Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 4. С. 245–260.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 4. P. 245–260.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.926.4 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-245-260
MSC 34A30, 34E05
Оригинальное исследование

Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения

Архипов В. П.[1], **Глушак А. В.**[2],
[1] Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru
[2] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается двусторонняя задача Коши с начальными условиями во внутренней точке вырождения. Установлена локальная разрешимость соответствующих начальных задач и определены первые асимптотики построенных решений.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, внутренняя точка вырождения, двусторонняя задача Коши, асимптотические представления, степенная асимптотика решений

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2024. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 245–260. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-245-260

Original Research

Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations with Conditions at the Degeneracy Point

Viktor P. Arkhipov[1], **Alexander V. Glushak**[2],
[1] Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru
[2] Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations of the second order, we consider the two-sided Cauchy problem with initial conditions at the interior point of degeneracy. The local solvability of the corresponding initial problems is established and the first asymptotic of the constructed solutions are determined. Examples are given.

Keywords: degenerate differential equations, internal point of degeneration, two-sided Cauchy problem, asymptotic representations, power asymptotic behavior of solutions

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2024. Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations with Conditions at the Degeneracy Point. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 245–260. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-245-260

1. Введение. Настоящая работа является продолжением исследований, проведённых авторами в [1], где были построены решения задачи Коши и приведены их первые асимптотики для вырождающихся при $t = 0$ дифференциальных уравнений второго порядка, когда начальные условия ставятся в точке вырождения $t = 0$ (односторонняя задача). Первые результаты по асимптотическим представлениям решений таких уравнений были приведены в [2] и развиты в дальнейшем в [3] и [4], а в [5] были получены первые асимптотики решений вблизи точки вырождения. При определённых условиях теоремы существования решения для двусторонней задачи Коши рассматривались в [6]. В отличие от [6], в настоящей работе приводятся формулы для решения, а также асимптотики этих решений вблизи точки вырождения.

2. Основные предположения и установленные ранее факты. В окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с вырождающимся старшим коэффициентом в точке t_0

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t), \tag{1}$$

где $a(t_0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq t_0$, $b(t_0) \neq 0$, и исследуем возможность разрешимости задачи Коши с условиями в точке t_0 (двусторонняя задача Коши). Нас будет интересовать локальная разрешимость и асимптотика решений задачи Коши вблизи точки вырождения, поэтому будем рассматривать уравнение (1) на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Для упрощения формулировок об асимптотике решений будем предполагать, что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ функции, причём $a(t_0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq t_0$ и $b(t_0) = b_0 \neq 0$.

Воспользуемся результатами работы [4], в которой в правой окрестности точки вырождения было получено общее решение уравнения (1) в виде асимптотических рядов по специально построенным функциям, и дополним их выводами из работы [5].

Для некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ определим следующие функции:

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}, \quad s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)\, d\tau,$$

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4d(t)}\left(a(t)\left(\dfrac{d'(t)}{d(t)}\right)^2 - 2\left(\dfrac{a(t)d'(t)}{d(t)}\right)' - 2b'(t)\right) & \text{при } a(t) > 0, \\ \dfrac{1}{4d(t)}\left(-a(t)\left(\dfrac{d'(t)}{d(t)}\right)^2 + 2\left(\dfrac{a(t)d'(t)}{d(t)}\right)' + 2b'(t)\right) & \text{при } a(t) < 0, \end{cases}$$

$$v_k^+(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int\limits_{t}^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) - (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau\right), \; t \in (t_0, t_0 + \delta], \quad k = 1,\ 2,$$

$$v_k^-(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(-\int\limits_{t_0-\delta}^{t} \frac{b(\tau) + (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau\right), \; t \in [t_0 - \delta, t_0), \quad k = 1,\ 2. \tag{2}$$

В силу непрерывности входящих в эти выражения функций можно выбрать достаточно малое $\delta > 0$ так, чтобы на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ выполнялось следующее условие.

Условие 2. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ справедливы неравенства

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}, \quad \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |h(t)|\, dt < \frac{1}{2}.$$

Любое решение уравнения (1) будем рассматривать отдельно на каждом из промежутков $[t_0 - \delta, t_0)$ и $(t_0, t_0 + \delta]$. Тогда

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t) \text{ при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ u^+(t) \text{ при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

что позволит воспользоваться формулами, установленными в [2], [3] для односторонней задачи с вырождением в точке $t = 0$ на отрезке $[0,1]$. В этих формулах, записанных в терминах переменной $\tilde{t} \in [0, \delta]$, используем замену переменной $t = \tilde{t} + t_0 \in [t_0, t_0 + \delta]$ для промежутка $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ и $t = -\tilde{t} + t_0 \in [t_0 - \delta, t_0]$ для промежутка $t \in [t_0 - \delta, t_0]$.

Приведем далее основные формулы, выражающие гладкие решения уравнения (1) на промежутках $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ и $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Из результатов работ [2]–[4] следует, что на промежутке $t \in (t_0, t_0 + \delta]$ фундаментальная система решений $u_1^+(t), u_2^+(t)$ однородного уравнения (1) при $a(t) > 0$ имеет вид

$$u_1^+(t) = v_1^+(t)\Phi^+(t), \quad u_2^+(t) = v_2^+(t)\Psi^+(t), \tag{3}$$

где функции $\Phi^+(t), \Psi^+(t)$ (в терминах работы [1] $\Phi^+(t) = \Phi(t - t_0), \Psi^+(t) = \Psi(t - t_0)$) определяются как решения задач

$$\Phi^+(t) = 1 + K_1^+\Phi^+(t),\ \Phi^+(t_0) = 1, \qquad \Psi^+(t) = 1 + K_2^+\Psi^+(t),\ \Psi^+(t_0) = 1$$

с интегральными операторами

$$K_1^+\varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} k_1^+(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad K_2^+\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} k_2^+(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau,$$

и ядрами

$$k_1^+(t,\tau) = \begin{cases} h(\tau) \quad \text{при } t_0 \le \tau \le t \le t_0+\delta, \\ h(\tau)\exp\left(-\int\limits_t^\tau \dfrac{d(\xi)\,d\xi}{a(\xi)}\right) \text{при } t \le \tau \le t_0+\delta, \end{cases}$$

$$k_2^+(t,\tau) = -h(\tau)\left(1-\exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{d(\xi)\,d\xi}{a(\xi)}\right)\right) \text{ при } t_0 \le \tau \le t \le t_0+\delta.$$

Частное решение уравнения (1) на промежутке $(t_0, t_0+\delta]$ определим равенством (см. [4])

$$u_*^+(t) = A^+(t)\Phi^+(t) + B^+(t)\Psi^+(t), \quad \text{где} \tag{4}$$

$$A^+(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\Psi^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau,$$

$$B^+(t) = -\int\limits_{t}^{t_0+\delta} \frac{\Phi^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_t^\tau \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau.$$

При $b_0 > 0$ удобно использовать частное решение вида

$$u_\star^+(t) = A_\star^+(t)\Phi^+(t) + B_\star^+(t)\Psi^+(t), \quad \text{где} \tag{5}$$

$$A_\star^+(t) = A^+(t),\quad B_\star^+(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\Phi^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau.$$

Аналогично, на $[t_0-\delta, t_0)$ фундаментальную систему решений $u_1^-(t), u_2^-(t)$ однородного уравнения (1) при $a(t) > 0$ можно записать в виде (см. [2]–[4])

$$u_1^-(t) = v_1^-(t)\Phi^-(t),\quad u_2^-(t) = v_2^-(t)\Psi^-(t), \tag{6}$$

где функции $\Phi^-(t), \Psi^-(t)$ (в терминах работы [1] $\Phi^-(t) = \Phi(t_0-t), \Psi^-(t) = \Psi(t_0-t)$) определяются как решения задач

$$\Phi^-(t) = 1 + K_1^-\Phi^-(t),\ \Phi^-(t_0) = 1,\qquad \Psi^-(t) = 1 + K_2^-\Psi^-(t),\ \Psi^-(t_0) = 1$$

с интегральными операторами

$$K_1^-\varphi(t) = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} k_1^-(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad K_2^-\psi(t) = \int\limits_{t}^{t_0} k_2^-(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau,$$

и ядрами

$$k_1^-(t,\tau) = \begin{cases} h(\tau) \text{ при } t_0-\delta \le t \le \tau \le t_0, \\ h(\tau)\exp\left(-\int\limits_\tau^t \dfrac{d(\xi)\,d\xi}{a(\xi)}\right) \qquad \text{при } t_0-\delta \le \tau \le t \le t_0, \end{cases}$$

$$k_2^-(t,\tau) = -h(\tau)\left(1-\exp\left(-\int\limits_t^\tau \frac{d(\xi)\,d\xi}{a(\xi)}\right)\right), \text{ при } t_0-\delta \le t \le \tau < t_0.$$

Частное решение уравнения (1) на промежутке $[t_0-\delta, t_0)$ определим равенством

$$u_*^-(t) = A^-(t)\Phi^-(t) + B^-(t)\Psi^-(t), \quad \text{где} \tag{7}$$

$$A^-(t) = -\int\limits_t^{t_0} \frac{\Psi^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_t^{\tau} \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau,$$

$$B^-(t) = -\int\limits_{t_0-\delta}^{t} \frac{\Phi^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau.$$

При $b_0 < 0$ удобно использовать частное решение вида

$$u^-_\star(t) = A^-_\star(t)\Phi^-(t) + B^-_\star(t)\Psi^-(t), \quad \text{где} \tag{8}$$

$$A^-_\star(t) = A^-(t), \;\; B^-_\star(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\Phi^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau.$$

Приведем, наконец, формулы для решений уравнения (1) на промежутке $t \in (t_0, t_0+\delta]$ при $a(t) < 0$. В этом случае введём в рассмотрение функции

$$\tilde{v}^+_1(t) = v^+_2(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau)-d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau\right),$$

$$\tilde{v}^+_2(t) = v^+_1(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int\limits_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau)+d(\tau)}{2a(\tau)}\, d\tau\right), \tag{9}$$

а также функции $\tilde{\Phi}^+(t)$, $\tilde{\Psi}^+(t)$, как решения задач

$$\tilde{\Phi}^+(t) = 1 + \tilde{K}^+_1\tilde{\Phi}^+(t),\; \tilde{\Phi}^+(t_0) = 1, \qquad \tilde{\Psi}^+(t) = 1 + \tilde{K}^+_2\tilde{\Psi}^+(t),\; \tilde{\Psi}^+(t_0) = 1$$

с интегральными операторами

$$\tilde{K}^+_1\varphi(t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \tilde{k}^+_1(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \;\; \tilde{K}^+_2\psi(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{k}^+_2(t,\tau)\psi(\tau)\, d\tau,$$

и ядрами

$$\tilde{k}^+_1(t,\tau) = \begin{cases} h(\tau) \text{ при } \; t_0 \le \tau \le t \le t_0+\delta, \\ h(\tau)\exp\left(\int\limits_t^{\tau} \dfrac{d(\xi)\, d\xi}{a(\xi)}\right) \quad \text{при } t \le \tau \le t_0+\delta, \end{cases}$$

$$\tilde{k}^+_2(t,\tau) = -h(\tau)\left(1 - \exp\left(\int\limits_{\tau}^{t} \frac{d(\xi)\, d\xi}{a(\xi)}\right)\right) \quad \text{при } \; t_0 \le \tau \le t \le t_0+\delta.$$

Как и в равенстве (3) определим фундаментальную систему решений на $(t_0, t_0+\delta]$

$$\tilde{u}^+_1(t) = \tilde{v}^+_1(t)\tilde{\Phi}^+(t), \quad \tilde{u}^+_2(t) = \tilde{v}^+_2(t)\tilde{\Psi}^+(t) \tag{10}$$

и частное решение уравнения (1)

$$\tilde{u}^+_*(t) = \tilde{A}^+(t)\tilde{\Phi}^+(t) + \tilde{B}^+(t)\tilde{\Psi}^+(t), \quad \text{где} \tag{11}$$

$$\tilde{A}^+(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\tilde{\Psi}^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau,$$

$$\tilde{B}^+(t) = -\int\limits_{t}^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau.$$

При $b_0 < 0$ можно использовать частное решение

$$\tilde{u}^+_\star(t) = \tilde{A}^+_\star(t)\tilde{\Phi}^+(t) + \tilde{B}^+_\star(t)\tilde{\Psi}^+(t), \quad \text{где} \tag{12}$$

$$\tilde{A}^+_\star(t) = \tilde{A}^+(t), \quad \tilde{B}^+_\star(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\tilde{\Phi}^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau.$$

Укажем важные предельные соотношения, которые легко устанавливаются и которые позволят проводить стыковку решений в точке t_0. В дальнейшем буквой θ с соответствующими индексами будем обозначать некоторые вполне конкретные постоянные.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t > t_0$. Тогда для определяемых равенствами (3)–(5) функций справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{t\to t_0+} u_1^+(t) = v_1^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) = \begin{cases} \theta_1^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 < 0, \\ +\infty \quad \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+} u_2^+(t) = v_2^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) = \begin{cases} 0 \qquad \text{при}\ b_0 < 0, \\ \theta_2^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+} u_*^+(t) = u_*^+(t_0) = \begin{cases} 0 \qquad \text{при}\ b_0 < 0, \\ \theta_*^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases} \quad \lim_{t\to t_0+} u_\star^+(t) = u_\star^+(t_0) = 0 \ \text{при}\ b_0 > 0.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t < t_0$. Тогда для определяемых равенствами (6)–(8) функций справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{t\to t_0-} u_1^-(t) = v_1^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) = \begin{cases} +\infty \quad \text{при}\ b_0 < 0, \\ \theta_1^- > 0 \ \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0-} u_2^-(t) = v_2^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) = \begin{cases} \theta_2^- > 0 \ \text{при}\ b_0 < 0, \\ 0 \qquad \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0-} u_*^-(t) = u_*^-(t_0) = \begin{cases} \theta_*^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 < 0, \\ 0 \qquad \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases} \quad \lim_{t\to t_0-} u_\star^-(t) = u_\star^-(t_0) = 0 \ \text{при}\ b_0 < 0.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия 1, 2 и $a(t) < 0$ при $t > t_0$. Тогда для определяемых равенствами (9)–(12) функций справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{t\to t_0+} \tilde{u}_1^+(t) = \tilde{v}_1^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi)-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) = \begin{cases} +\infty \quad \text{при}\ b_0 < 0, \\ \tilde{\theta}_1^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+} \tilde{u}_2^+(t) = \tilde{v}_2^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) = \begin{cases} \tilde{\theta}_2^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 < 0, \\ 0 \qquad \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to t_0+} \tilde{u}_*^+(t) = \tilde{u}_*^+(t_0) = \begin{cases} \tilde{\theta}_*^+ > 0 \ \text{при}\ b_0 < 0, \\ 0 \qquad \text{при}\ b_0 > 0, \end{cases} \quad \lim_{t\to t_0+} \tilde{u}_\star^+(t) = \tilde{u}_\star^+(t_0) = 0 \ \text{при}\ b_0 < 0.$$

3. Задача Коши. Используя введённые формулами (2)–(12) функции, приступим к изучению двусторонней задачи Коши для уравнения (1) с условиями в точке t_0. Двусторонней задачей Коши будем называть задачу нахождения непрерывного на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ решения $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$\lim_{t\to t_0\pm} u(t) = u_0. \tag{13}$$

В дальнейшем будет ясно, что дополнительное задание условия на производную $u'(t)$ в точке t_0 либо не приводит к выделению единственного решения, либо излишне.

Введённая в (3) функция $u_2^+(t)$ определена на промежутке $[t_0, t_0+\delta]$ и при $b_0 < 0$ обладает свойством $(u_2^+)^{(k)}(t_0) = 0,\ k \in \mathbb{N}$ (см. [2]). Продолжим её нулём при $t < t_0$, сохранив за этой функцией прежнее обозначение.

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $a(t) > 0$ при $t \in [t_0-\delta, t_0)\bigcup(t_0, t_0+\delta]$ и $b_0 < 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений*

$u(t, C^+) \in C^\infty[t_0-\delta, t_0+\delta]$ этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (13). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^+) = w_1(t) + C^+ u_2^+(t), \tag{14}$$

где C^+ — произвольная постоянная,

$$w_1(t) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{u_2^-(t_0)} u_2^-(t) + u_\star^-(t) \text{ при } t \in [t_0-\delta, t_0], \\ \dfrac{u_0}{u_1^+(t_0)} u_1^+(t) + u_*^+(t) \text{ при } t \in [t_0, t_0+\delta], \end{cases}$$

и при этом $u_\star^-(t_0) = u_*^+(t_0) = 0$, $u'(t_0, C^+) = \dfrac{1}{b_0}(f(t_0) - u_0 c(t_0))$.

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_\star^-(t) \text{ при } t \in [t_0-\delta, t_0), \\ \hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_*^+(t) \text{ при } t \in (t_0, t_0+\delta], \end{cases}$$

которая, очевидно, бесконечно дифференцируема на $[t_0-\delta, t_0) \bigcup (t_0, t_0+\delta]$.

Поскольку в силу леммы 2 левый предел в точке t_0 функции $u_1^-(t)$ равен $+\infty$, то для выполнения условия (13) следует положить $C_1 = 0$, и тогда, учитывая леммы 1–3, получим

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0-} \left(C_2 u_2^-(t) + u_\star^-(t)\right) = C_2 u_2^-(t_0) = u_0 \Rightarrow C_2 = \dfrac{u_0}{u_2^-(t_0)}, \\ \lim\limits_{t\to t_0+} \left(\hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_*^+(t)\right) = \hat{C}_1 u_1^+(t_0) = u_0 \Rightarrow \hat{C}_1 = \dfrac{u_0}{u_1^+(t_0)},\ \hat{C}_2 = C^+, \end{cases}$$

что и приводит к представлению (14), а также обеспечивает существование семейства непрерывных решений задачи Коши на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$.

Бесконечная дифференцируемость функции $u(t, C^+)$ устанавливается методом математической индукции как и в статье [4], при этом используются равенства (см. [2], [6])

$$\lim_{t\to t_0\pm} a(t)u''(t) = 0, \quad u'(t_0) = \lim_{t\to t_0\pm} \frac{f(t) - c(t)u(t)}{a'(t) + b(t)}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Пусть в уравнении (1) $a(t) = (t-1)^2$, $b(t) = -1$, $c(t) = -2$, $f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(t-1)^2 u''(t) + (2t-3)u'(t) - 2u(t) = 1, \qquad \lim_{t\to 1\pm} u(t) = u_0. \tag{15}$$

Любое решение задачи (15) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t) \text{ при } t \in (-\infty, 1), \\ u^+(t) \text{ при } t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

С использованием системы Wolfram Mathematica при $t > 1$ определим функцию

$$u^+(t) = u_0(3-2t) + C^+(2-4t)\exp\left(\frac{1}{1-t}\right) + 1 - t, \quad \lim_{t\to 1+} u^+(t) = u_0,$$

где C^+ — произвольная постоянная.

Для нахождения $u^-(t)$ при $t < 1$ в задаче (15) произведём замену $t = 1-\tau$, $u(t) = u(1-\tau) = w(\tau)$, где функция $w(\tau)$ является решением задачи

$$\tau^2 w''(\tau) + (2\tau+1)w'(\tau) - 2w(\tau) = 1, \qquad \lim_{\tau\to 0+} w(\tau) = u_0.$$

С использованием системы Wolfram Mathematica при $\tau > 0$ определим функцию

$$w(\tau) = u_0(2\tau+1) + \tau$$

и, таким образом, решением задачи (15) будет

$$u(t) = \begin{cases} u_0(3-2t) + 1 - t \text{ при } t \in (-\infty, 1], \\ u_0(3-2t) + 1 - t + C^+(2-4t)\exp\left(\dfrac{1}{1-t}\right) \text{ при } t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

где C^+ — произвольная постоянная, что согласуется с теоремой 1. В этом конкретном примере решение определено на всей оси. Очевидно, дополнительное задание значения производной $u'(t)$ в точке $t_0 = 1$ не приводит к выделению единственного решения в ввиду невозможности определить постоянную C^+.

Введённая в (6) функция $u_2^-(t)$ определена на промежутке $[t_0 - \delta, t_0]$ и при $b_0 > 0$ обладает свойством $(u_2^-)^{(k)}(t_0) = 0,\ k \in \mathbb{N}$ (см. [2]). Продолжим её нулём при $t > t_0$, сохранив за этой функцией прежнее обозначение.

Теорема 2. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0) \bigcup (t_0, t_0 + \delta]$ и $b_0 > 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений $u(t, C^-) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (13). Это семейство имеет вид*

$$u(t, C^-) = w_2(t) + C^- u_2^-(t), \tag{16}$$

где C^- — произвольная постоянная,

$$w_2(t) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{u_1^-(t_0)} u_1^-(t) + u_*^-(t) \ \textit{при}\ t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \dfrac{u_0}{u_2^+(t_0)} u_2^+(t) + u_\star^+(t) \ \textit{при}\ t \in [t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

и при этом $u'(t_0, C^-) = \dfrac{1}{b_0}(f(t_0) - u_0 c(t_0))$.

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_*^-(t) \ \text{при}\ t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ \hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_\star^+(t) \ \text{при}\ t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

которая, очевидно, бесконечно дифференцируема на $[t_0 - \delta, t_0) \bigcup (t_0, t_0 + \delta]$.

Аналогично доказательству теоремы 1, учитывая условие (13), леммы 1–3 и выбирая

$$\hat{C}_1 = 0,\ C_1 = \frac{u_0}{u_1^-(t_0)},\ \hat{C}_2 = \frac{u_0}{u_2^+(t_0)},\ C_2 = C^-,$$

получим представление (16). Теорема доказана.

Пример 2. Пусть в уравнении (1) $a(t) = (t-1)^2,\ b(t) = 1,\ c(t) = -2,\ f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(t-1)^2 u''(t) + (2t-1)u'(t) - 2u(t) = 1, \qquad \lim_{t \to 1\pm} u(t) = u_0. \tag{17}$$

С использованием системы Wolfram Mathematica найдём решение задачи (17) в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_0(2t-1) + t - 1 + C^-(2t-3)\exp\left(\dfrac{1}{t-1}\right) \ \text{при}\ t \in (-\infty, 1), \\ u_0(2t-1) + t - 1 \ \text{при}\ t \in [1, +\infty), \end{cases}$$

где C^- — произвольная постоянная, что согласуется с теоремой 2. Как и в примере 1, в этом примере решение определено на всей оси и дополнительное задание условия на значение производной $u'(t)$ в точке $t_0 = 1$ не приводит к выделению единственного решения.

В случае изменение знака коэффициента $a(t)$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $(t_0 - t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0) \bigcup (t_0, t_0 + \delta]$ и $b_0 < 0$. Тогда существует единственное непрерывное решение $u(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ этого уравнения, удовлетворяющее условию (13) и это решение имеет вид*

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{u_2^-(t_0)} u_2^-(t) + u_\star^-(t) \ \textit{при}\ t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \dfrac{u_0}{\tilde{u}_2^+(t_0)} \tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_\star^+(t) \ \textit{при}\ t \in [t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

и при этом $u'(t_0) = \dfrac{1}{b_0 + a'(t_0)}(f(t_0) - u_0 c(t_0))$.

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_\star^-(t) \ \text{при}\ t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ \hat{C}_1 \tilde{u}_1^+(t) + \hat{C}_2 \tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_\star^+(t) \ \text{при}\ t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

которая, очевидно, бесконечно дифференцируема на $[t_0 - \delta, t_0) \bigcup (t_0, t_0 + \delta]$.

Аналогично доказательству теоремы 1, учитывая условие (13), леммы 1–3 и выбирая

$$C_1 = \hat{C}_1 = 0,\ C_2 = \frac{u_0}{u_2^-(t_0)},\ \hat{C}_2 = \frac{u_0}{u_2^+(t_0)},$$

получим требуемое в теореме представление. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть в уравнении (1) $a(t) = 1 - t^2,\ b(t) = -1,\ c(t) = -2,\ f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(1-t^2)u''(t) - (2t+1)u'(t) - 2u(t) = 1, \qquad \lim_{t\to 1\pm} u(t) = u_0. \tag{18}$$

С использованием системы Wolfram Mathematica найдём единственное решение задачи (18) в виде

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{2u_0+1}{\sqrt{14(1-t)}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{7}\ \arcsin\sqrt{\dfrac{1-t}{2}}\right) - \dfrac{1}{2} & \text{при } t \in (-\infty, 1), \\ \dfrac{2u_0+1}{\sqrt{14(t-1)}}\sin\left(\sqrt{7}\ \mathrm{arcsh}\sqrt{\dfrac{t-1}{2}}\right) - \dfrac{1}{2} & \text{при } t \in [1, +\infty), \end{cases}$$

что согласуется с теоремой 3. Как и в примерах 1 и 2, в этом примере решение определено на всей оси, а дополнительное задание условия на значение производной $u'(t)$ в точке $t_0 = 1$ излишне.

Теорема 4. *Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $(t_0-t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0-\delta, t_0)\bigcup(t_0, t_0+\delta]$ и $b_0 > 0$. Тогда существует двухпараметрическое семейство*

$$u(t, C^-, C^+) \in C^m[t_0-\delta, t_0+\delta],\ m = \max\{k \in \mathbb{N} : b_0 + ka'(t_0) > 0\},$$

решений этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (13). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^-, C^+) = w_2(t) + C^-u_2^-(t) + C^+\tilde{u}_2^+(t), \tag{19}$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_2(t) = \begin{cases} \dfrac{u_0}{u_1^-(t_0)}u_1^-(t) + u_*^-(t) \ \textit{при } t \in [t_0-\delta, t_0], \\ \dfrac{u_0}{\tilde{u}_1^+(t_0)}\tilde{u}_1^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) \ \textit{при } t \in [t_0, t_0+\delta]. \end{cases}$$

Кроме того, следующие решения однородного уравнения (1) на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$

$$u_2^-(t) = \begin{cases} \dfrac{\Psi^-(t)}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(\displaystyle\int_{t_0-\delta}^{t} \dfrac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) \ \textit{при } t \in [t_0-\delta, t_0], \\ 0 \ \textit{при } t \in [t_0, t_0+\delta], \end{cases}$$

$$\tilde{u}_2^+(t) = \begin{cases} 0 \ \textit{при } t \in [t_0-\delta, t_0], \\ \dfrac{\tilde{\Psi}^+(t)}{\sqrt{d(t)}}\exp\left(\displaystyle\int_{t}^{t_0+\delta} \dfrac{b(\xi)+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right) \ \textit{при } t \in [t_0, t_0+\delta] \end{cases}$$

принадлежат $C^m[t_0-\delta, t_0+\delta]$, являются бесконечно малыми порядка m в точке t_0 и

$$u'(t_0) = \frac{1}{b_0 + a'(t_0)}(f(t_0) - u_0c(t_0)).$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1u_1^-(t) + C_2u_2^-(t) + u_*^-(t) \text{ при } t \in [t_0-\delta, t_0), \\ \hat{C}_1\tilde{u}_1^+(t) + \hat{C}_2\tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) \text{ при } t \in (t_0, t_0+\delta]. \end{cases}$$

Аналогично доказательству теоремы 1, учитывая условие (13), леммы 1–3 и выбирая

$$C_1 = \frac{u_0}{u_1^-(t_0)},\ \hat{C}_1 = \frac{u_0}{u_1^-(t_0)},$$

при этом постоянные $C_2 = C^-,\ \hat{C}_2 = C^+$ остаются произвольными, получим требуемое в теореме представление (19) для непрерывного на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ решения.

В статье [4] установлено, что любое непрерывное на $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ решение уравнения (1) принадлежит $C^m[t_0-\delta, t_0+\delta]$, $m = \max\{k \in \mathbb{N} : b_0 + ka'(t_0) > 0\}$. Наконец, свойства решений $\tilde{u}_2^+(t)$, $\tilde{u}_2^-(t)$ в точке t_0 вытекают из соответствующих свойств функций $\tilde{v}_2^+(t)$, $\tilde{v}_2^-(t)$ (см. [4]). Теорема доказана.

Пример 4. Пусть в уравнении (1) $a(t) = 1-t^2$, $b(t) = 1$, $c(t) = 0$, $f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(1-t^2)u''(t) + (1-2t)u'(t) = 1, \qquad \lim_{t\to 1\pm} u(t) = u_0. \tag{20}$$

С использованием системы Wolfram Mathematica найдём решение задачи (20) в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_0 + \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}\left(C^- + 2\arcsin\sqrt{\dfrac{1-t}{2}}\right) & \text{при } t \in (-1, 1], \\ u_0 + \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}\left(C^+ + 2\,\mathrm{arcsh}\sqrt{\dfrac{t-1}{2}}\right) & \text{при } t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

где C^+, C^- — произвольные постоянные, что согласуется с теоремой 4. В точке t_0 решение непрерывно, но не дифференцируемо. Как и в примерах 1, 2 дополнительное задание условия на производные функции $u(t)$ в точке $t_0 = 1$ не приводит к выделению единственного решения в ввиду невозможности определения постоянных C^+, C^-.

4. Асимптотика решений двусторонней задачи Коши в окрестности точки вырождения t_0. В работе [5] для уравнения (1) были построены первые асимптотики решений в правой окрестности точки $t_0 = 0$, а в работе [1] они были использованы для нахождения асимптотик решений односторонней задачи Коши в этой точке. Покажем, как эти результаты можно применить и в настоящей работе при исследовании двусторонней задачи Коши. Для упрощения формулировок далее будем придерживаться следующих предположений.

Условие 3. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые при $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ функции, причём $a(t) = (t_0-t)^{m+1}a_0(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0(t) > 0$ при $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ и $b(t) = b \neq 0$.

Такой выбор даёт при $t \to t_0$ асимптотические представления определяемых в равенствах (2) следующих функций:

$$a(t) = (t_0-t)^{m+1}O(1), \;\; h(t) = (t_0-t)^{2m}O(1), \;\; d(t) = |b|\left(1 + (t_0-t)^{m+1}O(1)\right),$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau)\,d\tau = (t_0-t)^{2m+1}O(1),$$

для которых в этом пункте мы будем использовать их асимптотические представления.

Переформулируем некоторые результаты работы [5], установленные на $[0, \delta]$ при стремлении $t \to 0+$ применительно к решениям уравнения (1) на отрезках $t \in [t_0-\delta, t_0]$ и $t \in [t_0, t_0+\delta]$. При этом асимптотические представления функций будем отмечать индексом $\diamond$, например, $\Phi_\diamond^+(t)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия 2, 3. Если $a(t) > 0$ при $t \neq t_0$, то в окрестности точки вырождения t_0 определяемые формулами (3), (6), (10) фундаментальные решения уравнения (1) допускают при $t \to t_0\pm$ следующие асимптотические представления:*

$$u_{1\diamond}^+(t) = v_1^+(t)\Phi_\diamond^+(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \; \textit{где}\; \Phi_\diamond^+(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)',$$

$$u_{2\diamond}^+(t) = v_2^+(t)\Psi_\diamond^+(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \; \textit{где}\; \Psi_\diamond^+(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)',$$

$$u_{1\diamond}^-(t) = v_1^-(t)\Phi_\diamond^-(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \; \textit{где}\; \Phi_\diamond^-(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)',$$

$$u_{2\diamond}^-(t) = v_2^-(t)\Psi_\diamond^-(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \; \textit{где}\; \Psi_\diamond^-(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'.$$

Если же $a(t) < 0$ при $t \in (t_0, t_0+\delta]$, то при $t \to t_0$

$$\tilde{u}_{1\diamond}^+(t) = \tilde{v}_1^+(t)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \; \textit{где}\; \tilde{\Phi}_\diamond^+(t) = 1 + s(t) - \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)', \tag{21}$$

$$\tilde{u}_{2\diamond}^+(t) = \tilde{v}_2^+(t)\tilde{\Psi}_\diamond^+(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \; \textit{где}\; \Psi_\diamond^-(t) = 1 - s(t) - \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)}\left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'. \tag{22}$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия 2, 3. Тогда если $a(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, то для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существуют бесконечно дифференцируемые решения уравнения (1), допускающие при $t \to t_0+$ асимптотические представления:*

$$u^+_{*\diamond}(t) = A^+_\diamond(t)\Phi^+_\diamond(t) + B^+_\diamond(t)\Psi^+_\diamond(t) + s^2(t)O(1), \quad \textit{где}$$

$$A^+_\diamond(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\Psi^+_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau = o(1),$$

$$B^+_\diamond(t) = -\int\limits_{t}^{t_0+\delta} \frac{\Phi^+_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau;$$

если $b > 0$, то

$$u^+_{\star\diamond}(t) = A^+_{\star\diamond}(t)\Phi^+_\diamond(t) + B^+_{\star\diamond}(t)\Psi^+_\diamond(t) + s^2(t)O(1), \quad \textit{где}$$

$$A^+_{\star\diamond}(t) = A^+_\diamond(t), \;\; B^+_{\star\diamond}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\Phi^+_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau = o(1);$$

если $a(t) > 0$ для $t \in [t_0 - \delta, t_0)$, то при $t \to t_0-$

$$u^-_{*\diamond}(t) = A^-_\diamond(t)\Phi^-_\diamond(t) + B^-_\diamond(t)\Psi^-_\diamond(t) + s^2(t)O(1), \quad \textit{где} \tag{23}$$

$$A^-_\diamond(t) = -\int\limits_{t}^{t_0} \frac{\Psi^-_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau = o(1),$$

$$B^-_\diamond(t) = -\int\limits_{t_0-\delta}^{t} \frac{\Phi^-_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau;$$

если $b < 0$, то

$$u^-_{\star\diamond}(t) = A^-_{\star\diamond}(t)\Phi^-_\diamond(t) + B^-_{\star\diamond}(t)\Psi^-_\diamond(t) + s^2(t)O(1), \quad \textit{где}$$

$$A^-_{\star\diamond}(t) = A^-_\diamond(t), \;\; B^-_{\star\diamond}(t) = \int\limits_{t}^{t_0} \frac{\Phi^-_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau = o(1).$$

Если $a(t) < 0$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta]$, то при $t \to t_0+$

$$\tilde{u}^+_{*\diamond}(t) = \tilde{A}^+_\diamond(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t) + \tilde{B}^+_\diamond(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t) + s^2(t)O(1), \quad \textit{где} \tag{24}$$

$$\tilde{A}^+_\diamond(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\tilde{\Psi}^+_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau,$$

$$\tilde{B}^+_\diamond(t) = -\int\limits_{t}^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}^+_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int\limits_{t}^{\tau} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau;$$

если $b < 0$, то

$$\tilde{u}^+_{\star\diamond}(t) = \tilde{A}^+_{\star\diamond}(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t) + \tilde{B}^+_{\star\diamond}(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t) + s^2(t)O(1), \quad \textit{где}$$

$$\tilde{A}^+_{\star\diamond}(t) = A^+_\diamond(t), \;\; \tilde{B}^+_{\star\diamond}(t) = -\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\tilde{\Phi}^+_\diamond(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) d\tau = o(1).$$

Применив леммы 4, 5 и введённые в них обозначения к найденным в теоремах 1–4 решениям, после элементарных преобразований получим следующие четыре теоремы.

Теорема 5. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $b < 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений*

$$u_\diamond(t, C^+) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (13), и это семейство имеет вид

$$u_\diamond(t, C^+) = w_{1\diamond}(t) + C^+ u^+_{2\diamond}(t),$$

где C^+ — произвольная постоянная,

$$w_{1\diamond}(t)=\begin{cases} u_0\sqrt{\dfrac{|b|}{d(t)}}\Psi_\diamond^-(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{\star\diamond}^-(t), t\in[t_0-\delta,t_0],\\ u_0\sqrt{\dfrac{|b|}{d(t)}}\Phi_\diamond^+(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{*\diamond}^+(t), t\in[t_0,t_0+\delta].\end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m=2n-1$, $n\in\mathbb{N}$ и $b>0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений*

$$u_\diamond(t,C^-)\in C^\infty[t_0-\delta,t_0+\delta]$$

уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (13), и это семейство имеет вид

$$u_\diamond(t,C^-)=w_{2\diamond}(t)+C^-u_{2\diamond}^-(t),$$

где C^- — произвольная постоянная,

$$w_{2\diamond}(t)=\begin{cases} u_0\sqrt{\dfrac{b}{d(t)}}\Phi_\diamond^-(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{*\diamond}^-(t), t\in[t_0-\delta,t_0],\\ u_0\sqrt{\dfrac{b}{d(t)}}\Psi_\diamond^+(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{\star\diamond}^+(t), t\in[t_0,t_0+\delta].\end{cases}$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m=2n$, $n\in\mathbb{N}$ и $b<0$. Тогда существует единственное ограниченное решение $u(t)\in C^\infty[t_0-\delta,t_0+\delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (13), и оно имеет вид*

$$u_\diamond(t)=\begin{cases} u_0\sqrt{\dfrac{|b|}{d(t)}}\Psi_\diamond^-(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{\star\diamond}^-(t),\ t\in[t_0-\delta,t_0],\\ u_0\sqrt{\dfrac{|b|}{d(t)}}\tilde{\Psi}_\diamond^+(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+\tilde{u}_{\star\diamond}^+(t), t\in[t_0,t_0+\delta].\end{cases}$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m=2n$, $n\in\mathbb{N}$ и $b>0$. Тогда существует двухпараметрическое семейство решений*

$$u_\diamond(t,C^-,C^+)\in C^\infty[t_0-\delta,t_0+\delta]$$

уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (13), и это семейство имеет вид

$$u_\diamond(t,C^-,C^+)=w_{3\diamond}(t)+C^-u_{2\diamond}^-(t)+C^+\tilde{u}_{2\diamond}^+(t),$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_{3\diamond}(t)=\begin{cases} u_0\sqrt{\dfrac{b}{d(t)}}\Phi_\diamond^-(t)\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{*\diamond}^-(t), t\in[t_0-\delta,t_0],\\ u_0\sqrt{\dfrac{b}{d(t)}}\Psi_\diamond^+(t)\exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)\left(1+(t_0-t)^{4m+2}O(1)\right)+u_{\star\diamond}^+(t), t\in[t_0,t_0+\delta].\end{cases}$$

5. Весовая задача Коши. Учитывая установленные в п.п. 3 и 4 результаты, рассмотрим весовые условия Коши, позволяющие выделять неограниченные и бесконечно малые при $t\to t_0$ решения уравнения (1).

Приведём, например, утверждения, которые соответствуют случаю $a(t)=(t_0-t)^{2n+1}a_0(t)$, $n\in\mathbb{N}$ и для этого определим функцию

$$q(t)=\begin{cases}\exp\left(b\displaystyle\int_{t_0-\delta}^{t}\frac{d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t\in[t_0-\delta,t_0),\\ \exp\left(-b\displaystyle\int_{t}^{t_0+\delta}\frac{d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t\in(t_0,t_0+\delta].\end{cases}$$

Следует отметить, что для $b < 0$ при $t \to t_0 \pm$ функция $q(t) = o\left((t_0 - t)^{\infty}\right)$, а для $b > 0$ функция $q(t) \to +\infty$ при $t \to t_0 \pm$.

Под весовой задачей Коши будем понимать задачу нахождения решений уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to t_0 \pm} q(t)u(t) = w_0. \tag{25}$$

Лемма 6. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда определяемые равенствами (21), (22) фундаментальные решения уравнения (1) при $t \to t_0+$ допускают следующие асимптотические представления:*

$$\tilde{u}^{+}_{1\diamond}(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}^{+}_{1q}(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \quad \text{где} \tag{26}$$

$$\tilde{u}^{+}_{1q}(t) = \frac{\tilde{\Phi}^{+}_{\diamond}(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(-\int_{t}^{t_0+\delta} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) \in C^{\infty}[t_0, t_0 + \delta],$$

$$\lim_{t \to t_0+} \tilde{u}^{+}_{1q}(t) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b > 0, \\ \tilde{u}^{+}_{1q}(t_0) = \tilde{\varphi}^{+}_1 & \text{при } b < 0, \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}^{+}_1 = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right);$$

$$\tilde{u}^{+}_{2\diamond}(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}^{+}_{2q}(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \quad \text{где} \tag{27}$$

$$\tilde{u}^{+}_{2q}(t) = \frac{\tilde{\Psi}^{+}_{\diamond}(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t}^{t_0+\delta} \frac{-b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) \in C^{\infty}[t_0, t_0 + \delta],$$

$$\lim_{t \to t_0+} \tilde{u}^{+}_{2q}(t) = \begin{cases} \tilde{u}^{+}_{2q}(t_0) = \tilde{\varphi}^{+}_2 & \text{при } b > 0, \\ 0 & \text{при } b < 0, \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}^{+}_2 = \frac{1}{\sqrt{b}} \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right).$$

Если $t \to t_0-$, то справедливы асимптотические представления:

$$u^{-}_{1\diamond}(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}^{-}_{1q}(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \quad \text{где} \tag{28}$$

$$\tilde{u}^{-}_{1q}(t) = \frac{\tilde{\Phi}^{-}_{\diamond}(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) \in C^{\infty}[t_0 - \delta, t_0],$$

$$\lim_{t \to t_0-} u^{+}_{1q}(t) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b > 0, \\ \tilde{u}^{-}_{1q}(t_0) = \varphi^{-}_1 & \text{при } b < 0, \end{cases} \qquad \varphi^{-}_1 = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right);$$

$$u^{-}_{2\diamond}(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}^{-}_{2q}(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \quad \text{где} \tag{29}$$

$$u^{-}_{2q}(t) = \frac{\Psi^{-}_{\diamond}(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) \in C^{\infty}[t_0 - \delta, t_0],$$

$$\lim_{t \to t_0+} u^{-}_{2q}(t) = \begin{cases} u^{-}_{2q}(t_0) = \varphi^{-}_2 & \text{при } b > 0, \\ 0 & \text{при } b < 0, \end{cases} \qquad \varphi^{-}_2 = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right).$$

Доказательство. Приведем, например, доказательство формулы (26). Воспользовавшись формулой (21), получим

$$\tilde{u}^{+}_{1\diamond}(t) = \tilde{v}^{+}_1(t)\tilde{\Phi}^{+}(t) = \frac{\tilde{\Phi}^{+}_{\diamond}(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t}^{t_0+\delta} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) =$$

$$= \exp\left(b \int_{t}^{t_0+\delta} \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) \frac{\tilde{\Phi}^{+}_{\diamond}(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t}^{t_0+\delta} \frac{-b - d(\xi)}{2a(\xi)}\, d\xi\right) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}^{+}_{1q}(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right).$$

Аналогичным образом устанавливаются представления (27)–(29). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда при $t \neq t_0$ для любой функции $f(t) = \dfrac{f_0(t)}{q(t)},\ f_0(t) \in C^\infty[t_0-\delta, t_0+\delta]$ определяемые равенствами (24), (23) частные решения уравнения (1) при $t \to t_0+$ допускают следующие асимптотические представления:*

$$\tilde{u}^+_{*\diamond}(t) = \frac{1}{q(t)}\left(\tilde{A}^+_q(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t) + \tilde{B}^+_q(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t)\right)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \quad \text{где} \tag{30}$$

$$\tilde{A}^+_q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\tilde{\Psi}^+_\diamond(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau = o(1),$$

$$\tilde{B}^+_q(t) = \int\limits_{t}^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}^+_\diamond(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_{t}^{\tau}\frac{-b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau,$$

$$\lim_{t\to t_0+}\tilde{B}^+_q(t) = \begin{cases}\tilde{B}^+_q(t_0) = \tilde{\varphi}_* \ \text{при}\, b>0,\\ a(t)O(1)\ \text{при}\ b<0,\end{cases} \qquad \tilde{\varphi}_* = \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\frac{\tilde{\Phi}^+_\diamond(\tau)f_0(\tau)}{b\sqrt{d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}\frac{-b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau.$$

Если $t \to t_0-$, то справедливы асимптотические представления:

$$u^-_{*\diamond}(t) = \frac{1}{q(t)}\left(A^-_q(t)\Phi^-_\diamond(t) + B^-_q(t)\Psi^-_\diamond(t)\right)\left(1 + s^2(t)O(1)\right), \quad \text{где} \tag{31}$$

$$A^-_q(t) = -\int\limits_{t}^{t_0} \frac{\Psi^-_\diamond(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(-\int\limits_{t}^{\tau}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau = o(1),$$

$$B^-_q(t) = -\int\limits_{t_0-\delta}^{t} \frac{\Phi^-_\diamond(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau,$$

$$\lim_{t\to t_0-}B^-_q(t) = \begin{cases}B^-_q(t_0) = \varphi^-_* \ \text{при}\, b>0,\\ a(t)O(1)\ \text{при}\ b<0,\end{cases} \qquad \varphi^-_* = -\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0}\frac{\Phi^-_\diamond(\tau)f_0(\tau)}{b\sqrt{d(\tau)}}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t_0}\frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)}\,d\xi\right)d\tau.$$

Доказательство. Приведем доказательство формулы (30). Учитывая формулу (24) и используя интегрирование по частям, получим

$$\tilde{u}^+_{*\diamond}(t) = \tilde{A}^+_\diamond(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t) + \tilde{B}^+_\diamond(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t) + s^2(t)O(1) = \frac{1}{q(t)}\tilde{A}^+_q(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right) +$$

$$+\frac{1}{q(t)}\tilde{B}^+_q(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t)\left(1 + s^2(t)O(1)\right) = \frac{1}{q(t)}\left(\tilde{A}^+_q(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t) + \tilde{B}^+_q(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t)\right)\left(1 + s^2(t)O(1)\right).$$

Аналогичным образом устанавливается представление (31). Лемма доказана.

Применив леммы 6, 7 и введённые в них обозначения к найденным в теоремах 1–4 решениям, после элементарных преобразований получим следующие две теоремы.

Теорема 9. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n,\ n \in \mathbb{N}$ и $b < 0$. Тогда при $t \neq t_0$ для любой функции $f(t) = \dfrac{f_0(t)}{q(t)},\ f_0(t) \in C^\infty[t_0-\delta, t_0+\delta]$ существует двухпараметрическое семейство $u(t, C^-, C^+) \in C^\infty\left([t_0-\delta, t_0)\bigcup(t_0, t_0+\delta]\right)$ решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (25). Это семейство имеет вид*

$$u(t) = \begin{cases}\dfrac{w_0}{\varphi^-_1}u^-_1(t) + u^-_*(t) + C^-u^-_2(t)\ \text{при}\, t \in [t_0-\delta, t_0),\\ \dfrac{w_0}{\tilde{\varphi}^+_1}\tilde{u}^+_1(t) + \tilde{u}^+_*(t) + C^+\tilde{u}^+_2(t)\ \text{при}\, t \in (t_0, t_0+\delta],\end{cases}$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные. При $t \to t_0+$ они имеют асимптотическое представление

$$u(t) = \frac{1}{q(t)}\left(w_0\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\tilde{\Phi}^+_\diamond(t)\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2c(\xi)\,d\xi}{d(\xi)-b}\right) + \tilde{A}^+_q(t)\tilde{\Phi}^+_\diamond(t) + \tilde{B}^+_q(t)\tilde{\Psi}^+_\diamond(t)\right)\times$$

$$\times \quad \left(1 + s^2(t)O(1)\right) + C^+\tilde{u}_2^+(t),$$

а при $t \to t_0-$ асимптотическое представление имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{q(t)}\left(w_0\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\Phi_\diamond^-(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2c(\xi)\,d\xi}{d(\xi)-b}\right) + A_q^-(t)\Phi_\diamond^-(t) + \tilde{B}_q^-\Psi_\diamond^-(t) + s^2(t)O(1)\right) +$$

$$+ \; C^-\tilde{u}_2^-(t).$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде

$$u(t) = \begin{cases} C_1u_1^-(t) + C_2u_2^-(t) + u_*^-(t) \text{ при } t \in [t_0-\delta, t_0), \\ \hat{C}_1u_1^+(t) + \hat{C}_2u_2^+(t) + u_*^+(t) \text{ при } t \in (t_0, t_0+\delta], \end{cases}$$

и, используя леммы 6, 7, вычислим предел (25) для $b < 0$ и $t \to t_0+$. Имеем

$$\lim_{t\to t_0+} q(t)u(t) = \lim_{t\to t_0+} q(t)\left(\hat{C}_1u_1^+(t) + \hat{C}_2u_2^+(t) + u_*^+(t)\right) = \hat{C}_1\lim_{t\to t_0+} q(t)u_1^+(t) = \hat{C}_1\tilde{\varphi}_1 = w_0.$$

Выбирая в общем решении $\hat{C}_1 = \dfrac{w_0}{\tilde{\varphi}_1}$, $\hat{C}_2 = C^+$, и, учитывая (27), (30), получим (32). Действительно,

$$u(t) = \frac{1}{q(t)}\left(\frac{w_0}{\hat{\varphi}_1}\tilde{u}_{1q}^+(t) + \tilde{A}_q^+(t)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) + \tilde{B}_q^+(t)\tilde{\Psi}_\diamond^+(t)\right)\left(1 + s^2(t)O(1)\right) + C^+u_2^+(t) =$$

$$= \frac{1}{q(t)}\left(w_0\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\Phi_\diamond^-(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2c(\xi)\,d\xi}{d(\xi)-b}\right) + A_q^-(t)\Phi_\diamond^-(t) + \tilde{B}_q^-\Psi_\diamond^-(t) + s^2(t)O(1)\right) +$$

$$+ \; C^-\tilde{u}_2^-(t).$$

При этом мы использовали равенство

$$\frac{w_0}{\hat{\varphi}_1}\tilde{u}_{1q}^+(t) = w_0\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}d\xi\right)\exp\left(-\int\limits_{t}^{t_0+\delta}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}d\xi\right)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) =$$

$$= w_0\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)}d\xi\right)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) = w_0\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{2c(\xi)}{|b|+d(\xi)}d\xi\right)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t).$$

Используя леммы 6, 7, вычисляется предел (25) для случая $b < 0$ и $t \to t_0$. Имеем

$$\lim_{t\to t_0-} q(t)u(t) = \lim_{t\to t_0-} q(t)\left(C_1u_1^+(t) + C_2u_2^+(t) + u_*^-(t)\right) = C_1\lim_{t\to t_0-} q(t)u_1^+(t) = C_1\varphi_1^- = w_0.$$

Выбирая в общем решении $C_1 = \dfrac{w_0}{\varphi_1^-}$, $C_2 = C^-$, аналогично предыдущему случаю, получим (33). Теорема доказана.

В следующей теореме мы будем использовать обозначения леммы 7 и функцию $\dfrac{1}{q(t)}$. Как уже было указано в начале этого пункта, при $b > 0$ функция $q(t) \to +\infty$ при $t \to t_0\pm$, поэтому доопределим функцию $\dfrac{1}{q(t)}$ в точке t_0 нулём.

Теорема 10. *Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ и $b > 0$. Тогда для любой функции $f(t) = \dfrac{f_0(t)}{q(t)}$, $f_0(t) \in C^\infty[t_0-\delta, t_0+\delta]$ существует единственное решение $u(t) \in C^\infty[t_0-\delta, t_0+\delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (25). Это решение имеет вид*

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{w_0 - \varphi_*^-}{\varphi_2^-}u_2^-(t) + u_*^-(t) \text{ при } t \in [t_0-\delta, t_0), \\ \dfrac{w_0 - \tilde{\varphi}_*}{\tilde{\varphi}_2^+}\tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) + C^+\tilde{u}_2^+(t) \text{ при } t \in (t_0, t_0+\delta]. \end{cases}$$

При $t \to t_0+$ оно имеет асимптотическое представление

$$u(t) = \frac{1}{q(t)}\left(\left(w_0 - \tilde{\varphi}_*^+\right)\sqrt{\frac{|b|}{d(t)}}\tilde{\Psi}_\diamond^+(t)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(b-d(\xi))\,d\xi}{2a(\xi)}\right) + \tilde{A}_q^+(t)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) + \tilde{B}_q^+(t)\tilde{\Psi}_\diamond^+(t)\right) \times$$

$$\times \quad \left(1 + s^2(t)O(1)\right), \tag{32}$$

а при $t \to t_0-$ асимптотическое представление имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{q(t)}\left(\left(w_0 - \varphi_*^-\right)\sqrt{\frac{b}{d(t)}}\Psi_\diamond^-(t)\exp\left(\int_t^{t_0}\frac{(d(\xi)-b)\,d\xi}{a(\xi)}\right) + A_q^-(t)\Phi_\diamond^-(t) + \tilde{B}_q^-\Psi_\diamond^-(t)\right)\times$$

$$\times \quad \left(1 + s^2(t)O(1)\right). \tag{33}$$

Доказательство. В отличие от теоремы 9 для выполнения условия (25) следует в общем решении выбрать $C_1 = \hat{C}_1 = 0$ и тогда

$$\lim_{t\to t_0+} q(t)u(t) = \lim_{t\to t_0+} q(t)\left(\hat{C}_2 u_2^+(t) + (t) + u_*^+(t)\right) = \hat{C}_2\tilde{u}_{2q}^+(t_0) + \tilde{B}_q^+(t_0) = \hat{C}_2\tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_* = w_0,$$

$$\lim_{t\to t_0-} q(t)u(t) = \lim_{t\to t_0-} q(t)\left(C_2 u_2^-(t) + (t) + u_*^-(t)\right) = C_2 u_{2q}^-(t_0) + B_q^-(t_0) = C_2\varphi_2^- + \varphi_*^- = w_0.$$

Выбирая в общем решении $C_1 = \hat{C}_1 = 0,\ C_2 = \dfrac{w_0 - \varphi_*^-}{\varphi_2^-},\ \hat{C}_2 = \dfrac{w_0 - \tilde{\varphi}_*}{\varphi_2}$, получаем требуемое решение. Аналогично теореме 9 устанавливается справедливость асимптотических представлений (32), (33). Теорема доказана.

Подобным образом можно рассмотреть и весовые условия Коши вида (25) для случая $a(t) = (t_0 - t)^{2n}a_0(t),\ n \in \mathbb{N}$.

В заключение отметим, что в отличие от теорем 9 и 10 при $b < 0$ и $q(t) = o\left((t_0 - t)^\infty\right)$ уже для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существует семейство решений $\tilde{u}(t, C) \in C^\infty\left([t_0 - \delta, t_0)\bigcup(t_0, t_0 + \delta]\right)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию (25), имеющее вид

$$\tilde{u}(t,C) = \begin{cases} w_3(t,C) + \dfrac{\sqrt{|b|}w_0\Phi_0^-(t)}{q(t)\sqrt{d(t)}}\exp\left(\displaystyle\int_t^{t_0}\frac{2c(\xi)\,d\xi}{-b + d(\xi)}\right)(1 + s^2(t)O(1)) \text{ при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ w_3(t,C) + \dfrac{\sqrt{|b|}w_0\tilde{\Phi}_0^+(t)}{q(t)\sqrt{d(t)}}\exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{2c(\xi)\,d\xi}{b - d(\xi)}\right)(1 + s^2(t)O(1)) \text{ при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

где $w_3(t, C)$ — произвольное непрерывное на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ решение уравнения (1), которое можно построить как и в теоремах 3 и 7, а $\Phi_0^-(t),\ \tilde{\Phi}_0^+(t)$ определены в лемме 4.

Список литературы

1. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика и Физика.* 2023;55(3):197—206.
2. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения.* 2011;47(10):1383–1393.
3. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2013;5(148)30:5–18.
4. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2016;20(241)44:5–22.
5. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика.* 2023;55(3):197—206.
6. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика.* 1998;4(3):1063–1095.

References

1. Arkhipov VP., Glushak AV. First Asymptotics of Solutions of Degenerate Second-Order Differential Equation. *Math. Notes.* 2023;114:6:1107—1117. (in Russian)
2. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations.* 2011;47(10):1383–1393. (in Russian)
3. Arhipov VP., Glushak AV. Asymptotic representations of solutions of differential second order equations near the point of degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics.* 2013;5(148)30:5–18. (in Russian)

4. Arhipov VP., Glushak AV. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of of solutions. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics.* 2016;20(241)44:5–22. (in Russian)
5. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics.* 2023;55(3):197–206. (in Russian)
6. Rosov NKh, Sushko VG, Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundamental and applied mathematics.* 1998;4(3):1063–1095. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.07.2024
Поступила после рецензирования 21.08.2024
Принята к публикации 26.08.2024

Received July 8, 2024
Revised August 21, 2024
Accepted August 26, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орёл, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

К содержанию