Прикладная математика & Физика, 2024, том 56, № 3. С. 193–197.
Applied Mathematics & Physics, 2024, Volume 56, No 3. P. 193–197.

УДК 517.927.4
MSC 34Б18
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-193-197

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

Абдурагимов Г. Э.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. А. Алхутовым*)

Дагестанский государственный университет,
Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М.Гаджиева, 43-а
gusen_e@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающая деформацию состояния равновесия балки, один конец которой жестко закреплен, а второй подвижный, на шарнире. В случае подлинейного роста правой части уравнения с помощью теоремы Лере – Шаудера устанавливается существование положительного решения рассматриваемой задачи. Для доказательства единственности положительного решения используются полученные в работе априорные оценки решения и ее производных.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, функция Грина, теорема Лере – Шаудера

Для цитирования: Абдурагимов Г. Э. 2024. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 193–197. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-193-197

Original Research

On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for one Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation

Gusen E. Abduragimov
(*Article submitted by a member of the editorial board Yu. A. Alkhutov*)

Dagestan State University,
43-a M. Gadzhieva St., Makhachkala, 367000, Russia
gusen_e@mail.ru

Abstract. The article considers a two-point boundary value problem for a fourth-order nonlinear ordinary differential equation, which describes the deformation of the equilibrium state of a beam, one end of which is rigidly fixed and the other is movable on a hinge. In the case of sublinear growth of the right side of the equation, using the Leray-Schauder theorem, the existence of a positive solution to the problem under consideration is established. To prove the uniqueness of a positive solution, a priori estimates of the solution and its derivatives.

Keywords: Boundary Value Problem, Positive Solution, Green's function, Leray-Schauder Theorem

For citation: Abduragimov G. E. 2024. On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for one Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 193–197. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-193-197

1. Введение. В настоящей статье исследуется краевая задача

$$x^{(4)}(t) = -f(t, x(t)), \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(1) = 0, \quad x'''(1) = 0, \tag{3}$$

где $f : [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – непрерывная функция. Задача (1)–(3) моделирует деформацию состояния равновесия упругой балки, у которой один конец жестко закреплен, а другой – подвижный. В механике такая задача называется уравнением консольной балки (см., например, [1, 2]), где производные функции деформации $x(t)$ имеют следующий физический смысл : $x^{(4)}$ – жесткость плотности нагрузки, x''' – жесткость поперечной силы, x'' – жесткость изгибающего момента и x' – наклон.

Целью данной работы является получение достаточных условий существования и единственности положительных решений краевой задачи (1)–(2). Среди близких к настоящей статье задач отметим

[3, 4, 5, 6, 7], в основе которых лежат теоремы о неподвижной точке оператора. Полученные результаты дополняют исследования автора в этом направлении [8, 9].

2. Основные результаты. Для удобства выкладок введем следующие сокращения пространств: обозначим через $\mathbb{R}^+$ пространство всех неотрицательных действительных чисел, через $\mathbb{C}$ соответственно пространство $\mathbb{C}[0,1]$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in[0,1]}|x(t)|$, $\mathbb{C}^m$ – пространство $\mathbb{C}^m[0,1]$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}^m} = \max\left\{\|x\|_{\mathbb{C}}, \|x'\|_{\mathbb{C}}, \ldots, \|x^{(m)}\|_{\mathbb{C}}\right\}$, $\mathbb{L}_2$ – пространство $\mathbb{L}_2(0,1)$ с нормой $\|x\|_{\mathbb{L}_2} = \left(\int_0^1 x(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$ и через $\mathbb{W}^m$ – пространство Соболева с нормой $\|x\|_{\mathbb{W}^m} = \left(\sum_{i=0}^m \|x^{(i)}\|^2_{\mathbb{L}_2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Вместе с задачей (1)–(3) рассмотрим линейную задачу

$$x^{(4)}(t) = -h(t), \qquad 0 < t < 1, \tag{4}$$

$$x(0) = 0, \tag{5}$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(1) = 0, \quad x'''(1) = 0, \tag{6}$$

где $h \in \mathbb{L}_2$ – неотрицательная на $[0,1]$ функция.

Лемма 2.1. *Для каждого $h \in \mathbb{L}_2$ существует единственное положительное решение $x \in \mathbb{W}^4$ задачи* (4)–(6), *такое что*

$$\|x^{(i-1)}\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|x^{(i)}\|_{\mathbb{L}_2}, \qquad i = 1, \ldots, 4. \tag{7}$$

Доказательство. Легко проверить, что для любого $h \in \mathbb{L}_2$ функция

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)\,ds, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{8}$$

где

$$G(t,s) = \frac{1}{6}\begin{cases} 3st(s-t) + t^3, & \text{если } 0 \le t \le s; \\ s^3, & \text{если } s \le t \le 1, \end{cases} \tag{9}$$

функция Грина оператора $-\dfrac{d^4}{dt^4}$ с краевыми условиями (5), (6), принадлежит $\mathbb{W}^4$ и является единственным положительным решением линейной задачи (4)–(6).

С учетом граничного условия (5) имеем

$$x(t) = \int_0^t x'(s)\,ds, \quad t \in [0,1].$$

Следовательно, в силу неравенства Гельдера

$$|x(t)| \le \int_0^t |x'(s)|\,ds \le t^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t |x'(s)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}} \le t^{\frac{1}{2}}\|x'\|_{\mathbb{L}_2}, \quad t \in [0,1],$$

откуда следует, что $\|x\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|x'\|_{\mathbb{L}_2}$. Аналогично, из соотношений

$$x'(t) = -\int_t^1 x''(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \quad x''(t) = -\int_t^1 x'''(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \quad x'''(t) = -\int_t^1 x^{(4)}(s)\,ds, \quad t \in [0,1],$$

соответственно получим $\|x'\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|x''\|_{\mathbb{L}_2}$, $\|x''\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}$ и $\|x'''\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|x^{(4)}\|_{\mathbb{L}_2}$.

Как легко видеть для $h \in \mathbb{C}$ функция

$$x = Gh \in \mathbb{C}^4,$$

где G – оператор Грина с ядром (9), является классическим положительным решением задачи (4)–(6). В силу компактности вложения Соболева $\mathbb{W}^4 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$, оператор $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ является вполне непрерывным оператором.

Определим отображение $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ равенством

$$(Fx)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0,1].$$

Ввиду непрерывности f, непрерывен и оператор F. Определим суперпозицию отображений равенством

$$A = G \circ F. \tag{10}$$

Из полной непрерывности $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ следует полная непрерывность оператора $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$. В силу определения оператора G положительное решение краевой задачи (4)–(6) эквивалентно неподвижной точке оператора A.

Теорема 2.1. *Предположим, что существуют числа* $0 \le a < 4$ *и* $b > 0$, *такие что*

$$f(t, y_0) \le a y_0 + b, \tag{11}$$

для всех $(t, y_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$. *Тогда краевая задача* (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Пусть $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ – вполне непрерывный оператор, определяемый формулой (10). Тогда положительное решение задачи (1)–(3) эквивалентно неподвижной точке оператора A. Воспользуемся теоремой Лере – Шаудера для доказательства наличия у оператора A неподвижной точки. С этой целью рассмотрим гомотопное семейство операторных уравнений

$$x = \lambda A x, \qquad 0 \le \lambda \le 1. \tag{12}$$

Покажем, что множество положительных решений (12) ограничено в $\mathbb{C}^3$.

Пусть $x \in \mathbb{C}^3$ – положительное решение уравнения (12) для $\lambda \in [0,1]$. Введя обозначение $h = \lambda F(x)$, получим $x = \lambda A x = \lambda G(F(x)) = G(\lambda F(x)) = Gh$. В силу определения G выражение $x = Gh$ определяет единственное положительное решение линейной граничной задачи (4)–(6). Следовательно $x \in \mathbb{C}^4$ удовлетворяет задаче

$$x^{(4)}(t) = -\lambda f(t, x(t)), \qquad 0 < t < 1, \tag{13}$$

$$x(0) = 0, \tag{14}$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(0) = 0, \quad x'''(1) = 0. \tag{15}$$

Умножая уравнение (13) на $-x''(t)$, воспользовавшись (11), получим

$$-x^{(4)}(t)x''(t) = \lambda f(t, x(t))x''(t) \le \lambda(a x(t)x''(t) + b x''(t)) \le a x(t)x''(t) + b x''(t), \quad t \in [0,1],$$

где $0 \le a < 4$ и $b > 0$ – произвольные числа. Интегрируя теперь это неравенство на $[0,1]$ с учетом граничных условий (14), (15) и применяя неравенство Гельдера к правой части соответственно получим

$$\|x'''\|^2_{\mathbb{L}_2} \le a\|x\|_{\mathbb{L}_2}\|x''\|_{\mathbb{L}_2} + b\|x''\|_{\mathbb{L}_2}.$$

В силу леммы 2.1 имеем

$$\|x'''\|^2_{\mathbb{L}_2} \le \frac{a}{4}\|x'''\|^2_{\mathbb{L}_2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\|x'''\|_{\mathbb{L}_2} \le M_0, \quad \text{где} \quad M_0 = \frac{4b}{\sqrt{2}(4-a)}.$$

На основании этой оценки и леммы 2.1 имеем

$$\|x\|_{\mathbb{W}^3} \le \left(\sum_{i=0}^{3} \|x^{(i)}\|^2_{\mathbb{L}_2}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \|x'''\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\frac{15}{8}} M_0.$$

Следовательно, в силу ограниченности вложения Соболева $\mathbb{W}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$

$$\|x\|_{\mathbb{C}^2} \le C\|x\|_{\mathbb{W}^3} \le C\sqrt{\frac{15}{8}} M_0 =: M_1, \tag{16}$$

где C – постоянная вложения Соболева $\mathbb{W}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$.

Несложно показать, что $\max_{t \in [0,1]} G(t,s) = \dfrac{s^3}{6}, \quad s \in [0,1]$. Тогда на основании (12) имеем

$$\|x\|_{\mathbb{C}} = \lambda \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds \le \int_0^1 \frac{s^3}{6}(a x(s) + b)\, ds \le \frac{a}{24}\|x\|_{\mathbb{C}} + \frac{b}{24}.$$

Откуда

$$\|x\|_{\mathbb{C}} \le \frac{b}{24 - a} =: M_2. \tag{17}$$

Проинтегрировав уравнение (13) на $[0,1]$ с учетом граничного условия $x'''(1) = 0$, получим

$$x'''(t) = \lambda \int_t^1 f(s, x(s))\, ds.$$

Воспользовавшись (11) и (17), имеем

$$\|x'''\|_{\mathbb{C}} = \lambda \int_0^1 f(s, x(s))\, ds \le \int_0^1 (ax(s) + b)\, ds \le a\|x\|_{\mathbb{C}} + b \le aM_2 + b =: M_3. \tag{18}$$

Окончательно из (16) и (18) заключаем, что

$$\|x\|_{\mathbb{C}^3} = \max\{\|x\|_{\mathbb{C}^2}, \|x'''\|_{\mathbb{C}}\} = \max\{M_1, M_3\} =: M.$$

Это означает, что множество положительных решений (12) ограничено в $\mathbb{C}^3$. Согласно теореме Лере – Шаудера оператор A имеет неподвижную точку в $\mathbb{C}^3$, что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения задачи (1)–(3).

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Кроме того, предположим, что существует число* $0 \le \alpha < 4$ *такое, что*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le \alpha |y_1 - y_2|, \tag{19}$$

для всех $(t, y_1, y_2) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. *Тогда краевая задача* (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^4$ – два различных положительных решения задачи (1)–(3). Положим $x = x_2 - x_1$ и $h = F(x_2) - F(x_1)$. Имеем $x = x_2 - x_1 = Ax_2 - Ax_1 = G(F(x_2)) - G(F(x_1)) = Gh$. Следовательно, x является решением линейной задачи (4)–(6) и удовлетворяет уравнению

$$x^{(4)}(t) = -[F(x_2)(t) - F(x_1)(t)], \quad t \in [0,1].$$

Умножая это уравнение на $-x''(t) = -(x_2''(t) - x_1''(t))$, воспользовавшись условием (19) получим

$$\begin{aligned} -x^{(4)}(t)x''(t) &= [F(x_2)(t) - F(x_1)(t)](x_2''(t) - x_1''(t)) \\ &\le \alpha(x_2(t) - x_1(t))(x_2''(t) - x_1''(t)) = \alpha x(t)x''(t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство на $[0,1]$ и используя лемму 2.1, получим

$$\|x'''\|^2_{\mathbb{L}_2} \le \alpha \|x\|_{\mathbb{L}_2} \|x''\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{\alpha}{4} \|x'''\|^2_{\mathbb{L}_2}.$$

Поскольку $\alpha < 4$, из этого неравенства следует, что $\|x'''\|_{\mathbb{L}_2} = 0$. В то же время из леммы 2.1 вытекает, что $\|x\|_{\mathbb{L}_2} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \|x'''\|_{\mathbb{L}_2}$, откуда $\|x\|_{\mathbb{L}_2} = 0$. Следовательно $x_1 = x_2$. Это означает, что краевая задача (1)–(3) имеет только одно положительное решение.

3. Пример. Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) = -2\sqrt{x(t) + \beta}, \qquad 0 < t < 1, \tag{20}$$

$$x(0) = 0, \tag{21}$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(1) = 0, \quad x'''(1) = 0, \tag{22}$$

где $\beta > \frac{1}{16}$.

Проверим, что соответствующая нелинейная составляющая $f(t, y_0) = 2\sqrt{y_0 + \beta}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Взяв $a = 1$ и $b = \beta + 1$, для каждого $(t, y_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$ имеем

$$f(t, y_0) = 2\sqrt{y_0 + \beta} \le y_0 + \beta + 1.$$

Следовательно, f удовлетворяет условию (11) и в силу теоремы 2.1 краевая задача (20)–(22) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Очевидно, функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$. Тогда, как следует из формулы конечных приращений, она удовлетворяет условию (19) с постоянной

$$\alpha = \max_{(t, y_0) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+} |f_x'(t, y_0)| = \max_{y_0 \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{y_0 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

С учетом ограничений на β легко видеть, что $\alpha \in (0,4)$. Следовательно в силу теоремы 2.2 краевая задача (20)–(22) имеет единственное положительное решение.

4. Заключение. В работе рассмотрена краевая задача (1)–(3), моделирующая деформацию состояния равновесия консольной балки. В подлинейном случае с помощью теоремы Лере – Шаудера доказано существование хотя бы одного положительного решения рассматриваемой задачи. Кроме того, при выполнении условия (19) показано, что данная задача имеет только единственное положительное решение. Приведен соответствующий пример, иллюстрирующий выполнение условий теорем существования и единственности положительного решения задачи (1)–(3).

Список литературы

1. Aftabizadeh A.R. Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 1986;116:415–426.
2. Gupta C.P. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation. *Appl. Anal.* 1988;26:289–304.
3. Yao Q. Monotonically iterative method of nonlinear cantilever beam equations. *Appl. Math. Comput.* 2008;205:432–437.
4. Infante G., Pietramala P. A cantilever equation with nonlinear boundary conditions. *Electron. J. Qual. Theory Differ.Equ.* 2009;15:1–14.
5. Alves E., Ma T.F., Pelicer M.L. Monotone positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions. *Nonlinear Anal.* 2009;71:3834–3841.
6. Cabada A., Tersian S. Multiplicity of solutions of a two point boundary value problem for a fourth-order equation. *Appl. Math. Comput.* 2013;219:5261–5267.
7. Абдурагимов Э.И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия.* 2014;10(121):9–16.
8. Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка. *Вестник российских университетов. Математика.* 2021;136(25):341–347.
9. Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. *Математические заметки СВФУ.* 2022;4(29):3–10.

References

1. Aftabizadeh AR. Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 1986;116:415–426.
2. Gupta CP. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation. *Appl. Anal.* 1988;26:289–304.
3. Yao Q. Monotonically iterative method of nonlinear cantilever beam equations. *Appl. Math. Comput.* 2008;205:432–437.
4. Infante G., Pietramala P. A cantilever equation with nonlinear boundary conditions. *Electron. J. Qual. Theory Differ.Equ.* 2009;15:1–14.
5. Alves E., Ma TF., Pelicer ML. Monotone positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions. *Nonlinear Anal.* 2009;71:3834–3841.
6. Cabada A., Tersian S. Multiplicity of solutions of a two point boundary value problem for a fourth-order equation. *Appl. Math. Comput.* 2013;219:5261–5267.
7. Abduragimov EI. Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series.* 2014;10(121):9–16. (In Russian)
8. Abduragimov GE., Abduragimova PE., Kuramagomedova MM. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order. *Russian Univesities Reports. Mathematics.* 2021;136(25):341–347. (In Russian)
9. Abduragimov GE., Abduragimova PE., Kuramagomedova MM. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a fourth-order nonlinear ordinary differential equation. *Mathematical notes of NEFU.* 2022;4(29):3–10. (In Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.07.2024
Поступила после рецензирования 14.08.2024
Принята к публикации 20.08.2024

Received July 4, 2024
Revised August 14, 2024
Accepted August 20, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Абдурагимов Гусен Эльдерханович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Gusen E. Abduragimov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assosiate Professor, Assosiate Professor of the Department of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, Russia

К содержанию