

Применение метода негладких интегральных направляющих функций для исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью

Корнев С. В., Обуховский В. В., Гетманова Е. Н., Афонина С. Н.

(Статья представлена членом редакционной коллегии Шишкиной Э. Л.)

Воронежский государственный педагогический университет,

Россия, 394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru, ekaterina_getmanova@bk.ru, AfoninaSvN@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе на основе теории случайных неподвижных точек и случайной топологической степени случайных мультиотображений приводятся новые топологические и геометрические методы исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью, представленной в виде суммы случайного полунепрерывного сверху мультиотображения и случайного непрерывного по совокупности переменных отображения, где одна из переменных представлена в виде функции. Для приведенной задачи построен расширенный мультиоператор суперпозиции. Для исследования поставленной задачи применен метод случайных негладких интегральных направляющих функций. Сформулирована и доказана теорема о существовании случайного периодического решения поставленной задачи.

Ключевые слова: случайное мультиотображение, случайная интегральная направляющая функция, случайное функционально-дифференциальное включение с возмущенной правой частью, расширенный мультиоператор суперпозиции

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Для цитирования: Корнев С.В., Обуховский В.В., Гетманова Е.Н., Афонина С.Н. Применение метода негладких интегральных направляющих функций для исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):262–269. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-262-269 EDN EZPBVE

Original Research

Application of the Nonsmooth Integral Guiding Functions Method for Studying of the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions with a Perturbed Right-Hand Side

Sergey V. Kornev, Valeri V. Obukhovskii, Ekaterina N. Getmanova, Svetlana N. Afonina

(Article submitted by a member of the editorial board Shishkina E. L.)

Voronezh State Pedagogical University,

86 Lenin St., Voronezh 394043, Russia

kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru, ekaterina_getmanova@bk.ru, AfoninaSvN@gmail.com

Abstract. In this work, based on the theory of random fixed points and random topological degree theory for random multivalued mappings, new topological and geometrical methods are presented for investigating of the periodic problem for a random functional differential inclusion with a perturbed right-hand side, represented as the sum of a random upper semicontinuous multivalued map and a random continuous map with respect to the collection of variables, where one of the variables is represented as a function. An extended multivalued superposition operator is constructed for the given problem. The method of random nonsmooth integral guiding functions is applied to study the posed problem. The existence theory of a random periodic solution of the posed problem is formulated and proved.

Keywords: Random Multivalued Map, Random Integral Guiding Function, Random Functional Differential Inclusion with a Perturbed Right-Hand Side Extended Multivalued Superposition Multimap

Funding: The study was carried out with financial support from the Russian Science Foundation within the framework of scientific project No. 22-71-10008.

For citation: Kornev SV., Obukhovskii VV., Getmanova EN., Afonina SN. Application of the Nonsmooth Integral Guiding Functions Method for Studying of the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions with a Perturbed Right-Hand Side. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):262–269. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-262-269 EDN EZPBVE

1. Введение. В настоящей работе классический метод направляющих функций Красносельского М. А. и Перова А. И. (см. [1], [2]) обобщается на случай негладких интегральных направляющих потенциалов для случайных функционально-дифференциальных включений. На основе теории случайных неподвижных точек и случайной топологической степени случайных мультиотображений предлагаются новые топологические и геометрические методы исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью, представленной в виде суммы случайного полунепрерывного сверху мультиотображения и случайного непрерывного по совокупности переменных отображения, где одна из переменных представлена в виде функции.

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые понятия теории многозначных отображений (см., например, [3], [4], [5], [6], [7]) и теории степени совпадения (см., например, [8], [9], [10]).

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) являются метрическими пространствами и $I = [0, T]$. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y . Если Y – нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$, $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y .

Определение 2.1. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется компактным, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y , т. е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y .

Определение 2.2. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε -окрестность множества. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.), если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

В дальнейшем пн. св. и компактное мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ будем называть просто компактным. Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Пусть I – замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 2.3. Мультифункция $F : I \rightarrow K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ – измеримое подмножество I .

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства.

Определение 2.4. Пусть $F : X \rightarrow P(Y)$ – мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$, $\Gamma_F = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}$ называется графиком мультиотображения F .

Определение 2.5. Мультиотображение F называется замкнутым, если его график Γ_F является замкнутым множеством в пространстве $X \times Y$.

Определение 2.6. Однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется сечением мультиотображения F , если $f(x) \in F(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Определение 2.7. $l : \text{Dom } l \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ – линейный (необязательно непрерывный) оператор, где символом Dom обозначается область определения l .

Теорема 2.1. Пусть $p : E_1 \rightarrow E_1$ – линейный оператор проектирования такой, что $\text{Im } p = \text{Ker } l$. Тогда:
1) оператор $l_p : \text{Dom } l \cap \text{Ker } p \rightarrow \text{Im } l$, заданный как $l_p(x) = l(x)$ для всех $x \in \text{Dom } l \cap \text{Ker } p$, является линейным изоморфизмом;

2) оператор $k_p : \text{Im } l \rightarrow \text{Dom } l \cap \text{Ker } p$, заданный как $k_p = l_p^{-1}$, удовлетворяет соотношению $k_p \circ l(x) = x - p(x)$ для всех $x \in \text{Dom } l$.

Определение 2.8. Линейный оператор $l : \text{Dom } l \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если $\text{ker } l$ и $\text{Coker } l = E_2 / \text{Im } l$ конечномерны и $\text{Dim } \text{Ker } l = \text{Dim } \text{Coker } l$.

Теорема 2.2. Пусть $l : \text{Dom } l \rightarrow E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\text{Im } l \subset E_2$ – замкнутое множество. Тогда

i) существуют линейные непрерывные операторы проектирования $p : E_1 \rightarrow E_2, q : E_2 \rightarrow E_2$ такие, что $\text{Im } p = \text{Ker } l$ и $\text{Im } l = \text{Ker } q$;

ii) канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \rightarrow E_2 / \text{Im } l$, заданный как $\pi(y) = y + \text{Im } l$, является непрерывным линейным оператором;

iii) существует непрерывный линейный изоморфизм $\phi : \text{Coker } l \rightarrow \text{Ker } l$;

iv) уравнение $l(x) = y, y \in E_2$, является эквивалентным уравнению $(i - p)x = (\phi \circ \pi + k_{p,q})(y)$, где i – тождественный оператор в E_1 , а оператор $k_{p,q} : E_2 \rightarrow E_1$ задан соотношением $k_{p,q}(y) = k_p(y - q(y))$.

Пусть U – открытое ограниченное подмножество E_1 .

Определение 2.9. Пн. св. мультиотображение $F : \overline{U} \rightarrow K(E_1)$ называется l -компактным, если композиция $(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ F : \overline{U} \rightarrow K(E_1)$ является компактным мультиотображением.

Замечание 2.1. Приведенное выше определение l -компактного мультиотображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p : E_1 \rightarrow E_2$ и $q : E_2 \rightarrow E_1$, а также изоморфизма $\phi : \text{Coker } l \rightarrow \text{Ker } l$.

Приведем некоторые сведения из теории случайных многозначных отображений и случайной топологической степени (см., например, [11]).

Пусть (Ω, Σ) – измеримое пространство, X, Y – сепарабельные метрические пространства. Пусть $\mathbb{B}(X)$ – σ -алгебра всех борелевских подмножеств пространства X и $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ -алгебра, содержащая множества вида $A \times B$, где $A \in \Sigma, B \in \mathbb{B}(X)$.

Определение 2.10. *Отображение $f: \Omega \times X \rightarrow Y$ называется случайным оператором, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$. Если, кроме того, $f(\omega, \cdot): X \rightarrow Y$ непрерывно для всех $\omega \in \Omega$, то f называется случайным s -оператором.*

Определение 2.11. *Мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ называется случайным мультиоператором, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$. Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}$ называется случайным u -мультиоператором.*

Определение 2.12. Пусть $A \subset Y$ – замкнутое подмножество и $\mathcal{F}: \Omega \times A \rightarrow P(Y)$ – случайный мультиоператор. Случайной неподвижной точкой ξ мультиоператора $\mathcal{F}$ называется измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow A$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Теорема 2.3. Пусть Y – сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{F}: \Omega \times Y \rightarrow C(Y)$ – случайный u -мультиоператор. Если для каждого $\omega \in \Omega$ множество $\text{Fix } \mathcal{F}_\omega := \{x \in Y: x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$ неподвижных точек мультиоператора $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}(\omega, \cdot)$ непусто и замкнуто, то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Определение 2.13. Мультиоператор $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ называется случайным компактным u -мультиоператором, если он является случайным u -мультиоператором и для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow K(Y)$ является компактным.

Пусть Y – сепарабельное банахово пространство, $U \subset Y$ – открытое ограниченное подмножество и $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Kv(Y)$ – случайный компактный u -мультиоператор такой, что $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in \partial U$ и для всех $\omega \in \Omega$, где ∂U обозначает границу множества U . Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень соответствующего многозначного векторного поля $\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U})$ корректно определена (см., например, [4], [5]). Случайная топологическая степень многозначного векторного поля $i - \mathcal{F}$ на $\bar{U}$ определяется следующим образом:

$$D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) := \left\{ \deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \mid \omega \in \Omega \right\}.$$

Если топологическая степень $\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \neq 0$ для каждого $\omega \in \Omega$, то полагаем по определению, что случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$.

Из свойств топологической степени многозначных отображений и Теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. Если случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$, то мультиоператор $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку в U , т. е., существует измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow U$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть X, Y – сепарабельные банаховы пространства, $U \subset Y$ – открытое ограниченное подмножество, $l: \text{Dom } l \subseteq X \rightarrow Y$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и случайный мультиоператор $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Cv(Y)$ удовлетворяет условиям:

- i) для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является l -компактным мультиотображением;
- ii) для всех $x \in \partial U \cap \text{Dom } l$ и $\omega \in \Omega$ имеем $lx \notin \mathcal{F}(\omega, x)$.

Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень совпадения пары $(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ определяется как

$$\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) := \deg(\Phi(\omega, \cdot), \bar{U}), \text{ где}$$

$$\Phi(\omega, x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ \mathcal{F}(\omega, x).$$

Случайная топологическая степень совпадения пары $(l, \mathcal{F})$ определяется следующим образом:

$$\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \bar{U}) := \{ \deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \mid \omega \in \Omega \}.$$

Говорят, что случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \bar{U})$ пары $(l, \mathcal{F})$ отлична от нуля, если топологическая степень совпадения $\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определенная таким образом случайная топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами степени совпадения. В частности, справедлив следующий общий принцип.

Теорема 2.5. Если случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$, то существует случайная точка совпадения для данной пары $(l, \mathcal{F})$, т. е. измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow U$ такая, что $l\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Приведем пример реализации общего принципа.

Теорема 2.6. Пусть $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Kv(E_2)$ – случайный u -мультиоператор. Предположим, что мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ – l -компактно при каждом $\omega \in \Omega$ и выполнены следующие условия:

- i) $lx \notin \lambda \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $\lambda \in (0, 1), x \in \text{Dom } l \cap \partial U, \omega \in \Omega$;

ii) $0 \notin \pi \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in \text{Ker} l \cap \partial U$, $\omega \in \Omega$;

iii) $\deg_{\text{Ker} l}(\phi \pi \mathcal{F}(\omega, \cdot)|_{\overline{U_{\text{Ker} l}}, \overline{U_{\text{Ker} l}}}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Тогда случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, U) \neq 0$, и, следовательно, существует случайная точка совпадения пары $(l, \mathcal{F})$.

Приведем некоторые сведения из негладкого анализа (см. ([12])).

Определение 2.14. Пусть $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – локально липшицева функция. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная Кларка $V^0(x_0; v)$ функции V в точке x_0 по направлению v определяется как

$$V^0(x_0; v) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0} \frac{V(x + tv) - V(x)}{t}, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial V(x)$ функции V в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом: $\partial V(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle \leq V^0(x_0; v) \text{ для всех } v \in \mathbb{R}^n\}$.

Определение 2.15. Локально липшицева функция $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x_0, v)$, равная обобщенной производной Кларка $V^0(x_0, v)$.

Известно, что выпуклые функции являются регулярными.

Лемма 2.1. (см., например, [13]) Пусть $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – регулярная функция, $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $V(x(t))$ также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s), x'(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Определение 2.16. Отображение $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайным негладким потенциалом, если справедливы следующие условия:

(i) для любого $\omega \in \Omega$ $V(\omega, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – регулярная функция;

(ii) $V(\cdot, x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измеримо для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем следующее утверждение, являющееся развитием понятия, введенного в [5], [14].

Определение 2.17. Случайный негладкий потенциал $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайным негладким невырожденным потенциалом, если существует $R_0 > 0$ такое, что $0 \notin \partial V(\omega, x)$ для всех $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n: |x| \geq R_0$.

Из определения следует, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ топологическая степень $\deg(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$ корректно определена для всех $R \geq R_0$ и совпадает с $\deg(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

Под случайным топологическим индексом $\text{Ind} V$ случайного негладкого невырожденного потенциала V понимается случайная топологическая степень $\text{Deg}(\partial V, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

3. Основной результат. Для $\tau > 0$ обозначим символом C пространство $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x: [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in [- \tau, 0]} \|x(t)\|$ и пусть $I = [0, T]$, $T > 0$. Для функции $x(\cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$ и $t \in [0, T]$ символом $x_t \in C$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [- \tau, 0]$.

Обозначим C_T пространство непрерывных T -периодических функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2 , $\|x\|_2 = \left(\int_0^T \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

Будем рассматривать следующую периодическую задачу:

$$x'(\omega, t) \in \varphi(\omega, t, x_t) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \quad (2)$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3)$$

где отображение $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ и мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ T -периодичны по второму аргументу:

$$\varphi(\omega, t, \phi) = \varphi(\omega, t + T, \phi) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \phi \in C;$$

$$\mathcal{F}(\omega, t, \phi) = \mathcal{F}(\omega, t + T, \phi) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \phi \in C.$$

Это условие означает, что отображение φ и мультиотображение $\mathcal{F}$ можно рассматривать на $\Omega \times I \times C$, где $I := [0, T]$ снабжено мерой Лебега.

Полагаем также, что выполнены следующие условия:

$\varphi 1)$ $\varphi: \Omega \times I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ – случайное s -отображение;

$\mathcal{F} 1)$ $\mathcal{F}: \Omega \times I \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ – случайный u -мультиоператор;

$\mathcal{F}2)$ существует функция $k : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $k(\omega, \cdot)$ является L^2 -интегрируемой функцией для любого $\omega \in \Omega$, отображение $k(\cdot, t)$ измеримо для п. в. $t \in I$, и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \phi)\| := \sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \phi)\} \leq k(\omega, t)(1 + \|\phi\|) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, \quad t \in I \quad \text{и } \phi \in C.$$

Из условий $(\mathcal{F}1)$ и $(\mathcal{F}2)$ следует, что мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C_T \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in F(\omega, s, x_s) \quad \text{п. в. } s \in I\}$$

корректно определен. Обозначим $\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2 := \sup\{\|f\|_2 : f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\}$. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [4]).

Согласно $(\varphi 1)$ можно определить мультиоператор суперпозиции $\mathfrak{P} : \Omega \times C_T \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$, соответствующий включению (2), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(\omega, x) &= \{h \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : \\ h(s) &= \varphi(\omega, s, x_s) + f(s) \quad \text{п. в. } s \in I \text{ для некоторого } f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\}. \end{aligned}$$

Из свойств мультиотображений (см, например, [4], [5], [6] и Предложения 2.57 [7]), следует, что правая часть включения (2) – случайное u -мультиотображение. Тогда мультиотображение $\mathfrak{P}$ измеримо (см. [15]). Более того, для любого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathfrak{P}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [4], [5], [6]).

Определение 3.1. Случайный негладкий потенциал $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2), если найдется $N > 0$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$ и для всех абсолютно непрерывных $x \in C_T$ с $\|x\|_2 \geq N$ имеем

$$\int_0^T \langle g_\omega(s), h_\omega(s) \rangle ds > 0$$

для всех суммируемых сечений $h_\omega \in \mathfrak{P}(\omega, x)$ и $g_\omega \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x)$, где $\mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x) = \{v \in L_T^2 : v(t) \in \partial G(\omega, x(t)) \text{ п. в. } t \in [0, T]\}$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – случайный негладкий невырожденный потенциал с ненулевым случайным топологическим индексом и выполнены условия:

1) существуют константы $\epsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geq 1$ такие, что:

$$\|\tilde{g}_\omega\| \geq \epsilon \|\tilde{x}\|^\beta - K \quad \text{и} \quad \langle \varphi(\omega, s, \tilde{x}_s), \tilde{g}_\omega \rangle \geq \epsilon \|\tilde{g}_\omega\|^2,$$

для всех $\omega \in \Omega$, $s \in I$, $\tilde{x} \in C_T$ и $\tilde{g}_\omega \in \partial \mathcal{G}(\omega, \tilde{x}(s))$;

2) для всех $\omega \in \Omega$ и абсолютно непрерывных функций $x \in C_T$ имеем

$$\limsup_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2} < \epsilon^2 T^{(1-\beta)/2}.$$

Тогда задача (2), (3) имеет случайное решение.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{G}$ – случайная негладкая строгой интегральная направляющая функция для включения (2).

Для любой абсолютно непрерывной функции $x_\omega = x(\omega, \cdot) \in C_T$ и $g_\omega(\cdot) \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x_\omega)$ первое предположение гарантирует выполнение оценки

$$\epsilon \|x_\omega(t)\|^\beta \leq \|g_\omega(t)\| + K, \quad \forall t \in T.$$

Следовательно,

$$\epsilon \left\| \|x_\omega(\cdot)\|^\beta \right\|_2 \leq \left\| \|g_\omega(\cdot)\| + K \right\|_2 \leq \|g_\omega(\cdot)\|_2 + \|K\|_2 = \|g_\omega(\cdot)\|_2 + K\sqrt{T}.$$

Отношение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает следующую оценку:

$$\|g_\omega\|_2 \geq \epsilon \|x_\omega\|_{2\beta}^\beta - K\sqrt{T} \geq \epsilon T^{(1-\beta)/2} \|x_\omega\|_2^\beta - K\sqrt{T}.$$

Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Тогда для любых $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_\omega)$ и $g_\omega \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x_\omega)$ имеем

$$\int_0^T \langle g_\omega(s), \varphi(\omega, s, x_{\omega s}) + f_\omega(s) \rangle ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \langle \varphi(\omega, s, x_{\omega s}), g_{\omega}(s) \rangle ds + \int_0^T \langle g_{\omega}(s), f_{\omega}(s) \rangle ds \geq \\
&\geq \|g_{\omega}\|_2 (\varepsilon \|g_{\omega}\|_2 - \|f_{\omega}\|_2) \geq \|g_{\omega}\|_2 (\varepsilon \|g_{\omega}\|_2 - \|\mathcal{P}_F(\omega, x_{\omega})\|_2) \geq \\
&\geq \|g_{\omega}\|_2 \left(\varepsilon^2 T^{(1-\beta)/2} - \varepsilon \frac{K\sqrt{T}}{\|x_{\omega}\|_2^{\beta}} - \frac{\|\mathcal{P}_F(\omega, x_{\omega})\|_2}{\|x_{\omega}\|_2^{\beta}} \right) \|x_{\omega}\|_2^{\beta} > 0,
\end{aligned}$$

если $\|x_{\omega}\|_2 \geq N$ для достаточно большого N . Следовательно, $\mathcal{G}$ является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2).

Теперь рассмотрим линейный оператор

$$l(x) = x'$$

$l: \text{Dom } l = \{x \in C_T : x \text{ - абсолютно непрерывно} \} \subset C_T \rightarrow L_T^1$ и мультиоператор суперпозиции

$$\mathfrak{P}: \Omega \times C_T \rightarrow \mathcal{P}(L_T^1).$$

Очевидно, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\text{Ker } l = \mathbb{R}^n$. Канонический проекционный оператор $\Pi: L_T^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\Pi f = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Заметим, что для произвольного фиксированного $\omega \in \Omega$ решение $x_{\omega} \in \text{Dom } l$ включения $l(x) \in \lambda \mathfrak{P}(\omega, x)$, $\lambda \in (0, 1)$, удовлетворяют отношению

$$x'_{\omega}(s) = \lambda h_{\omega}(s) \quad \text{п.в. } s \in [0, T], \quad (4)$$

$$x_{\omega}(0) = x_{\omega}(T), \quad (5)$$

где $h_{\omega} \in \mathfrak{P}(\omega, x)$.

Применяя Лемму 2.1 и определение обобщенного градиента Кларка, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle g_{\omega}(s), h_{\omega}(s) \rangle ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^T \langle g_{\omega}(s), x'_{\omega}(s) \rangle ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^T \mathcal{G}^0(\omega, x'_{\omega}(s)) ds = \frac{1}{\lambda} (\mathcal{G}(\omega, x_{\omega}(T)) - \mathcal{G}(\omega, x_{\omega}(0))) = 0,
\end{aligned}$$

для каждого суммируемого сечения $g_{\omega} \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x_{\omega})$. Отсюда получаем

$$\|x_{\omega}\|_2 < N.$$

Из условий (φ1) и (F2) следует, что $\|x'_{\omega}\|_2 < M$, где $M > 0$. Но тогда существует $M' > 0$ такое, что

$$\|x_{\omega}\|_{\infty} < M'.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ с центром в 0 и радиусом $r = \max\{N, M', NT^{-1/2}\}$. Тогда для любого фиксированного $\omega \in \Omega$ имеем

$$l(x_{\omega}) \notin \lambda \mathfrak{P}(\omega, x_{\omega}), \quad \forall x_{\omega} \in \partial U, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \text{ker } l$ произвольно. Поскольку u почти везде постоянно и $\|u\|_{\infty} \geq NT^{-1/2}$, имеем $\|u\|_2 \geq N$. Из определения случайной негладкой строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle g_{\omega}(s), h_{\omega}(s) \rangle ds > 0$$

для всех измеримых сечений $g_{\omega} \in \mathfrak{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, u)$ и $h_{\omega} \in \mathfrak{P}(\omega, u)$, для всех $\omega \in \Omega$.

Но для каждого $\omega \in \Omega$, выбирая постоянный набор $g_\omega(s) \equiv \tilde{g}_\omega \in \partial\mathcal{G}(\omega, u)$, получим

$$0 < \int_0^T \langle \tilde{g}_\omega, h_\omega(s) \rangle ds = \langle \tilde{g}_\omega, \int_0^T h_\omega(s) ds \rangle = T \langle \tilde{g}_\omega, \Pi h_\omega \rangle,$$

и поэтому

$$\langle \tilde{g}_\omega, y_\omega \rangle > 0$$

для всех $\tilde{g}_\omega \in \partial\mathcal{G}(\omega, u)$, $y_\omega \in \Pi\mathfrak{P}(\omega, u)$ и $\omega \in \Omega$. Это означает, что мультиотображения $\partial\mathcal{G}(\omega, u)$ и $\Pi\mathfrak{P}(\omega, u)$ гомотопны на $\partial U \cap \ker l$ для любого $\omega \in \Omega$ и, следовательно,

$$\deg_{\ker l}(\Pi\mathfrak{P}(\omega, \cdot))|_{\overline{U}_{\ker l}}, \overline{U}_{\ker l} = \deg(\partial\mathcal{G}(\omega, \cdot), \overline{U}_{\ker l}) \neq 0 \text{ для всех } \omega \in \Omega,$$

где $\overline{U}_{\ker l} = \overline{U} \cap \ker l$. Теперь легко видеть, что все условия Теоремы 2.6 выполнены и задача (2), (3) имеет случайное решение.

4. Заключение. В данной работе метод случайных негладких интегральных направляющих функций применен для исследования периодической задачи для случайного функционально-дифференциального включения с возмущенной правой частью, представленной в виде суммы случайного полунепрерывного сверху мультиотображения и случайного непрерывного по совокупности переменных отображения. Сформулирована и доказана теорема о существовании случайных периодических решений такого типа функционально-дифференциальных включений.

Список литературы

1. Красносельский А.М., Перов А.И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН СССР; 1958;123(2):235-238.
2. Красносельский А.М. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966;332.
3. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 1985;169:194-252.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Либроком; 2011. 226 с.
5. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006.
6. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
7. Obukhovskii V., Gel'man B. Multivalued Maps and Differential Inclusions: Elements of Theory and Applications *Elements of Theory and Applications*. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ. 2020. DOI:10.1007/978-3-642-37070-0_1
8. Корнев С.В., Обуховский В.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений. *Труды математического факультета*. 2004;56-74.
9. Prusko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.* 1981;5(9):959-970.
10. Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979;40:122.
11. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337-358.
12. Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA; 1990.
13. Корнев С.В., Обуховский В.В., Дзекка П. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(10):1335-1335.
14. Корнев С.В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях *Автоматика и телемеханика*. 2015;(9):31-43.
15. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory. Dordrecht: Springer; 1997. 968 p.

References

1. Krasnosel'skii AM., Perov AI. On a Principle of the Existence of Bounded, Periodic, and Almost-Periodic Solutions to Systems of Ordinary Differential Equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR; 1958; 123(2): 235–238. (In Russ.)
2. Krasnosel'skii AM. The Shift Operator along the Trajectories of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1966;332. (In Russ.)

3. Blagodatskikh VI., Filippov AF. Differential inclusions and optimal control *Tr. Steklov Mathematical Institute of the USSR*. 1985;169:194–252. (In Russ.)
4. Borisovich YuG., Gelman BD., Myshkis AD., Obukhovskii VV. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. M.: Librokom; 2011;224. (In Russ.)
5. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006.
6. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
7. Obukhovskii V. Gel'man B. Multivalued Maps and Differential Inclusions: Elements of Theory and Applications *Elements of Theory and Applications*. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ. 2020. DOI: 10.1007/978-3-642-37070-0_1
8. Kornev SV., Obukhovskii VV. On some variants of the theory of topological degree for convex-valued multimaps *Transactions of the Faculty of Mathematics. Ser. "New series". Voronezh State University*. 2004;56–74. (In Russ.)
9. Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.* 1981;5(9):959-970.
10. Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979;40:122.
11. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337-358.
12. Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA; 1990.
13. Kornev SV., Obukhovskii VV., Zecca P. The method of generalized integral guiding function in the problem of the existence of periodic solutions of functional-differential inclusions *Differential Equations*. 2016;52(10):1335-1335. (In Russ.)
14. Kornev SV. Nonsmooth integral guiding functions in problems of forced oscillations *Automation and Telemekhanics*. 2015;(9):31-43. (In Russ.)
15. Hu S., Papageorgiou NS. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory. Dordrecht: Springer; 1997. 968 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.05.2026

Поступила после рецензирования 07.07.2026

Принята к публикации 11.07.2026

Received May 15, 2026

Revised July 7, 2026

Accepted July 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Корнев Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Обуховский Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Гетманова Екатерина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Афонина Светлана Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey V. Kornev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Valeri V. Obukhovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Ekaterina N. Getmanova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Svetlana N. Afonina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

К содержанию