственность решения интегрального уравнения (3.3) в классе непрерывных на $(0,\infty)$ функций, допускающих оценку

$$\|W(t)\|\leqslant M\;t^{\delta-1}e^{\omega t},\quad M>0,\;\omega\geqslant 0, \tag{3.9}$$

где $\delta=\nu(1-\gamma)<1$. Отметим, что функции, для которых выполнена оценка (3.8), входят в указанный класс в силу известного (см. [4, с. 134]) асимптотического поведения функции Миттаг-Леффлера при $0<\mu<2$

$$E_{\mu,\rho}(z)=\frac{1}{\mu}z^{(1-\rho)/\mu}\exp\left(z^{1/\mu}\right)-\sum_{j=1}^n\frac{1}{\Gamma(\rho-\mu j)\;z^j}+O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),\quad z\in\mathbb{R},\;z\to+\infty. \tag{3.10}$$

Пусть $b>0$, $t\in(0,b]$. Поскольку мы рассматриваем класс функций, удовлетворяющих неравенству (3.9), то обозначим

$$m=\sup_{t\in[0,b]}\left(t^{1-\delta}e^{-\omega t}\|W(t)-w(t)\|\right).$$

Разность $W(t) - w(t)$ удовлетворяет уравнению (3.3) при $u_0 = 0$, поэтому, учитывая равенство (3.5), будем иметь

$$\|W(t) - w(t)\| \leqslant \frac{LM_2\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \|W(s) - w(s)\| \, ds =$$
$$= LM_2\Gamma(1-\gamma) I^{\delta} \left(\|W(t) - w(t)\|\right). \quad (3.11)$$

Следовательно,

$$\|W(t) - w(t)\| \leqslant \frac{LM_2\Gamma(1-\gamma)m}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} s^{\delta-1} e^{\omega s} \, ds = LM_2\Gamma(1-\gamma)m \; I^{\delta} \left(t^{\delta-1} e^{\omega t}\right). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получим

$$\|W(t) - w(t)\| \leqslant L^2 M_2^2 \Gamma^2(1-\gamma)m \; I^{2\delta} \left(t^{\delta-1} e^{\omega t}\right).$$

Продолжая этот процесс, придем к неравенству

$$\|W(t) - w(t)\| \leqslant L^k M_2^k \Gamma^k(1-\gamma)m \; I^{k\delta} \left(t^{\delta-1} e^{\omega t}\right) = \frac{L^k M_2^k \Gamma^k(1-\gamma)m}{\Gamma(k\delta)} \int_0^t (t-s)^{k\delta-1} s^{\delta-1} e^{\omega s} \, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L^k M_2^k \; \Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma((k+1)\delta)} \; t^{(k+1)\delta-1} e^{\omega t} m, \quad \forall \; k \in N, \quad (3.13)$$

откуда, переходя к супремуму, получим

$$m \leqslant \frac{L^k M_2^k \; \Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma((k+1)\delta)} \; b^{k\delta} \; m.$$

Множитель

$$\frac{L^k M_2^k \; \Gamma^k(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma((k+1)\delta)} \; b^{k\delta}$$

является общим членом ряда, определяющего функцию Миттаг-Леффлера (ср. с (3.8)), поэтому он стремится к нулю при $k \to \infty$. Стало быть,

$$m = \sup_{t\in[0,b]} \left(t^{1-\delta} e^{-\omega t} \|W(t) - w(t)\|\right) = 0,$$

откуда, в силу произвольности $b > 0$, следует $W(t) \equiv w(t)$ при $t > 0$, что и завершает доказательство единственности. □

Отметим, что оценка решения (3.1) содержит подробную зависимость от данных рассматриваемой задачи, которая может быть использована в дальнейших исследованиях. Если интересоваться только поведением решения задачи (1.1)-(1.2) при $t \to 0$ и $t \to \infty$, то, учитывая асимптотическую формулу (3.10) для функции Миттаг-Леффлера, оценку (3.1) можно записать в виде

$$\|u(t)\| \leqslant M \; t^{\alpha-1} e^{\omega_1 t} \|u_0\|, \quad M > 0, \; \omega_1 \geqslant 0. \quad (3.14)$$

Теорема 3.1 позволяет установить разрешимость задачи (1.1)-(1.2) при любом α таком, что $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, если выполнены условия 1.3, 1.4, условия 1.1, 1.2, и при этом в неравенствах (1.5)-(1.6) $\omega = 0$. Покажем, что в случае $0 < \alpha = \beta < 1$ можно получить аналогичные результаты без требования $\omega = 0$ в неравенствах (1.5)-(1.6), а также без условия 1.4.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3 *и* $\alpha = \beta < 1$. *Тогда задача* (1.1)-(1.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка* (3.14).

Доказательство. Учитывая теорему 2.2, сведем задачу (1.1)-(1.2) к интегральному уравнению

$$u(t) = T_\alpha(t)u_0 + \int_0^t T_\alpha(t-s) F\left(s, B(s)u(s)\right) \, ds. \quad (3.15)$$

Обозначив $w(t) = B(t)u(t)$, получим уравнение

$$w(t) = T_\alpha(t)u_0 + \int_0^t B(t)T_\alpha(t-s)F(s, w(s))\ ds, \tag{3.16}$$

которое решим методом последовательных приближений. Положим

$$w_0(t) = 0, \quad w_1(t) = T_\alpha(t)u_0, \quad w_{n+1}(t) = T_\alpha(t)u_0 + \int_0^t B(t)T_\alpha(t-s)F\left(s, w_n(s)\right)\ ds, \quad n \in N.$$

Используя неравенства (1.5)-(1.6) и условие 1.3 (iii), оценим норму разности

$$\|w_2(t) - w_1(t)\| \leqslant LM_2 \int_0^t (t-s)^{-\gamma} e^{\omega(t-s)} \|w_1(s)\|\ ds \leqslant LM_1M_2\Gamma(1-\gamma)e^{\omega t} I^{1-\gamma}\left(t^{\alpha-1}\right)\|u_0\|. \tag{3.17}$$

Учитывая (3.17), по индукции получим

$$\|w_n(t) - w_{n-1}(t)\| \leqslant M_1L^{n-1}M_2^{n-1}\Gamma^{n-1}(1-\gamma)e^{\omega t} I^{(n-1)(1-\gamma)}\left(t^{\alpha-1}\right)\|u_0\| =$$

$$= \frac{M_1L^{n-1}M_2^{n-1}\Gamma(\alpha)\Gamma^{n-1}(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+(n-1)(1-\gamma))}\ t^{\alpha-1+(n-1)(1-\gamma)}e^{\omega t}\ \|u_0\|, \quad n \in N.$$

Дальнейшие рассуждения, касающиеся существования единственного решения, проводятся аналогично доказательству теоремы 3.1, при этом для решения $w(t)$ интегрального уравнения (3.16) справедлива оценка

$$\|w(t)\| \leqslant M_1t^{\alpha-1}e^{\omega t}\|u_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_1L^kM_2^k\Gamma(\alpha)\Gamma^k(1-\gamma)t^{\alpha-1+k(1-\gamma)}e^{\omega t}\|u_0\|}{\Gamma(\alpha+k(1-\gamma))} \leqslant M_0t^{\alpha-1}e^{\omega_0 t}\|u_0\|, \tag{3.18}$$

где $M_0 > 0,\ \omega_0 \geqslant \omega$.

Используя (3.18), оценку (3.14) решения $u(t)$ задачи (1.1)-(1.2) получим из равенства (3.15). □

Замечание 3.1. Утверждение, аналогичное теореме 3.2, можно сформулировать и доказать также и при $\alpha = \beta = 1$. В этом случае условие 1.2 (ii) следует заменить следующим требованием: для любого $x \in D$ либо функция $B(t)x$ принадлежит $C([0,\infty), E)$, принимает значения в $D(A)$ и $AB(t)x \in C([0,\infty), E)$, либо $B(t)x \in C^1([0,\infty), E)$.

Установим теперь теорему о непрерывной зависимости решения задачи (1.1)-(1.2) от начальных условий.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и пусть* $u_n(t)$ *— последовательность решений задачи*

$$D^\alpha u_n(t) = Au_n(t) + F\left(t, B(t)u_n(t)\right), \quad t > 0, \tag{3.19}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}u_n(t) = g_n \in D(A). \tag{3.20}$$

Если $g_n \to u_0 \in D(A)$, $Ag_n \to Au_0$ *и* $B(t)g_n$ *сходится к* $B(t)u_0$ *равномерно по* $t \in (0,b]$ *для любого* $b > 0$, *то последовательность* $u_n(t)$ *решений задачи* (3.19)-(3.20) *сходится к решению* $u(t)$ *задачи* (1.1)-(1.2) *равномерно по* $t \in [t_0, b]$ *для любых* $0 < t_0 < b$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $U_n(t) = u_n(t) - \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g_n$, которая является решением задачи

$$D^\alpha U_n(t) = AU_n(t) + F\left(t, B(t)U_n(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}B(t)g_n\right) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}Ag_n, \tag{3.21}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}U_n(t) = 0. \tag{3.22}$$

В силу теорем 2.1 и 2.2 функция $U_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$U_n(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) T_\beta(\tau) \left(F\left(s, B(s)U_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(s) g_n \right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} A g_n \right) \, d\tau ds.$$

Обозначив $W_n(t) = B(t)U_n(t)$, как и при доказательстве теоремы, 3.1 получим

$$U_n(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) T_\beta(\tau) \left(F\left(s, W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(s) g_n \right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} A g_n \right) \, d\tau ds, \tag{3.23}$$

где $W_n(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$W_n(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) B(t) T_\beta(\tau) \left(F\left(s, W_n(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(s) g_n \right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} A g_n \right) \, d\tau ds. \tag{3.24}$$

Пусть n, k — достаточно большие натуральные числа, $\varepsilon > 0$. Учитывая (3.24), как и при доказательстве неравенства (3.13), получим

$$\|W_n(t) - W_k(t)\| \leqslant \frac{L \ M_2 \ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \|W_n(s) - W_k(s)\| \ ds +$$

$$+ \frac{M_2 \ \Gamma(\delta/\nu)}{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} \ s^{\alpha-1} \left(\|Ag_n - Ag_k\| + L \ \|B(s)g_n - B(s)g_k\| \right) \ ds,$$

$$m = \sup_{t\in[0,b]} \left(t^{1-\delta} e^{-\omega t} \|W_n(t) - W_k(t)\| \right) \leqslant M_0 m + \varepsilon, \quad M_0 < 1.$$

Следовательно, имеем $m \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1-M_0}$, и в силу полноты пространства E последовательность $t^{1-\delta}e^{-\omega t}W_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [0,b]$ к непрерывной на $[0,b]$ функции $t^{1-\delta}e^{-\omega t}W(t)$. Таким образом, $W_n(t)$ сходится равномерно по $t \in [t_0, b]$, $0 < t_0 < b$, к функции $W(t)$, которая удовлетворяет неравенству (3.9), и в силу условия 1.2 (ii), также удовлетворяет условию 1.2 (ii).

Из равенства (3.23) вытекает равномерная по $t \in [t_0, b]$ сходимость $U_n(t)$ к функции

$$U(t) = \int_0^t \int_0^\infty f_{\tau,\nu}(t-s) T_\beta(\tau) \left(F\left(s, W(s) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} B(s) u_0 \right) + \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} A u_0 \right) \, d\tau ds,$$

которая является решением задачи (3.21)-(3.22). Наконец, $u_n(t)$ равномерно по $t \in [t_0, b]$ сходится к функции $u(t) = U(t) + \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u_0$, которая удовлетворяет задаче (1.1)-(1.2). □

Замечание 3.2. Утверждение, аналогичное теореме 3.3 о непрерывной зависимости решения задачи (1.1)-(1.2) от начальных условий можно сформулировать и доказать также и при $\alpha = \beta \leqslant 1$.

Теорема 3.2 содержит в части однозначной разрешимости теорему 8 работы [3] в частном случае, когда оператор B не зависит от t, ограничен и выполнено условие 1.4. В этом частном случае в работе [3] доказано, что при $\alpha = \beta < 1$ разрешающий оператор $T_\alpha(t, A+B)$ задачи (1.1)-(1.2) имеет вид

$$T_\alpha(t, A+B) = \sum_{n=0}^\infty S_n(t),$$

где $S_0(t) = T_\alpha(t, A)$ — разрешающий оператор задачи (1.3)-(1.4) при $\beta = \alpha$,

$$S_n(t) = \int_0^t T_\alpha(t-s, A) B S_{n-1}(s) \ ds, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Отметим также работу [16], в которой теорема о возмущении доказана для уравнения, содержащего, в отличие от уравнения (1.1), дробную производную Капуто, в предположении что оператор A — генератор аналитической полугруппы и $\beta = 1$. Из этой же работы заимствован следующий пример.

Пример 3.1. Пусть $E = L_2(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, условие 1.4 выполнено (см. [15, с. 20]). На множестве $D(A) = W_2^{2m}(\mathbb{R}^n)$ определим оператор A следующим образом

$$Au(t,x) = \sum_{|p|=2m} a_p(x) \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} u(t,x)}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}},$$

где для любых $x,\ \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{|p|=2m} a_p(x)\xi^p \geqslant (-1)^{m+1} M_0 |\xi|^{2m},$$

а коэффициенты $a_p(x)$ при $|p| = 2m$ удовлетворяют равномерному в $\mathbb{R}^n$ условию Гельдера. Оператор A, как указано в работе [16], удовлетворяет условию 1.1 при $\beta = 1$, $\omega = 0$.

Оператор $B(t)$ определим на $D = W_2^{2m-1}(\mathbb{R}^n) \supset D(A)$ равенством

$$B(t)u(t,x) = \sum_{|p|\leqslant 2m-1} a_p(t,x) \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} u(t,x)}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}} + \int_\Omega \sum_{|p|\leqslant 2m-1} b_p(t,x,\xi) \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} u(t,\xi)}{\partial \xi_1^{p_1} \cdots \partial \xi_n^{p_n}}\, d\xi,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; коэффициенты $a_p(t,x)$ при $|p| \leqslant 2m-1$ и каждом $t \geqslant 0$ непрерывны, ограничены по $x \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\mu > \alpha$ по t равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$; коэффициенты $b_p(t,x,\xi)$ непрерывны и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega |b_p(t,x,\xi)|^2 \, d\xi dx < +\infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega |b_p(t_2,x,\xi) - b_p(t_1,x,\xi)|^2 \, d\xi dx \leqslant C\,|t_2 - t_1|^\mu, \quad \mu > \alpha,\ C > 0.$$

Оператор $B(t)$, как указано в работе [16], удовлетворяет условию 1.2 при $\omega = 0$ и некотором $\gamma \in (0,1)$.

Пусть оператор $F(t,w)$ удовлетворяет условию 1.3. Тогда при $u_0(x) \in W_2^{2m}(\mathbb{R}^n)$ и $\alpha < 1$, в силу теорем 3.1, 3.3, задача (1.1)-(1.2) (задача типа Коши для интегродифференциального уравнения) корректно поставлена и однозначно разрешима.

4. Нагруженное дифференциальное уравнение дробного порядка

В банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу типа Коши

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + g(u(t))p, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1} u(t) = u_0, \tag{4.2}$$

где $0 < \alpha < 1$, g — нелинейный, непрерывный функционал заданный на E, A — линейный, замкнутый, плотно определенный оператор, p — фиксированный элемент пространства E.

Задача (4.1), (4.2) является частным случаем задачи (1.1)-(1.2) при $F(t, B(t)u(t)) = g(u(t))p$. Уравнение (4.1) содержит значение функционала g от искомого решения $u(t)$, поэтому его естественно назвать нагруженным дифференциальным уравнением. Определение нагруженного дифференциального уравнения см., например, в [9, гл. 2].

Условие 4.1. (i) *Для любой функции $u(t)$ такой, что $I^{1-\alpha}u(t)$ представляет собой непрерывную при $t \geqslant 0$ и непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию, функция $D^\alpha g(u(t))$ принадлежит $C((0,\infty),E)$ и абсолютно интегрируема в нуле.*

(ii) *Для любых $u, v \in E$ существует постоянная $L > 0$, такая, что*

$$|g(u) - g(v)| \leqslant L\|u - v\|. \tag{4.3}$$

Из теорем 3.1, 3.2 вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha < \beta \leqslant 1$*, выполнено условие* 1.1*, и при этом в неравенстве* (1.5) *постоянная* ω *равна* 0*. Пусть также выполнены условия* 1.4, 4.1*. Тогда задача* (4.1)*,* (4.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \leqslant M\ t^{\alpha-1}e^{\omega_1 t}\|u_0\|, \quad M>0, \ \ \omega_1>\omega. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *Пусть* $\alpha = \beta \leqslant 1$*, выполнены условие* 1.1 *и* 4.1*. Тогда задача* (4.1)*,* (4.2) *имеет единственное решение, для которого справедлива оценка* (4.4).

Установленные теоремы о разрешимости задачи типа Коши для нагруженного абстрактного уравнения могут быть использованы при исследовании обратных коэффициентных задач для уравнения дробного порядка.

5. Обратная задача для дифференциального уравнения дробного порядка

Рассмотрим задачу определения пары $(w(t), \varphi(t))$ из условий

$$D^\beta w(t) = Aw(t) + \varphi(t)p, \quad t>0, \tag{5.1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}w(t) = u_0, \tag{5.2}$$

$$f(w(t)) = \psi(t), \tag{5.3}$$

где $0<\beta<1$, p, u_0 — фиксированные элементы из $D(A)$, f — линейный непрерывный функционал на E ($f\in E^*$ — сопряженное пространство), $\psi(t)$ — заданная скалярная функция.

Конкретной реализацией рассматриваемой обратной задачи является задача восстановления зависимости возмущения от времени по дополнительному наблюдению в некоторой точке пространства.

Определение 5.1. *Решением задачи* (5.1)–(5.3) *называется пара* $(w(t), \varphi(t))$*, где* $w(t)$ — *абстрактная функция,* $\varphi(t)$ — *абсолютно интегрируемая скалярная функция, для которой* $w(t)$ *является решением уравнения* (5.1)*, удовлетворяющим начальному условию* (5.2) *и дополнительному условию* (5.3).

Обзор публикаций по обратным задачам для абстрактных дифференциальных уравнений целого порядка можно найти в монографии [18]. По поводу их конкретных реализаций см. [13]. Что касается обратной задачи (5.1)–(5.3) для уравнения дробного порядка, то она рассматривается впервые.

Условие 5.1. (i) $0<\beta<1$, $p\in D(A)$ ($D(A)$ — *область определения оператора* A).

(ii) $f\in E^*$ *и* $f(p)\neq 0$ (*условие невырожденности*).

(iii) *Скалярная функция* $I^{1-\beta}\psi(t)$ *является непрерывной при* $t\geqslant 0$*, непрерывно дифференцируемой при* $t>0$*, дробная производная* $D^\beta\psi(t)$ *абсолютно интегрируема в нуле, и выполнено условие согласования*

$$f(u_0) = \lim_{t\to 0} D^{\beta-1}\psi(t).$$

Условие $f(p)\neq 0$ (условие невырожденности) в конкретной реализации означает, что в точке наблюдения действует восстанавливаемый источник (см. [13, с. 217]).

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 1.1 *и* 5.1*. Тогда обратная задача* (5.1)–(5.3) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Будем искать решение обратной задачи (5.1)–(5.3) в виде

$$w(t) = \theta(t)p + u(t), \tag{5.4}$$

где

$$\theta(t) = I^\beta\varphi(t). \tag{5.5}$$

Легко убедиться, что функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$D^\beta u(t) = Au(t) + \theta(t)Ap, \quad t>0$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to 0} D^{\beta-1}u(t) = u_0. \tag{5.6}$$

Учитывая дополнительное условие (5.3), для определения функции $\theta(t)$ получим линейное уравнение

$$\psi(t) = \theta(t)f(p) + f(u(t)). \tag{5.7}$$

Таким образом, обратная задача (5.1)–(5.3) свелась к нахождению удовлетворяющего начальному условию (5.6) решения нагруженного уравнения

$$D^\beta u(t) = Au(t) + g(u(t))q, \quad t > 0 \tag{5.8}$$

где $q = Ap \in E$, $g(u(t)) = \dfrac{\psi(t) - f(u(t))}{f(p)}$ — непрерывный, вообще говоря, нелинейный функционал.

Оператор A по предположению удовлетворяет условию 1.1, а функционал $g(u(t))$, очевидно, удовлетворяет условию 4.1. В силу теоремы 4.2 задача типа Коши (5.8), (5.6) имеет единственное решение $u(t)$.

Функция $\varphi(t)$ однозначно находится из равенств (5.5) и (5.7). Она имеет вид

$$\varphi(t) = D^\beta\theta(t) = \frac{1}{f(p)}\left(D^\beta\psi(t) - f\left(D^\beta u(t)\right)\right).$$

Наконец, функция $w(t)$ определяется равенством (5.4). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А. В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной// Вестник ВГУ, Серия физика, математика. —2001. — № 2. — С. 74–77.
2. *Глушак А. В., Авад Х. К.* О возмущении абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными// Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2008. — *10*, № 1. — С. 25–31.
3. *Глушак А. В., Поваляева Ю. В.* О свойствах решений задачи типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной// Spectral and Evolution Problems. — 2004. — *14*. — P. 163–172.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
7. *Костин В. А.* К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными// ДАН СССР. — 1992. — *326*, No 4. — С.597–600.
8. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
9. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
10. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
12. *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. — Нальчик: Изд-во КБНЦ, 2005.
13. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. — М.: УРСС, 2007.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
15. *Arendt W., Batty C., Hieber M., Neubrander F.* Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.
16. *El-Borai M. M.* Some probablitiy densities and fundamental solutions of fractional evolution equations// Chaos. Solitons and Fractals. — 2002. — *14*. — P. 433–440.
17. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and application of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006.
18. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York—Basel: Marcel Dekker, 2000.

Хамед Камаль Авад
Белгородский госуниверситет, кафедра математического анализа

Александр Васильевич Глушак

Белгородский госуниверситет, кафедра математического анализа
E-mail: aleglu@mail.ru