

**ФОРМИРОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ БАЗИСОВ
ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ
НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ**

В статье изложен подход к формированию адаптивных базисов для аппроксимации функций на основе частотных представлений. Также рассмотрен вопрос выбора адаптивного вейвлет-базиса.

Ключевые слова: аппроксимация; адаптивный базис; частотные представления; вейвлет-базис; энтропия; собственное число; собственный вектор; субполосная матрица.

In article the approach to generation adaptive bases for approximation functions on the basis of frequency representations is stated. Also the question of a choice of adaptive wavelet-bases is considered.

Keywords: approximation; adaptive bases; frequency representations; wavelet-bases; entropy; eigenvalue; eigenvector; subband matrix.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В вычислительной математике нередки случаи, когда одну функцию приходится заменять другой, более простой и удобной для дальнейшей работы. Такую задачу называют аппроксимацией функций [1].

Математическая теория аппроксимации предлагает выбирать базис, который с помощью линейной комбинации небольшого числа векторов из этого базиса дает возможность построить достаточно точную аппроксимацию функции. Эти выбранные векторы могут быть интерпретированы как существенные для структуры функции. Коэффициенты разложения функции по базису образуют представление, которое выделяет некоторые определенные свойства функции [2].

В приложениях функцию часто называют сигналом, поэтому в рамках данной работы понятия функция и сигнал равнозначны.

ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Линейная аппроксимация предполагает, что сигнал s проецируется на K векторов, априори выбранных из ортонормированного базиса $M = \{\varphi_i\}_{i \in N}$. Аппроксимация s K векторами, индексы которых принадлежат некоторому множеству I_K , имеет вид:

$$s_K = \sum_{i \in I_K} (s, \varphi_i) \varphi_i. \tag{1}$$

Погрешность аппроксимации — сумма остальных (не принадлежащих множеству I_K) квадратов модулей скалярных произведений:

$$\varepsilon_K = \sum_{i \notin I_K} |(s, \varphi_i)|^2 \tag{2}$$

Точность линейной аппроксимации зависит от свойств s относительно выбранного базиса M .

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

В данном случае предлагается улучшить линейную аппроксимацию вида (1). Для этого априори выбираются K векторов, зависящих от s . Для минимизации погрешности (2) I_K выбирается таким, что K векторов с индексами из I_K имеют

наибольшие модули скалярного произведения $|(s, \varphi_i)|$. Так как приближающие векторы меняются вместе с s , то аппроксимация нелинейная [2].

АДАПТИВНЫЙ ВЫБОР БАЗИСА

В линейной аппроксимации и нелинейной подразумевается, что мы работаем с некоторым заранее выбранным базисом M .

Для оптимизации нелинейной аппроксимации можно адаптивно выбирать сам базис, зависящий от сигнала.

АДАПТИВНЫЙ ВЫБОР БАЗИСА В ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСАХ

В книге [2] рассмотрен вопрос об адаптивном выборе базиса для аппроксимации сигнала. «Лучший» базис выбирается из семейства вейвлет-пакетов. Обычно в качестве критерия для выбора «лучшего» базиса для данного сигнала используется критерий минимальности энтропии [2, 3]. Энтропия должна обладать свойством аддитивности (объединения) по отношению к сигналу. При этом существует несколько вариантов определения энтропии. В качестве примера можно привести энтропию Шеннона. Энтропия Шеннона определяется формулой [3]:

$$E(s) = -\sum s_i^2 \ln(s_i^2),$$

где s - сигнал, s_i - его значения; при соглашении $0 \ln(0) = 0$.

Схематически вейвлет-пакетное разложение сигнала можно изобразить в виде дерева:

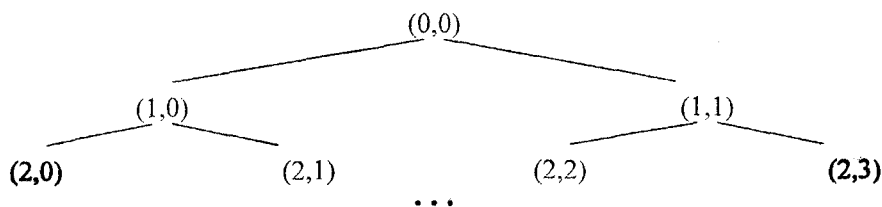


Рисунок 1 – Дерево вейвлет-пакетного разложения

На вершине этого дерева - исходный сигнал, а ниже его - пакетные вейвлет-коэффициенты. Критерий минимальности энтропии используется для выбора «лучшего» базиса следующим образом. Если при разложении коэффициентов некоторого узла сумма энтропий, полученных при разложении компонент, меньше, чем энтропия коэффициентов в исходном узле, то разложение применяется, в противном случае коэффициенты остаются без изменения.

ФОРМИРОВАНИЕ АДАПТИВНОГО БАЗИСА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Достаточно часто интерес представляют только некоторые характеристики реальных сигналов. В большинстве случаев речь идет о таких характеристиках, которые описывают поведение исследуемых процессов с позиций их воздействий на иные объекты. Иными словами, имеются в виду характеристики, отражающие физический смысл взаимодействия различных объектов. Сюда, прежде всего, относятся энергетические свойства. В частности, представляет интерес выделения так называемых квазипериодичностей, характеризующихся повышенной концентрацией энергии в отдельных интервалах оси частот [4].

Таким образом, энергетические свойства (концентрация энергии в отдельных интервалах оси частот) сигнала можно положить за основу построения адаптивных базисов. Иными словами, аппроксимации будет подвергаться не сам вектор, а его

трансформанта Фурье. Более того, имеется в виду возможность аппроксимации отрезков трансформанты Фурье исходного вектора в отдельных интервалах оси частот. При этом интервалы оси частот выбираются с тем условием, что исходный сигнал обладает в них повышенной концентрацией энергии (подавляющей долей энергии, например, 0,99).

Для построения адаптивного базиса необходимо решить следующую задачу: определить частотные интервалы, содержащие подавляющую долю энергии сигнала.

В работе [4] разработан метод вычисления точных значений долей энергии отрезка эмпирических данных в выбранных частотных интервалах. Отметим некоторые моменты данного метода.

Предполагается, что дан вектор эмпирических данных размерности N

$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_N)^T,$$

где T — транспонирование. Трансформанта Фурье такого вектора по определению имеет вид:

$$F(\omega) = \sum_{k=1}^N f_k e^{-j(k-1)\omega} \\ -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

При этом равенство Парсеваля можно преобразовать к виду:

$$\sum_{k=1}^N f_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi$$

Имеется возможность осуществить частотный анализ энергетических характеристик исследуемого вектора, так как интегралы

$$P_r = \int_{\omega \in V_r} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi, \\ V_r = [v_{r+1}, v_r) \cup [v_r, v_{r+1}), v_0 = 0, \\ 0 < v_{r+1} \leq \pi, \quad (3)$$

$r = 0, \dots, R-1$ (R — некоторое натуральное число)

определяют части (доли) энергии, попадающие в выбранные частотные интервалы.

Следующая формула позволяет получить представление для сосредоточенной в частотном интервале (3) части энергии исследуемого вектора:

$$P_r = \vec{f}^T A_r \vec{f}, \quad (4)$$

где $A_r = \{a_{i,k}^r\}$

$$\{a_{i,k}^r\} = \begin{cases} [\sin(v_{r+1}(i-k)) - \sin(v_r(i-k))] / [\pi(i-k)], & i \neq k; \\ (v_{r+1} - v_r) / \pi, & i = k. \end{cases} \quad i, k = 1, \dots, N.$$

В монографии [4] предложено именовать матрицы A_r субполосными.

Субполосные матрицы являются симметрическими и неотрицательно определенными. Поэтому каждая матрица обладает полной системой ортонормальных собственных векторов, соответствующих неотрицательным собственным числам. Таким образом, собственные векторы образуют ортонормированные базисы.

Занишем субполосную матрицу через ее собственные числа и собственные векторы

$$A_r = \sum_{k=1}^N \lambda_{k,r} \vec{q}_{k,r} \vec{q}_{k,r}^T \quad (5)$$

Отметим важные свойства данных базисов.

Трансформанты Фурье собственных векторов обладают свойством двойной ортогональности:

$$\int_{\omega \in I_r} Q_{k,r}(\omega) Q_{i,r}(\omega) d\omega = 0, i \neq k$$

$$\int_{\pi}^{\pi} Q_{k,r}(\omega) Q_{i,r}(\omega) d\omega = 0, i \neq k$$

Собственные числа количественно равны сосредоточенным в выбранных частотных интервалах долям энергий соответствующих собственных векторов:

$$\lambda_{k,r} = \int_{\omega \in I_{r,i}} |Q_{k,r}|^2 d\omega / 2\pi.$$

Диапазон изменения собственных чисел:

$$0 < \lambda_{k,r} \leq 1, k = 1, \dots, N \quad (6)$$

Отбросив собственные числа, значения которых близко к нулю, можно выражение (5) заменить аппроксимацией:

$$A_r = \sum_{k=1}^M \lambda_{k,r} q_{k,r} q_{k,r}^T,$$

где $M < N$.

Запишем теперь алгоритм построения адаптивного базиса.

1. Разбить частотную ось на R не перекрывающихся частотных интервалов;
2. Вычислить долю энергии сигнала в каждом частотном интервале;
3. Определить частотные интервалы, содержащие подавляющую долю энергии.

При этом значение подавляющей доли энергии выбирается из условия задачи;

4. Просуммировать субполосные матрицы частотных интервалов, отобранных на шаге 3. Результирующая матрица также будет субполосной;

5. Найти собственные числа и собственные векторы полученной на шаге 4 субполосной матрицы. Искомым базисом будет базис собственных векторов субполосной матрицы.

Замечание:

В расчетах используется нормированная полоса частот. Если априорно неизвестны частотные интервалы, содержащие подавляющую долю энергии исходного сигнала, тогда целесообразным будет равномерное разбиение всей частотной оси на частотные интервалы. При выборе количества частотных интервалов следует принимать во внимание некоторые моменты: увеличение количества частотных интервалов, с одной стороны, улучшает частотную локализацию энергии, а с другой стороны, увеличивает объем необходимых вычислений.

Обозначим через R_m объединение частотных интервалов, содержащих долю энергии, равную m . (шаг 3 алгоритма). R_m определяет субполосную матрицу A_{R_m} . Находим собственные векторы и собственные числа субполосной матрицы A_{R_m} . Исходный сигнал теперь можно разложить по базису собственных векторов:

$$f_{R_m} = \sum_{k=1}^N \lambda_{k,R_m} \alpha_{k,R_m} q_{k,R_m}, \quad (7)$$

где $\alpha_{k,R_m} = (q_{k,R_m}, f)$.

Выражение (7) допускает аппроксимацию:

$$f_{R_m} = \sum_{k=1}^M \lambda_{k,R_m} \alpha_{k,R_m} q_{k,R_m},$$

где $M \leq N$. Данное положение основывается на свойстве собственных чисел (6). Значение M будет тем меньше, чем меньше отношение $\frac{R_m}{\pi}$ (отношение суммарной ширины R_m к ширине всего частотного интервала).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Были проведены вычислительные эксперименты с целью оценки погрешности аппроксимации сигнала в адаптивных базисах: «лучшем» вейвлет-базисе и базисе собственных векторов субполосной матрицы. Также оценивалось количество коэффициентов разложения исходного сигнала по данным адаптивным базисам, достаточным для нахождения аппроксимации с заданной долей энергии.

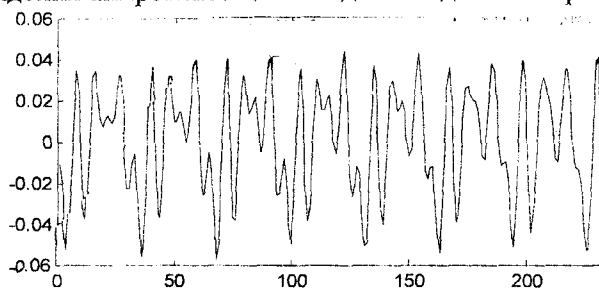


Рисунок 2 – Исходный сигнал во временной области

В качестве оценки погрешности была выбрана относительная погрешность аппроксимации в заданном частотном интервале R_m отрезков исходной трансформанты Фурье:

$$\delta_{R_m} = \sqrt{\frac{(\vec{f} - \hat{\vec{f}})^T A_{R_m} (\vec{f} - \hat{\vec{f}})}{\vec{f}^T A_{R_m} \vec{f}}},$$

где $\hat{\vec{f}}$ – аппроксимация в одном из базисов.

Пример 1. Аппроксимация речевого сигнала (фрагмент сигнала, соответствующий звуку «а») в адаптивном базисе собственных векторов субполосной матрицы и адаптивном («лучшем») вейвлет-базисе Добеши 5 (Db 5).

Приведем адаптивный «лучший» вейвлет-базис Добеши 5 схематически в виде дерева (рис. 4).

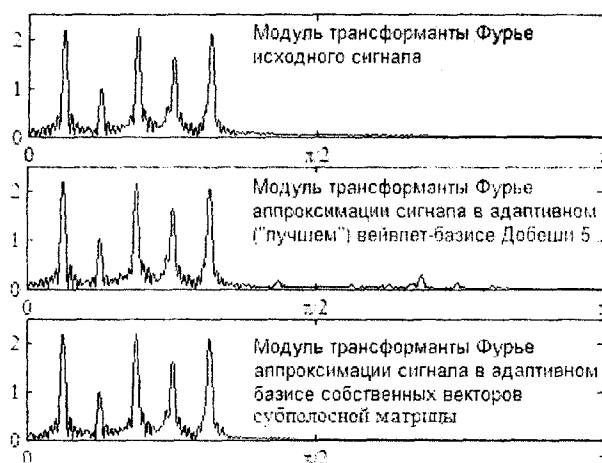


Рисунок 3 – Исходный сигнал и его аппроксимации в частотной области

Оказывается, не всегда можно выбрать адаптивный («лучший») вейвлет-базис на основе критерия минимальности энтропии Шеннона. Рассмотренный пример сигнала не допускает выбора адаптивного («лучшего») вейвлет-базиса Койфлета 5 (Coif 5). Далее приводится фрагмент дерева разложения сигнала с указанием энтропии (квадратные скобки).

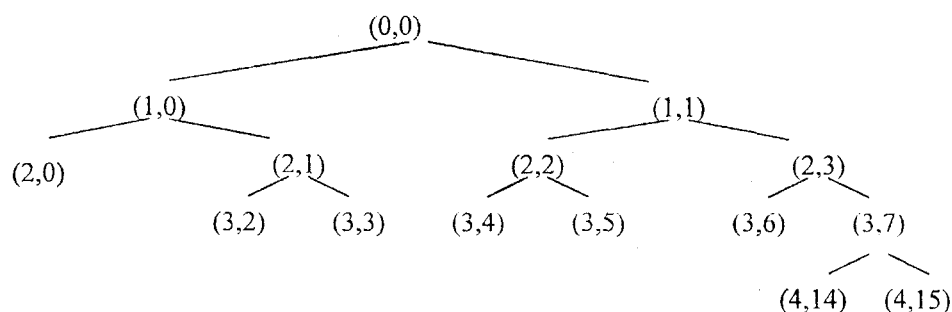


Рисунок 4 – Дерево адаптивного «лучшего» вейвлет-базиса Добеши 5

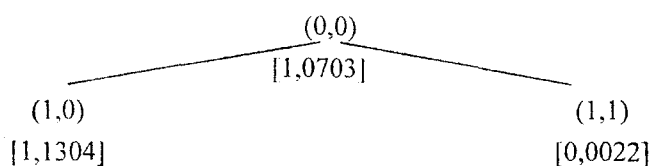


Рисунок 5 – Фрагмент дерева разложения сигнала по вейвлет-базису Койфлет 5

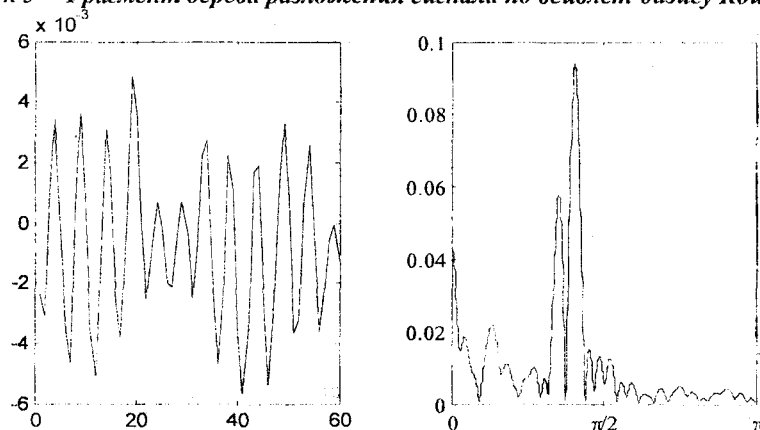


Рисунок 6 – Исходный сигнал (слева) и модуль его трансформанты Фурье (справа)

Как видно из рисунка 5, сумма энтропий узлов (1,0) и (1,1) превышает энтропию исходного узла (0,0).

Пример 2. Аппроксимация речевого сигнала (фрагмент сигнала, соответствующий звуку «к») в адаптивном базисе собственных векторов субполосной матрицы и адаптивном («лучшем») вейвлет-базисе Хаар (Haar).

Основные параметры сигналов и оценка погрешности отображены в таблице 1.

Таблица 1 – Значение параметров и оценка погрешности

№ примера (эксперимента)/ наименование адаптивного базиса	N	R	m	M	δ_{R_m}
1	2	3	4	5	6

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6
1/адаптивный базис собственных векторов субполосной матрицы	233	200	0,9841	79	0,038056
1/адаптивный («лучший») вейвлет-базис Добеши 5	233	-	0,9841	71	0,062821
2/адаптивный базис собственных векторов субполосной матрицы	60	60	0,9891	43	0,024373
2/адаптивный («лучший») вейвлет-базис Хаар	60	-	0,9893	43	0,07158

Замечание: обозначения, применяемые в таблице 1:

N – количество отсчетов в сигнале;

R – количество частотных интервалов, на которое разбивалась основная полоса частот в случае адаптивного базиса собственных векторов субполосной матрицы;

m – доля энергии аппроксимации от энергии исходного сигнала (задавалась априорно);

M – количество коэффициентов в адаптивном базисе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании результатов экспериментов можно сделать вывод, что формирование адаптивных базисов для аппроксимации функций на основе частотных представлений, а именно, адаптивных базисов собственных векторов субполосной матрицы, обеспечивает меньшую погрешность аппроксимации, чем адаптивные («лучшие») вейвлет-базисы. Кроме того, выбор адаптивного («лучшего») вейвлет-базиса на основе минимальности критерия энтропии Шеннона не всегда возможен. Отметим также, что формирование адаптивного базиса собственных векторов субполосной матрицы всегда возможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапчик М.П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов /М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 384 с.
2. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов: пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с., ил.
3. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с., ил.
4. Жилияков Е.Г. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: монография. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2007. – 160 с.

Жилияков Евгений Георгиевич

Белгородский государственный университет, г. Белгород

Доктор технических наук, профессор,

заведующий кафедрой «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии»

Тел.: (4722) 30-13-51

E-mail: Zhilyakov@bsu.edu.ru,

Туняков Самат Валерьевич

Белгородский государственный университет, г. Белгород

Аспирант кафедры «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии»

E-mail: student_pf@mail.ru