Прикладная математика & Физика, 2025, том 57, № 1. С. 5–10.
Applied Mathematics & Physics, 2025, Volume 57, No 1. P. 5–10.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.9, 519.6
MSC 35K20, 35K58, 35K59
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-5-10

Критерий однозначной разрешимости спектральной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе

Алдашев С. А.,
(*Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым*)
Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки,
Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Пушкина, 125
aldash51@mail.ru

Аннотация. Многомерные гиперболо-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерным волновым уравнением. Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа. Так, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лавреньтева – Бицадзе. Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена, а их многомерные аналоги интенсивно исследуются. Двумерные спектральные задачи для уравнений гиперболо-эллиптического типа достаточно хорошо изучены, однако их многомерные аналоги исследованы мало. В данной работе рассматривается спектральная смешанная задача для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе и устанавливается ее критерий однозначной разрешимости. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этой задачи.

Ключевые слова: критерий, спектральная смешанная задача, собственные значения, собственные функции, сферические функции

Для цитирования: Алдашев С. А. 2025. Критерий однозначной разрешимости спектральной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 5–10. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-5-10

Original Research

Criterion for Unique Solvability of the Spectral Mixed Problem for the Multidimensional Lavrentiev – Bitsadze Equation

Serik A. Aldashev,
(*Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov*)
Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Ministry of Education and Science,
125 Pushkina St., Almaty 050010, Kazakhstan
aldash51@mail.ru

Abstract. Multidimensional hyperbolic-elliptic equations describe important physical, astronomical, and geometric processes. It is known that vibrations of elastic membranes in space according to Hamilton's principle can be modeled by a multidimensional wave equation. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, we also obtain the multidimensional Laplace equation from Hamilton's principle. Thus, vibrations of elastic membranes in space can be modeled as a multidimensional Lavrent'ev-Bitsadze equation. The theory of boundary value problems for hyperbolic-elliptic equations on a plane is well-explored, and their multidimensional analogues are intensively analyzed. Two-dimensional spectral problems for equations of hyperbolic-elliptic type have been well researched, but their multidimensional analogues have been relatively under-studied. In this paper, we consider the spectral mixed problem for the multidimensional Lavrent'ev-Bitsadze equation and establish a criterion for its unique solvability. We also determine the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of this problem.

Keywords: Criterion, Spectral Mixed Problem, Eigenvalues, Eigenfunctions, Spherical Functions

For citation: Aldashev S. A. 2025. Criterion for Unique Solvability of the Spectral Mixed Problem for the Multidimensional Lavrentiev – Bitsadze Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 5–10. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-5-10

---

1. Введение. Многомерные гинерболо-эллинтические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t)$, $x = (x_1, ..., x_m)$, $m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному гиперболическому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе [1, 2].

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена, а их многомерные аналоги интенсивно исследуются (см. например, монографии [2, 3] и приведенную в них библиографию).

Двумерные спектральные задачи для уравнений гиперболо-эллиптического типа изучены в [4, 5, 6, 7, 8, 9], однако, насколько известно автору, их многомерные аналоги мало исследованы [10, 11, 12, 13].

В данной работе рассматривается спектральная смешанная задача для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе и устанавливается ее критерий однозначной разрешимости. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этой задачи.

2. Постановка задачи и результат. Пусть Ω_α– конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная при $t > 0$ сферической поверхностью $\sigma : |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = \alpha < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω_α^- части области Ω_α, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S – общую часть границ Ω^+, Ω_α^-, представляющих собой множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m.

Пусть, далее, Γ_α есть часть цилиндра Γ, ограничивающая область Ω_α^-.

В области Ω_α рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева – Бицадзе со спектральным действительным параметром μ:

$$\Delta_x u + (sgnt)u_{tt} = \mu u, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geq 2$.

Рассмотрим спектральную смешанную задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\alpha^-)$, удовлетворяющее краевому условию

$$u\Big|_\sigma = 0,\ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m$, t к сферическим

$$r, \quad \theta_1, ..., \theta_{m-1}, \quad t, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 2, ..., \quad m-1, \quad \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1}).$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$– система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача 1 однозначно разрешима тогда и только тогда, когда* $\mu \neq -\gamma_s^2$.

Следствие. *Задача 1 имеет собственные значения* $\mu = -\gamma_s^2$ *и соответствующие им собственные функции. Здесь* γ_s– *положительные нули функции Бесселя первого рода* $J_s(z)$ *целого порядка* $s \geq \frac{m+1}{2}$.

3. Доказательство теоремы. Искомое решение задачи 1 в сферических координатах в области Ω^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ – функции, подлежащие определению.

Тогда, как показано в [13], функция (3) представляется следующим образом

$$u_\mu(r,\theta,t) = \begin{cases} 0,\ \mu \neq -\gamma_s^2,\ s = 0, 1, ... \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{k_n} \sum\limits_{s=p}^{\infty} n^{-l} J_s(\sqrt{-\mu(r^2+t^2)})(r^2+t^2)^{\frac{n}{2}+\frac{(m-3)}{4}} r^{2-m-n} \end{cases}$$

$$\left[F\left(-\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} + \frac{s}{2},\ -\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} - \frac{s}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{t^2}{r^2+t^2}\right) - \right.$$

$$-\frac{2\Gamma\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} + \frac{s}{2}\right)} t(r^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left. F\left(-\frac{n}{2} + \frac{5-m}{4} + \frac{s}{2},\ -\frac{n}{2} + \frac{5-m}{4} - \frac{s}{2},\ \frac{3}{2};\ \frac{t^2}{r^2+t^2}\right)\right] Y_{n,m}^k(\theta),\ \mu = -\gamma_s^2. \tag{4}$$

При этом она принадлежит классу

$$C(\bar{\Omega}^{+}) \cap C^{1}(\Omega^{+} \cup S) \cap C^{2}(\Omega^{+}), \quad \text{если} \quad p \geq \frac{m+1}{2}, l > \frac{3m}{2},$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, а $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Из (4) при $t \longrightarrow +0$ будет иметь

$$u_{\mu}(r,\theta,0) = \tau_{\mu}(r,\theta) = \begin{cases} 0, \ \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sum\limits_{s=p}^{\infty} n^{-l} r^{(1-m)/2} J_s(\sqrt{-\mu} r) Y_{n,m}^k(\theta), \ \mu = -\gamma_s^2. \end{cases} \tag{5}$$

$$u_{\mu t}(r,\theta,0) = \nu_{\mu}(r,\theta) = \begin{cases} 0, \ \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sum\limits_{s=p}^{\infty} n^{-l} r^{-(3+m)/2} J_s(\sqrt{-\mu} r) Y_{n,m}^k(\theta), \ \mu = -\gamma_s^2. \end{cases}$$

Таким образом, из (5) следует, что задача 1 сводится к смешанной задаче в области Ω_{α}^{-} для гиперболического уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = \mu u, \tag{6}$$

с условием

$$u\big|_S = \tau_{\mu}(r,\theta), \ \ u_t\big|_S = \nu_{\mu}(r,\theta), \ u\big|_{\Gamma_{\alpha}} = 0. \tag{7}$$

Пусть $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t)$, а $\bar{\tau}_{\mu,n}^k(r)$, $\bar{\nu}_{\mu,n}^k(r)$ – коэффициенты разложения ряда (3) функции $\tau_{\mu}(r,\theta)$, $\nu_{\mu}(r,\theta)$ по сферическим функциям

$$Y_{n,m}^k(\theta), \quad \lambda_n = n(n+m-2), \quad \overline{\lambda_n} = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}.$$

Решение задачи (6), (7) будем искать в виде (3). Подставляя (3) в (6), получим

$$u_{nrr}^k - u_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \mu u_n^k = 0, k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

При этом краевые условия (7) имеют вид

$$u_n^k(r,0) = \tau_{\mu,n}^k(r) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum\limits_{s=p}^{\infty} n^{-l} J_s(\sqrt{-\mu} r), & \mu = -\gamma_s^2. \end{cases}$$

$$u_{nt}^k(r,0) = \nu_{\mu,n}^k(r) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum\limits_{s=p}^{\infty} n^{-1} r^{-1} J_s(\sqrt{-\mu} r), & \mu = -\gamma_s^2. \end{cases} \tag{9}$$

$$u_n^k(r,\alpha) = 0. \tag{10}$$

Решение задачи (8) – (10) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r) T_l(t), \tag{11}$$

при этом пусть

$$\tau_{\mu,n}^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{n,l}^k R_l(r), \quad \nu_{\mu,n}^k = \sum_{l=1}^{\infty} b_{n,l}^k R_l(r). \tag{12}$$

Подставляя (11) в (8) – (10), с учетом (12), получим

$$R_{lrr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_l + (\gamma - \mu) R_l = 0, \ \ 0 < r < 1, \ R_s(1) = 0, \ |R_s(0)| < \infty. \tag{13}$$

$$T_{ltt} + \gamma T_l(t) = 0, \ \ \alpha < t < 0, \ \ T_l(0) = a_{e,n}^k, \ \ T_{l,t}(0) = b_{l,n}^k. \tag{14}$$

Ограниченным решением задачи (13) является функция [14]

$$R_l(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{l,n} r), \ \ 0 < r < 1, \tag{15}$$

$\nu = n + \frac{m-2}{2}$, $\mu_{l,n}$ – нули функции Бесселя $J_{\nu}(z)$, $\gamma = \mu + \mu_{l,n}^2$.

Подставляя (15) в (12), получим ряды

$$r^{-\frac{1}{2}}\tau^k_{\mu,n}(r)=\sum_{l=1}^{\infty}a^k_{l,n}J_\nu(\mu_{l,n}r),\, r^{-\frac{1}{2}}\nu^k_{\mu,n}(r)=\sum_{l=1}^{\infty}b^k_{l,n}J_\nu(\mu_{l,n}r),\ 0<r<1,$$

которые являются рядами Фурье – Бесселя [15], если

$$a^k_{l,n}=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tau^k_{\mu,n}(\xi)J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi,$$

$$b^k_{l,n}=2\left[J_{\nu+1}(\mu_{l,n})\right]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\nu^k_{\mu,n}(\xi)J_\nu(\mu_{l,n}\xi)d\xi, \tag{16}$$

где $\mu_{l,n}$ – положительные нули функции Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Далее, произведя замену $V_l(t)=T_l(t)-a^k_{l,n}-tb^k_{l,n}$, задачу (14) приведем к следующей задаче:

$$V_{l\,tt}+\gamma V_l(t)=g^k_{l,n}(t),\ \ V_l(0)=0,\ \ V_{lt}(0)=0, \tag{17}$$

$$g^k_{l,n}(t)=-\gamma(a^k_{l,n}+tb^k_{l,n}). \tag{18}$$

Задача (17), (18) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $V_l(t)$ [2]

$$V_l(t)+\gamma\int_0^t(t-\xi)V_l(\xi)d\xi=\int_0^t(t-\xi)g^k_{l,n}(\xi)d\xi, \tag{19}$$

которое имеет решение, и притом единственное.

Следовательно, из (11), (15), (19) следует, что решением задачи (6), (7) в области Ω^-_α является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{r}\left[a^k_{l,n}+tb^k_{l,n}+V_l(t)\right]J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{l,n}r)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{20}$$

где $a^k_{l,n}$, $b^k_{l,n}$ определяются из (16).

Аналогично, как в [16], можно показать, что решение (20) принадлежит классу

$$C(\bar{\Omega}^-_\alpha)\cap C^1(\Omega^-_\alpha\cup S)\cap C^2(\Omega^-_\alpha).$$

Таким образом, решение задачи 1 записывается в виде (4) и (20), при этом из класса

$$C(\bar{\Omega}_\alpha)\cap C^1(\Omega_\alpha)\cap C^2(\Omega^+\cup\Omega^-_\alpha).$$

При $\mu\neq-\gamma_s^2$ из представления решении (4), (20), а также из формул (9), (16) вытекает, что решение задачи 1 тривиальное.

Пусть теперь решение задачи 1 $u(r,\theta,t)\equiv0$. Покажем, что $\mu\neq-\gamma_s^2$.

Предположим противное, т. е. $\mu=-\gamma_s^2$. Если $\mu=-\gamma_s^2$, то из видов решений (4), (20) следует, что задача 1 имеет ненулевые решения. Приходим к противоречию.

Теорема установлена. Ее следствие вытекает из вышеприведенных фактов.

Отметим, что доказанная теорема анонсирована в [17].

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука. 1966.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука. 1981.
3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М., Наука. 2006.
4. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., Изд.-во МГУ. 1988.
5. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и их спектре для уравнений гиперболического и смешанного типа. Автореф. дисс. док. физ.-мат. наук. М., МГУ. 1982.
6. Пономарев С.М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. ДАН СССР. 1977; 233, 39–40.
7. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром, Ташкент, ФАН. 1977.
8. Сабитов К.Б. О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральным параметром. *Дифференциальные уравнения.* 1986; 22(11): 1977–1984.

9. Пономарев С.М. Некоторые теоремы единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. *Дифференциальные уравнения.* 2021: 57(4): 488–495.
10. Моисеев Е.И., Нефедов П.Х., Холомеева А.А. Аналоги задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. *Дифференциальные уравнения.* 2014; 50(12): 1672–1675.
11. Алдашев С.А. Спектральная задача Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. *Известия НАН РК, серия "Физико-математические науки".* 2010, 6: 3–6.
12. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. *Известия ВУЗов, математика.* 2011; 4: 3–7.
13. Алдашев С.А. Собственные значения и собственные функции задач Геллерстедта для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. *Украинский математический журнал.* 2011; 63(6): 827–832.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука. 1965.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М., Наука. 1974.
16. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. *Украинский математический журнал.* 2017; 69(7): 992–999.
17. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Мат-лы науч. конф. «Уфимская осенняя математическая школа», ч.2, Уфа, 8–9. 2020.

References

1. Tikhonov AN, Samarskiy AA. Uravneniya matematicheskoy fiziki. [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka. 1966.
2. Bitsadze AV. Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh. [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka. 1981.
3. Nakhushev AM. Zadachi so smeshcheniem dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh. [Shift problems for partial differential equations.] Moscow, Nauka. 2006.
4. Moiseev EI. Uravneniya smeshannogo tipa so spektralnym parametrom. [Mixed type equations with a spectral parameter.] Moscow, MGU. 1988.
5. Kalmenov TSh. O regulyarnykh kraevykh zadachakh i ikh spektre dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipa. [On regular boundary value problems and their spectrum for equations of hyperbolic and mixed type.] Avtoref. diss. dok. fiz.-mat. nauk. Moscow, MGU. 1982.
6. Ponomarev SM. K zadache na sobstvennye znacheniya dlya uravneniya Lavrenteva – Bitsadze. [On the eigenvalue problem for the Lavrentiev – Bitsadze equation.] DAN SSSR. 1977; 233, 39–40.
7. Salakhitdinov MS, Urinov AK. Kraevye zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom. [Boundary value problems for a mixed-type equation with a spectral parameter.] Tashkent, FAN. 1977.
8. Sabitov KB. O zadache Trikomi dlya uravneniya Lavrent'eva-Bitsadze so spektral'nym parametrom. [On the Tricomi problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation with a spectral parameter.] *Differential equations.* 1986; 22(11): 1977–1984.
9. Ponomarev SM. Nekotorye teoremy edinstvennosti resheniya zadachi Gellerstedta dlya uravneniya Lavrent'eva-Bitsadze. [Some theorems on the uniqueness of the solution of the Gallerstedt problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation.] *Dıfferentsialnye uravneniya.* [*Dıfferential equations*]. 2021; 57(4): 488–495.
10. Moiseev EI., Nefedov PKh., Kholomeeva A.A. Analogues of the Tricomi and Frankl problems in three-dimensional domains for the Lavrentiev-Bitsadze equation. *Dıfferentsialnye uravneniya.* [*Differential equations*]. 2014; 50(12): 1672–1675.
11. Aldashev SA. Spektral'naya zadacha Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze. [Spectral problem of Dirikhle in the tsilindricheskoy region for multidimensional equation Lavrenteva – Bitsadze.] *Izvestiya NAN RK, seria "Fiziko-matematicheskie nauki".* 2010; 6: 3–6.
12. Aldashev SA. Kriteriy odnoznachnoy razreshimosti spektral'noy zadachi Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo uravneniya Lavrent'eva – Bitsadze. [A criterion for the unique solvability of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation.] *Izvestiya VUZov, matematika.* 2011; 4: 3–7.
13. Aldashev SA. Eigenvalues and eigenfunctions of the Gellerstedt problems for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal.* [*Ukrainian mathematical journal*]. 2011; 63(6): 827–832.
14. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam. [Handbook of ordinary differential equations.] Moscow: Nauka; 1965.
15. Beytmen G, Erdeyi A. Vysshie transtsendentnye funktsii. [Higher transcendental functions]. Vol. 2. Moscow: Nauka; 1974.
16. Aldashev SA. Well-posedness of a mixed problem for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal.* [*Ukrainian mathematical journal*]. 2017; 69(7): 992–999.
17. Aldashev SA. Kriteriy odnoznachnoy razreshimosti spektral'noy zadachi dlya mnogomernogo uravneniya Lavrent'eva-Bitsadze. [A criterion for the unique solvability of the spectral problem for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation.] *Proc. sci. conf "Ufa Autumn Mathematical School"*, part 2, Ufa, 8–9. 2020.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.06.2024
Поступила после рецензирования 02.12.2024
Принята к публикации 10.12.2024

Received June 1, 2024
Revised December 2, 2024
Accepted December 10, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Алдашев Серик Аймурзаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки, г. Алматы, Казахстан

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Serik A. Aldashev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Ministry of Education and Science, Almaty, Kazakhstan

К содержанию