

# РЕГИОНАЛЬНАЯ И МУНИЦИПАЛЬНАЯ ЭКОНОМИКА REGIONAL AND MUNICIPAL ECONOMY

УДК 330.341, 519.86

DOI 10.52575/2687-0932-2024-51-1-5-17

## Анализ, моделирование и прогнозирование динамики валового регионального продукта на основе производственной функции

**Вавилова Д.Д., Зерари Р.**

Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова  
Россия, 426069, Удмуртская Республика, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7  
E-mail: vavilova\_dd@mail.ru, rayane.zerari20@gmail.com

**Аннотация.** Валовой региональный продукт выступает ключевым показателем социально-экономического развития и, одновременно, результатом производственного процесса на уровне региона. Математическое представление взаимосвязи результата производственного процесса с различными факторами, как правило, описывается производственной функцией. В настоящем исследовании отражена методика построения производственной функции Кобба – Дугласа для выявления зависимости валового регионального продукта от таких факторов производства, как трудовые ресурсы, производственный капитал и инвестиции. Анализ, моделирование и прогнозирование динамики валового регионального продукта выполнены на примере одного из регионов Российской Федерации – Удмуртской Республики. Статистической базой исследования выступают годовые данные по социально-экономическим показателям Удмуртской Республики за период 2000–2022 гг. Оценка параметров производственной функции показала, что в экономической системе региона присутствует дефицит трудовых ресурсов. Что касается прогноза динамики валового регионального продукта Удмуртской Республики, то до 2030 года ожидается снижение его темпа в среднем на 0,9 % в год (в сопоставимых ценах 2022 года).

**Ключевые слова:** валовой региональный продукт, производственный капитал, трудовые ресурсы, инвестиции, производственная функция, Удмуртская Республика

**Для цитирования:** Вавилова Д.Д., Зерари Р. 2024. Анализ, моделирование и прогнозирование динамики валового регионального продукта на основе производственной функции. Экономика. Информатика, 51(1): 5–17. DOI 10.52575/2687-0932-2024-51-1-5-17

## Analysis, Modeling and Forecasting of the Gross Regional Product Dynamics Based on the Production Function

**Diana D. Vavilova, Rayane Zerari**

Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
7 Studentskaya St, Izhevsk, Udmurt Republic, 426069, Russia  
E-mail : vavilova\_dd@mail.ru, rayane.zerari20@gmail.com

**Abstract.** The gross regional product is a key indicator of socio-economic development and the result of the production process at the regional level. The mathematical representation of the relationship between the result of the production process and various factors is usually described by the production function. This study reflects the methodology of constructing the Cobb-Douglas production function to identify the relationship between the gross regional product and such factors of production as labor, production capital and investment. The analysis, modeling and forecasting of the dynamics of the gross regional product are carried out on one of the regions of the Russian Federation – the Udmurt Republic. The statistical base is the annual data on socio-economic indicators of the Udmurt Republic for the period 2000-2022. As a result of the analysis of the production function, it was revealed that there is a shortage of labor resources in the economic system of the region. As for the forecast of the dynamics of the Udmurt Republic's gross regional product at comparable prices in 2022, by 2030 its rate of decline will be expected to average 0.9 % per year.



**Keywords:** gross regional product, productive capital, labor resources, investments, production function, Udmurt Republic

**For citation:** Vavilova D.D., Zerari R. 2024. Analysis, Modeling and Forecasting of the Gross Regional Product Dynamics Based on the Production Function. *Economics. Information technologies*, 51(1): 5–17. DOI 10.52575/2687-0932-2024-51-1-5-17

## Введение

Известно, что трансформации, происходящие в государстве, требуют изменений на уровне ее регионов. Это особенно важно для Российской Федерации, состоящей из множества субъектов, каждый из которых имеет свой собственный вектор развития [Базарова, Горюнова, 2022; Егорова, Кондрашова, Шевырталов, 2022]. Если не учитывать траекторию развития региона, то принятие большинства управленческих решений в масштабе государства будет иметь негативные последствия. Таким образом, анализ и прогноз социально-экономического развития конкретного региона является особо важной задачей.

Социально-экономическое развитие региона выступает компонентом государственного регулирования, предназначенным для анализа и прогноза будущего состояния региональной экономики [Михайлова, 2022]. Ключевым показателем социально-экономического развития и, одновременно, результатом производственного процесса на уровне региона принято считать валовой региональный продукт (ВРП) [Кетова, 2007; Авдеева, 2020; Красс, Чупрынов, 2023].

На динамику ВРП оказывают влияние различные факторы производства. Оценить это влияние без математического инструментария невозможно. Математическое представление взаимосвязи результата производственного процесса с различными факторами, как правило, описывается производственной функцией [Ларин, 2020; Файзуллин, Абашева, Чиченков, 2020]. Существуют различные производственные функции, однако широкое распространение до сих пор имеет функция Кобба – Дугласа [Базилевский, 2020; Марыганова, Шапиро, 2020; Мухин, 2020]. Она представляет собой математическую модель зависимости результата производства от трудовых и производственных ресурсов.

В настоящем исследовании отражена методика построения производственной функции Кобба – Дугласа с целью выявления взаимосвязи динамики валового регионального продукта от таких факторов производства, как трудовые ресурсы, производственный капитал и инвестиции. Алгоритм построения производственной функции, а также последующий анализ и прогноз динамики валового регионального продукта выполнен на примере одного из регионов Российской Федерации – Удмуртской Республики.

## Объекты и методы исследования

Для построения производственной функции региональной социально-экономической системы первоначально требуется собрать статистические данные по следующим показателям:

- валовой региональный продукт – это валовая добавленная стоимость суммарного производства товаров, работ и услуг в региональной экономике, выраженная в денежных единицах;
- численность трудовых ресурсов – это часть населения, которая способна заниматься общественно полезной деятельностью благодаря своему физическому развитию, образованию и профессионально-квалификационному уровню;
- производственный капитал – это основные производственные фонды, которые используются для производства как материальных, так и нематериальных благ, и выражаются в денежной форме;
- объем инвестиций – это долгосрочные или среднесрочные капиталовложения в производственно-хозяйственный процесс.

Информационной базой для анализа, моделирования и прогнозирования валового регионального продукта от ряда факторов послужили официальные статистические данные по Удмуртской Республике за период 2000–2022 гг. [Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики при Удмуртской Республике, 2024]. Они представлены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Основные социально-экономические показатели Удмуртской Республики за период 2000–2022 гг. (денежные величины представлены в текущих ценах)

Main socio-economic indicators of the Udmurt Republic for the period 2000–2022 (monetary values are presented in current prices)

Год	Валовой региональный продукт, млрд руб.	Трудовые ресурсы, тыс. чел.	Производственный капитал, млрд руб.	Инвестиции, млрд руб.
2000	53,31	809,0	184,56	9,90
2001	65,55	799,8	220,65	12,08
2002	78,35	821,2	254,76	14,74
2003	89,03	808,3	278,76	17,98
2004	100,83	803,0	315,52	21,94
2005	140,00	823,0	368,30	26,87
2006	164,85	846,5	394,88	34,31
2007	205,65	838,4	484,36	44,56
2008	243,14	839,4	553,39	53,53
2009	230,94	854,8	592,06	40,45
2010	274,58	831,9	650,85	51,14
2011	335,98	837,7	753,97	62,31
2012	372,78	829,7	817,04	64,22
2013	405,13	828,4	870,23	82,67
2014	450,55	822,8	974,79	91,57
2015	518,00	820,5	1040,61	81,84
2016	570,25	806,5	1169,61	87,12
2017	592,04	788,7	1245,80	83,70
2018	679,94	781,2	1290,55	96,97
2019	722,85	761,4	2269,46	105,78
2020	684,43	769,1	2437,50	120,46
2021	841,94	759,6	2687,08	125,35
2022	909,80	738,7	2962,20	137,00

Чтобы оценить влияние факторов производства на валовой региональный продукт, используется производственная функция Кобба – Дугласа в виде [Русяк, 2003]:

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}, \quad (1)$$

где  $Y$  – валовой региональный продукт (млрд руб.);  $L$  – численность трудовых ресурсов (тыс. чел.);  $K$  – используемый производственный капитал в стоимостном выражении (млрд руб.);  $\alpha$  – коэффициент эластичности объема производства  $Y$  к изменению численности трудовых ресурсов  $L$ ;  $\beta$  – коэффициент эластичности объема производства  $Y$  к изменению производственного капитала  $K$ ;  $A$  – технологический коэффициент.

В указанной выше модели Кобба – Дугласа неизвестными параметрами являются коэффициенты  $A, \alpha, \beta$ . Для их идентификации используется метод наименьших квадратов [Ketova, 2020], основанный на минимизации суммы квадратов отклонений модельных значений от реальных (статистических) для каждого момента времени  $t$ :  $\sum_{t=1}^N (\hat{Y}_t - Y_t)^2 \rightarrow \min$ .

После оценки параметров производственной функции выполняется расчет показателей качества подобранной модели [Вавилова, 2020]:



- коэффициент детерминации модели:  $R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (\hat{Y}_t - Y_t)^2}{\sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2}$ ;
- средняя ошибка аппроксимации:  $\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left| \frac{\hat{Y}_t - Y_t}{Y_t} \right| \cdot 100\%$ .

В указанных выше формулах  $\hat{Y}_t$  – это модельное значение уровня ряда в момент времени  $t$ , рассчитанное после оценки параметров производственной функции ( $\hat{Y}_t = A \cdot L_t^\alpha \cdot K_t^\beta$ ). Значение  $Y_t$  – статистическое значение уровня ряда в момент времени  $t$ ,  $\bar{Y}$  – среднее значение уровня ряда  $\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t$ ,  $N$  – количество наблюдений.

### Результаты и их обсуждение

#### 1. Алгоритм построения производственной функции Кобба – Дугласа

Для моделирования динамики валового регионального продукта Удмуртской Республики с использованием производственной функции показатели, выраженные в денежной форме в табл. 1, приведены к сопоставимым ценам 2022 года. Для этого использован индекс-дефлятор [Федеральная служба государственной статистики, 2024]. Приведенные к ценам 2022 года показатели отражены в табл. 2.

Таблица 2  
Table 2

Основные социально-экономические показатели Удмуртской Республики  
за период 2000–2022 гг. (в сопоставимых ценах 2022 года)  
Main socio-economic indicators of the Udmurt Republic for the period 2000–2022  
(in comparable 2022 prices)

Год ( $t$ )	ВРП в ценах 2022 года, млрд руб. ( $Y_t$ )	Производственный капитал в ценах 2022 года, млрд руб. ( $K_t$ )	Инвестиции в ценах 2022 года, млрд руб. ( $I_t$ )
2000	553,578	1916,590	102,853
2001	584,368	1967,100	107,715
2002	604,106	1964,444	113,664
2003	603,374	1889,124	121,876
2004	568,107	1777,690	123,617
2005	661,117	1739,302	126,917
2006	675,943	1619,167	140,692
2007	740,951	1745,175	160,568
2008	742,644	1690,328	163,522
2009	691,600	1773,090	121,137
2010	720,125	1706,978	134,144
2011	760,192	1705,921	140,983
2012	774,463	1697,421	133,420
2013	799,143	1716,604	163,089
2014	826,813	1788,870	168,044
2015	886,338	1780,577	140,045
2016	948,764	1945,952	144,960
2017	934,986	1967,453	132,193
2018	976,196	1852,861	139,233
2019	1005,004	3155,330	147,071
2020	943,121	3358,803	165,994
2021	975,001	3111,765	145,166
2022	909,800	2962,204	137,003

Производственная функция Кобба – Дугласа (1) представляет собой степенную функцию мультипликативного вида. Оценим ее параметры в предположении, что  $\alpha + \beta = 1$ , т. е. что отдача от масштаба производства постоянна [Айвазян, Мхитарян, 2008]. В этом случае функция (1) примет вид:

$$\frac{Y}{L} = A \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^\beta. \quad (2)$$

Далее прологарифмируем правую и левую часть уравнения (2):

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = \ln A + \beta \cdot \ln\left(\frac{K}{L}\right), \quad (3)$$

и введем замены:  $y = \ln\left(\frac{Y}{L}\right)$ ,  $a = \ln A$ ,  $k = \ln\left(\frac{K}{L}\right)$ . После замен функция (3) будет выглядеть следующим образом, где  $a, \beta$  – неизвестные параметры, требующие идентификации:

$$y = a + \beta \cdot k. \quad (4)$$

Результаты расчета показателей по Удмуртской Республике для оценки параметров модели (4) приведены в табл. 3.

Таблица 3  
Table 3

Результаты расчета показателей для оценки параметров производственной функции Удмуртской Республики за период 2000–2022 гг.  
Results of calculation of indicators for assessing the parameters of the production function of the Udmurt Republic for the period 2000–2022

Год ( $t$ )	ВРП, млрд руб. ( $Y_t$ )	Трудовые ресурсы, тыс. чел. ( $L_t$ )	Производ- ствен- ный капитал, млрд руб. ( $K_t$ )	ВРП на одного работающего, млн руб./чел. ( $\frac{Y}{L}$ ) <sub><math>t</math></sub>	Фондовоору- женность, млн руб./чел. ( $\frac{K}{L}$ ) <sub><math>t</math></sub>	$y_t = \ln\left(\frac{Y}{L}\right)_t$	$k_t = \ln\left(\frac{K}{L}\right)_t$
2000	553,578	809,0	1916,590	0,684	2,369	-0,379	0,862
2001	584,368	799,8	1967,100	0,730	2,459	-0,313	0,899
2002	604,106	821,2	1964,444	0,735	2,392	-0,307	0,872
2003	603,374	808,3	1889,124	0,746	2,337	-0,292	0,848
2004	568,107	803,0	1777,690	0,707	2,213	-0,346	0,794
2005	661,117	823,0	1739,302	0,803	2,113	-0,219	0,748
2006	675,943	846,5	1619,167	0,798	1,912	-0,225	0,648
2007	740,951	838,4	1745,175	0,883	2,081	-0,123	0,733
2008	742,644	839,4	1690,328	0,884	2,013	-0,122	0,699
2009	691,600	854,8	1773,090	0,809	2,074	-0,211	0,729
2010	720,125	831,9	1706,978	0,865	2,051	-0,144	0,718
2011	760,192	837,7	1705,921	0,907	2,036	-0,097	0,711
2012	774,463	829,7	1697,421	0,933	2,045	-0,068	0,715
2013	799,143	828,4	1716,604	0,964	2,072	-0,035	0,728
2014	826,813	822,8	1788,870	1,004	2,174	0,004	0,776
2015	886,338	820,5	1780,577	1,080	2,170	0,077	0,774
2016	948,764	806,5	1945,952	1,176	2,412	0,162	0,880
2017	934,986	788,7	1967,453	1,185	2,494	0,170	0,914
2018	976,196	781,2	1852,861	1,249	2,371	0,222	0,863
2019	100,004	761,4	3155,330	1,319	4,144	0,277	1,421
2020	943,121	769,1	3358,803	1,226	4,367	0,203	1,474
2021	975,001	759,6	3111,765	1,283	4,096	0,249	1,410
2022	909,800	738,7	2962,204	1,231	4,010	0,208	1,388



Производственная функция Кобба – Дугласа, построенная для социально-экономической системы Удмуртской Республики, параметры которой определены методом наименьших квадратов, имеет вид в линейной форме – (5), в степенной форме – (6):

$$\hat{y}_t = -0,51 + 0,52 \cdot k_t; \quad (5)$$

$$\hat{Y}_t = 0,59 \cdot L_t^{0,48} \cdot K_t^{0,52}. \quad (6)$$

При этом коэффициент детерминации как модели (5), так и модели (6) составляет  $R^2 = 0,74$ , средняя относительная погрешность аппроксимации равна  $\bar{\delta} = 8,82\%$ .

Проанализируем параметры производственной функции Кобба – Дугласа для Удмуртской Республики (6).

Значение коэффициента  $A = 0,59$  показывает, что в регионе за рассматриваемый период наблюдается невысокий уровень технологического развития.

Коэффициент эластичности по трудовым ресурсам  $\alpha = 0,48$  отражает факт, что при росте численности трудовых ресурсов на 1 % валовой региональный продукт увеличивается в среднем на 0,48 %.

Коэффициент эластичности по производственному капиталу  $\beta = 0,52$  показывает, что увеличение используемых производственных фондов в регионе на 1 % приводит к увеличению объема выпускаемой продукции, работ и услуг в среднем на 0,52 %.

Если проанализировать соотношение коэффициентов эластичности по факторам производства, то получится величина  $\frac{\alpha}{\beta} = 0,92$ . По данному соотношению можно сделать вывод, что в социально-экономической системе Удмуртской Республики присутствует дефицит трудовых ресурсов.

На рис. 1 представлены статистические данные (в виде точек) и модельные значения (в виде построенной кривой) зависимости ВРП на одного работающего  $\left(\frac{Y}{L}\right)$  от фондовооруженности  $\left(\frac{K}{L}\right)$ .

Далее, чтобы построить прогноз динамики валового регионального продукта на основе производственной функции (6), необходимо располагать информацией о тенденциях изменения факторов производства, а именно о фактической и прогнозной динамике трудовых ресурсов и производственного капитала.

## 2. Анализ и прогноз численности трудовых ресурсов.

Для анализа и прогноза динамики трудовых ресурсов Удмуртской Республики построены трендовые модели. Результаты моделирования приведены в табл. 4.

Согласно показателям качества трендовых моделей, наилучшей моделью для описания динамики трудовых ресурсов является кубическая трендовая модель (см. рис.2). Среди всех моделей она обладает наибольшим коэффициентом детерминации  $R^2 = 0,894$  и наименьшей ошибкой аппроксимации  $\bar{\delta} = 0,96\%$ .

По рис. 2 видно, что динамика трудовых ресурсов Удмуртской Республики за изучаемый период 2000–2022 г. имеет «волнообразный характер». Наибольшая численность трудовых ресурсов зафиксирована в 2009 г. – 854,8 тыс. чел., наименьшая – была в 2022 г. – с показателем 738,7 тыс. чел. По прогнозу ожидается, что численность трудовых ресурсов будет к 2025 году на уровне 697,2 тыс. чел., к 2030 году – 621,3 тыс. чел.

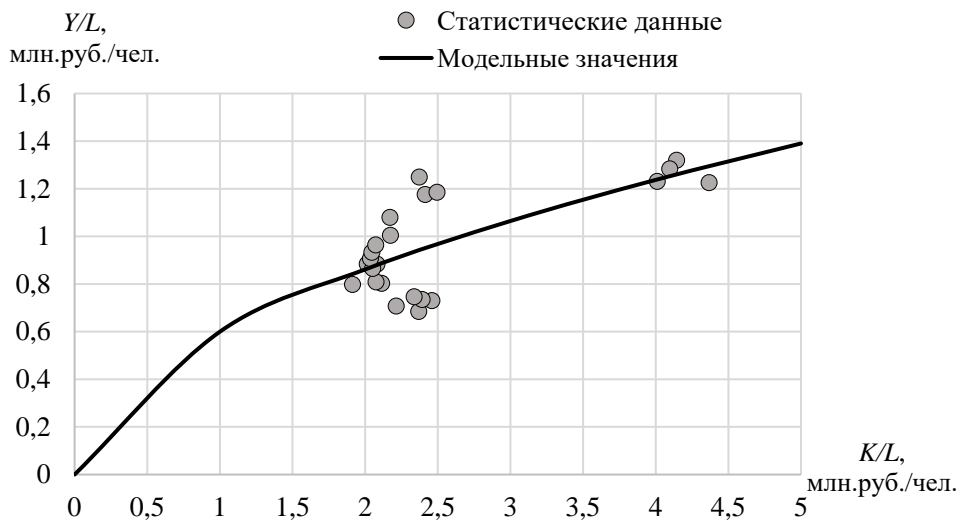


Рис. 1. Зависимость ВРП на одного работающего  $\left(\frac{Y}{L}\right)$  от фондовооруженности  $\left(\frac{K}{L}\right)$

для Удмуртской Республики по данным за период 2000-2022 годы

Fig. 1. Dependence of GRP per worker  $\left(\frac{Y}{L}\right)$  on the capital-labor ratio  $\left(\frac{K}{L}\right)$

for the Udmurt Republic according to data for the period 2000-2022

Примечание. Расчеты авторов

Таблица 4

Table 4

Трендовые модели динамики трудовых ресурсов Удмуртской Республики, построенные по данным за период 2000–2022 гг.

Trend models of the dynamics of labor resources in the Udmurt Republic, constructed according to data for the period 2000-2022

№	Вид модели тренда	Модель тренда	Коэффициент детерминации ( $R^2$ )	Ошибка аппроксимации ( $\delta$ ), %
1	Линейный	$\hat{L}_t = 843,8 - 2,6 \cdot t$	0,331	2,58
2	Логарифмический	$\hat{L}_t = 845,4 - 14,1 \cdot \ln t$	0,117	2,89
3	Квадратический	$\hat{L}_t = 777,4 + 12,3 \cdot t - 0,6 \cdot t^2$	0,889	0,99
4	Кубический	$\hat{L}_t = 767,6 + 16,1 \cdot t - 1,0 \cdot t^2 + 0,001 \cdot t^3$	0,894	0,96
5	Степенной	$\hat{L}_t = 846,6 \cdot t^{-0,018}$	0,121	2,91
6	Экспоненциальный	$\hat{L}_t = 844,6 \cdot e^{-0,003 \cdot t}$	0,337	2,60

### 3. Анализ и прогноз динамики производственного капитала

Построение трендовых моделей для прогноза динамики социально-экономических временных рядов не всегда приводит к адекватным результатам. В частности, можно отметить высокую ошибку аппроксимации трендовых моделей и наличие статистической закономерности в остатках. Для того, чтобы их избежать исследователи используют авторегрессионные модели  $ARIMA(p, q)$ : здесь  $p$  – порядок авторегрессионного процесса,  $q$  – лаг для модели скользящего среднего. В авторегрессионных моделях текущее значение временного ряда, помимо основных факторов, зависит еще и от предыдущих значений, выступающих, в свою очередь, объясняющими переменными [Айвазян, Мхитарян, 2008; Айвазян, Афанасьев, Кудров, 2019].

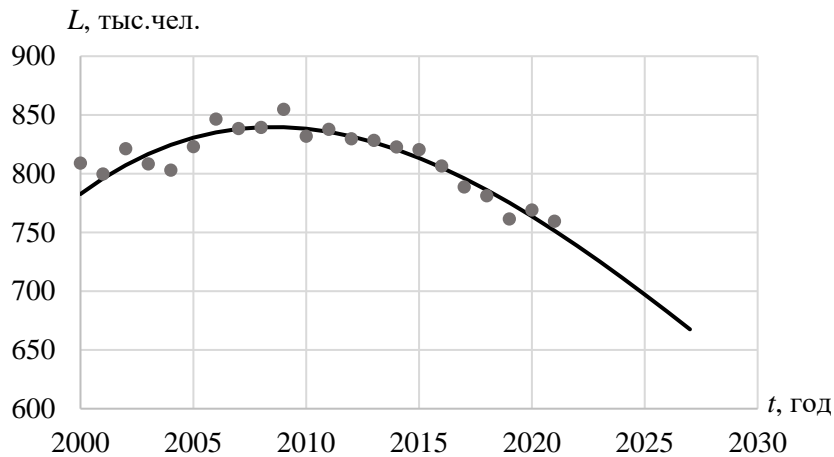


Рис. 2. Динамика трудовых ресурсов Удмуртской Республики и их прогноз по кубической модели тренда

Fig. 2. Dynamics of labor resources in the Udmurt Republic and their forecast according to the cubic trend model

*Примечание.* Расчеты авторов

Исходя из вышеуказанного, логично использовать авторегрессионную модель для моделирования производственного капитала. Производственный капитал формируется за счет капиталовложений и одновременно не исчезает, а постепенно в течение длительного периода переносит свою стоимость на создаваемую продукцию в виде амортизационных отчислений [Самарский, 2018]. Таким образом, величина производственного капитала носит накопительный характер – зависит от величины в предыдущие периоды и от новых инвестиций в него.

Для анализа и прогноза динамики производственного капитала Удмуртской Республики нами предлагается использовать авторегрессионную модель первого порядка в виде:

$$\hat{K}_t = b_0 + b_1 \cdot K_{t-1} + b_2 \cdot I_{t-1}, \quad (7)$$

где  $\hat{K}_t$  – модельное значение величины производственного капитала в момент времени  $t$ ;  $K_{t-1}$  – величина производственного капитала в момент времени  $(t-1)$ ;  $I_{t-1}$  – объем инвестиций в момент времени  $(t-1)$ ;  $b_0, b_1, b_2$  – неизвестные параметры авторегрессионной модели.

Поскольку в модели (7) учитываются инвестиции, то первоначально рассмотрим их динамику. Для анализа и прогноза динамики инвестиций в производственный капитал Удмуртской Республики построены трендовые модели. Результаты моделирования приведены в табл. 5.

Таблица 5

Table 5

Трендовые модели динамики инвестиций Удмуртской Республики, построенные по данным за период 2000–2022 гг. (в ценах 2022 года)

Trend models of investment dynamics in the Udmurt Republic, constructed according to data for the period 2000–2022 (in 2022 prices)

№	Вид модели тренда	Модель тренда	Коэффициент детерминации ( $R^2$ )	Ошибка аппроксимации ( $\delta$ ), %
1	Линейный	$\hat{I}_t = -130,7 + 0,8 \cdot t$	0,093	7,60
2	Логарифмический	$\hat{I}_t = -107,6 + 13,4 \cdot \ln t$	0,134	5,88
3	Квадратический	$\hat{I}_t = 96,4 - 5,8 \cdot t - 0,16 \cdot t^2$	0,405	5,43
4	Кубический	$\hat{I}_t = -100,3 - 4,9 \cdot t - 0,09 \cdot t^2 - 0,002 \cdot t^3$	0,201	5,50
5	Степенной	$\hat{I}_t = 110,5 \cdot t^{0,096}$	0,152	5,94
6	Экспоненциальный	$\hat{I}_t = 130,3 \cdot e^{0,006 \cdot t}$	0,107	7,50



Согласно показателям качества трендовых моделей, представленным в табл. 5, наилучшей моделью для описания динамики инвестиций является квадратичная трендовая модель (см. рис. 3). Среди всех моделей она обладает наибольшим коэффициентом детерминации  $R^2 = 0,405$  и наименьшей ошибкой аппроксимации  $\bar{\delta} = 5,43\%$ .

Инвестиции в производственный капитал Удмуртской Республики в ценах 2022 года показывают динамику роста: с 102,8 млрд руб. в 2000 году до 137,0 млрд руб. в 2022 году. Средний ежегодный темп прироста инвестиций за период 2000–2022 составил 1,9 %. По прогнозу к 2025 году ожидается объем инвестиций на уровне 136,5 млрд руб., к 2030 году – 108,3 млрд руб.

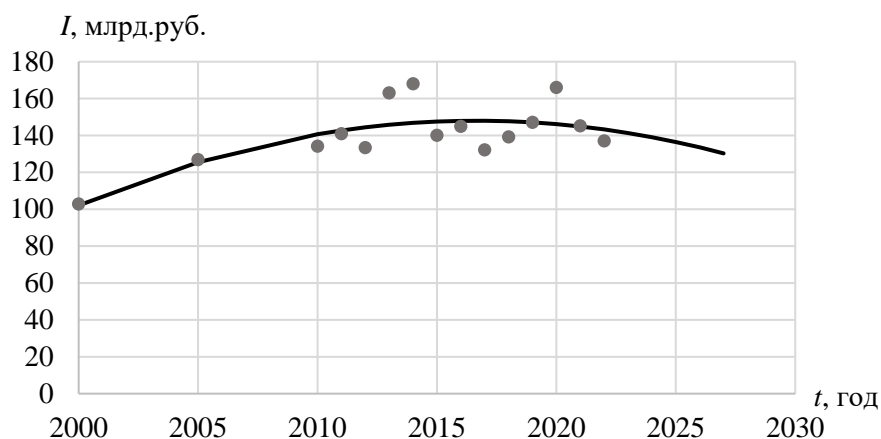


Рис. 3. Динамика инвестиций в производственный капитал Удмуртской Республики и их прогноз по квадратичной модели

Fig. 3. Dynamics of investment in productive capital of the Udmurt Republic and their forecast using a quadratic model

*Примечание.* Расчеты авторов

Результаты моделирования динамики инвестиций в производственный капитал используются для моделирования динамики величины производственного капитала. После оценки параметров авторегрессионной модели с учетом инвестиций получена модель:

$$\hat{K}_t = 55,0 + 0,89 \cdot K_{t-1} + 1,44 \cdot I_{t-1}. \quad (8)$$

Коэффициент детерминации модели (8) равен  $R^2 = 0,708$ . Средняя относительная погрешность аппроксимации составила  $\bar{\delta} = 4,52\%$ .

Динамика производственного капитала Удмуртской Республики и его прогноз по авторегрессионной модели первого порядка с учетом инвестиций (8) представлен на рис. 4.

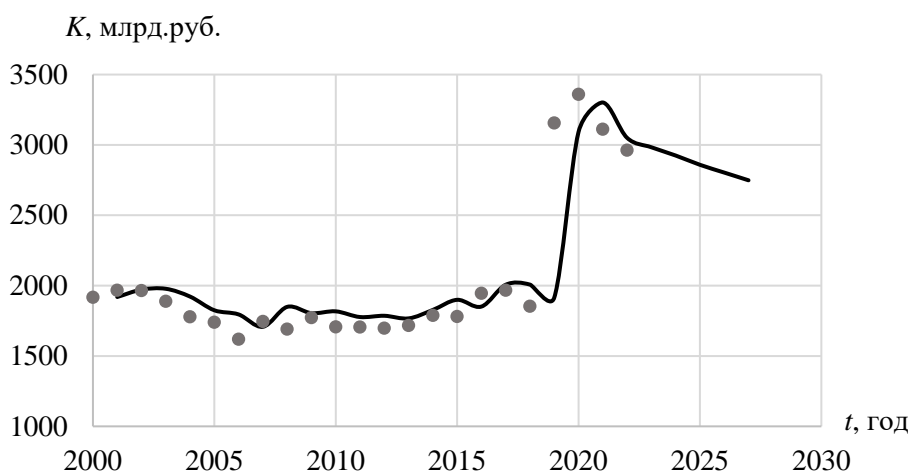


Рис. 4. Динамика производственного капитала Удмуртской Республики и его прогноз по авторегрессионной модели первого порядка с учетом инвестиций

Fig. 4. Dynamics of productive capital of the Udmurt Republic and its forecast according to a first-order autoregressive model taking into account investments

*Примечание.* Расчеты авторов



Производственный капитал показывает динамику роста: с 1916,5 млрд руб. в 2000 году до 2962,2 млрд руб. в 2022 году. Средний ежегодный темп прироста производственного капитала за период 2000–2022 составил 2,9 %. По прогнозу к 2025 году ожидается величина производственного капитала на уровне 2858,6 млрд руб., к 2030 году – 2559,8 млрд руб.

4. Анализ и прогноз динамики валового регионального продукта

Для прогнозирования динамики валового регионального продукта Удмуртской Республики на  $T$  – периодов вперед используется производственная функция вида (6), а также прогнозная динамика факторов производства – численности трудовых ресурсов и величины производственного капитала с учетом динамики инвестиций:  $\hat{Y}_{t+T} = 0,59 \cdot \hat{L}_{t+T}^{0,48} \cdot \hat{K}_{t+T}^{0,52}$ .

Прогнозные значения трудовых ресурсов, производственного капитала и валового регионального продукта Удмуртской Республики на период 2023–2030 гг. представлены в табл. 6.

Таблица 6

Table 6

Прогнозные значения трудовых ресурсов, производственного капитала и валового регионального продукта Удмуртской Республики на период 2023–2030 гг.  
 Forecast values of labor resources, production capital and gross regional product of the Udmurt Republic for the period 2023–2030

Прогнозный год ( $t+T$ )	Прогноз трудовых ресурсов, тыс. чел. ( $\hat{L}_{t+T}$ )	Прогноз производственного капитала, млрд руб. ( $\hat{K}_{t+T}$ )	Прогноз ВРП, млрд руб. ( $\hat{Y}_{t+T}$ )
2023	725,333	2983,193	892,779
2024	711,454	2924,593	875,460
2025	697,144	2858,658	856,744
2026	682,466	2803,523	839,492
2027	667,480	2748,554	822,084
2028	652,249	2686,505	803,430
2029	636,835	2623,732	784,554
2030	621,300	2559,768	765,422

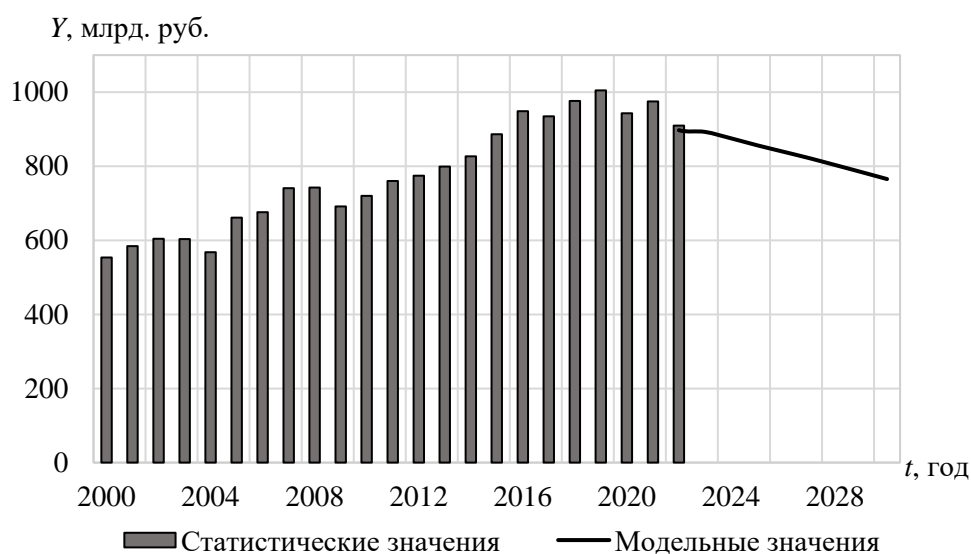


Рис. 5. Фактическая динамика ВРП за период 2000–2022 гг. и его прогноз для Удмуртской Республики до 2030 года в сопоставимых ценах 2022 года  
 Fig. 5. The actual dynamics of GRP for the period 2000–2022 and its forecast for the Udmurt Republic until 2030 at comparable prices in 2022

Примечание. Расчеты авторов

На рис. 5 показаны статистические значения валового регионального продукта Удмуртской Республики за период 2000–2022 гг., а также модельные прогнозируемые значения, полученные по производственной функции Кобба – Дугласа, в ценах 2022 года. Согласно прогнозу, валовой региональный продукт в Удмуртской Республике к 2025 году составит 856,7 млрд руб., что на 5,8 процента ниже, чем в 2022 году. До 2030 года ожидается его темп снижения в среднем на 0,9 % в год (в сопоставимых ценах 2022 года).

### Заключение

В статье представлена методика построения производственной функции Кобба – Дугласа для выявления зависимости валового регионального продукта от таких факторов производства, как трудовые ресурсы, производственный капитал и инвестиции. Оценка параметров производственной функции выполнена для социально-экономической системы Удмуртской Республики по официальным статистическим данным, представленным Росстатом. Анализируемый период данных – 2000–2022 годы; денежные показатели приведены к сопоставимым ценам 2022 года с учетом индекса-дефлятора.

На основе производственной функции построен прогноз динамики валового регионального продукта Удмуртской Республики до 2030 года с учетом тенденций изменения факторов производства. По прогнозу к 2030 году ожидается, что численность трудовых ресурсов в регионе будет на уровне 621,3 тыс. чел., величина производственного капитала составит 2559,8 млрд руб., объем инвестиций – 108,3 млрд руб. Ошибка прогнозирования данных показателей варьируется в диапазоне от 1,0 % до 5,5 %. С учетом этой прогнозной динамики, вплоть до 2030 года, прогнозируется снижение величины валового регионального продукта Удмуртской Республики в среднем на 0,9 % в год в сопоставимых ценах 2022 года.

Чтобы избежать отрицательной динамики изменения валового регионального продукта, необходимо принимать меры. Во-первых, увеличивать внедрение в производственные процессы эффективных технологий: их недостаточный уровень демонстрирует технологический коэффициент производственной функции Кобба – Дугласа. Во-вторых, повышать фондовооруженность предприятий за счет роста величины производственного капитала. В-третьих, что, на наш взгляд, является наиболее весомым фактором роста валового регионального продукта – это увеличение количества и качества трудовых ресурсов. Об этом свидетельствуют коэффициенты эластичности производственной функции, в результате анализа которых выявлено, что в социально-экономической системе Удмуртской Республики присутствует дефицит трудовых ресурсов.

### Список источников

- Айвазян С.А., Мхитарян В.С. 2008. Прикладная статистика и основы эконометрики. М., ЮНИТИ, 1005 с.
- Красс М.С., Чупрынов Б.П. 2023. Математические методы и модели для магистрантов экономики. СПб., Питер, 541 с.
- Марыганова Е.А., Шапиро С.А. Макроэкономика. 2020. Экспресс-Курс. М., КНОРУС, 361 с.
- Самарский А.А. 2018. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М., Физматлит, 320 с.
- Территориальный орган Федеральной службы государственной статистики при Удмуртской Республике. Режим доступа: <https://udmstat.gks.ru/ofstatistics/> (дата обращения 10.01.2024).
- Федеральная служба государственной статистики. Национальные счета. Режим доступа: <https://rosstat.gov.ru/statistics/accounts> (дата обращения 10.01.2024).

### Список литературы

- Авдеева Ю.А. 2020. Построение производственных функций в масштабах России на основе линейных и нелинейных моделей. Новое слово в науке и практике: гипотезы и апробация результатов исследований, 8: 104–108.



- Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю. Кудров А.В. 2019. Индикаторы основных направлений социально-экономического развития и их агрегаты в пространстве характеристик региональной дифференциации. Прикладная эконометрика, 54: 51–69.
- Базарова Э.В., Горюнова Л.А. 2022. Цифровая экономика и социально-экономическое развитие региона. Бизнес. Образование. Право, 4(61): 178–181.
- Базилевский М.П. 2020. Метод построения неэлементарных производственных функций Кобба – Дугласа. Прикладная математика и вопросы управления, 1: 102–115.
- Вавилова Д.Д. 2020. Нейросетевая модель прогнозирования человеческого капитала. Интеллектуальные системы в производстве, Т. 18, 1: 26–35.
- Дюсеменов Д.С., Тюменцев Е.А. 2022. Сравнительный анализ рекуррентных нейронных сетей и модели авторегрессии ARIMA при прогнозировании нестационарных временных рядов. Прикладная математика и фундаментальная информатика, 9 (4): 33–41.
- Егорова Л.И., Кондрашова А.В., Шевырталов Я.А. 2022. Экономико-экологические векторы развития регионов: проблемы и перспективы. Экономика: теория и практика, 3 (67): 15–19.
- Кетова К.В. 2007. Об одной задаче макроэкономической динамики региона с учетом факторов экономического развития. Вестник Ижевского государственного технического университета, (35): 33–40.
- Ларин В.О. 2020. Построение производственных функций экономической системы региона. Дневник науки, 6 (42): 27–40.
- Михайлова А.В. 2022. Влияние экономических санкций на социально-экономическое развитие регионов ДФО Российской Федерации. Региональная экономика и управление: электронный научный журнал, 3(71): 7117.
- Мухин А.А. 2020. Использование функции Кобба – Дугласа при моделировании производственных процессов. Вестник Удмуртского университета. Серия Экономика и право, Т. 30, 6: 822–829.
- Русяк И.Г. 2003. Об одной задаче управления демоэкономическим состоянием региона. Интеллектуальные системы в производстве, 2: 151–160.
- Файзуллин Р.В., Абашева О.В., Чиченков И.И. 2020. Конкурентные преимущества использования интеллектуального капитала. Вестник университета, 6: 55–62.
- Ketova K.V. 2020. Modelling a human capital of an economic system with neural networks. Journal of Physics: Conference Series, 012035.

## References

- Avdeeva Yu.A. 2020. Construction of production functions on a Russian scale based on linear and nonlinear models. A new word in science and practice: hypotheses and testing of research results, 8: 104–108. (in Russian)
- Ayvazyan S.A., Afanasyev M.Yu. Kudrov A.V. 2019. Indicators of the main directions of socio-economic development and their aggregates in the space of characteristics of regional differentiation. Applied econometrics, 54: 51–69. (in Russian)
- Bazarova E.V., Goryunova L.A. 2022. Digital economy and socio-economic development of the region. Business. Education. Law, 4(61): 178–181. (in Russian)
- Bazilevsky M.P. 2020. Method for constructing non-elementary Cobb-Douglas production functions. Applied mathematics and management issues, 1: 102–115. (in Russian)
- Vavilova D.D. 2020. Neural network model for human capital forecasting. Intelligent systems in production, Vol. 18, 1: 26–35. (in Russian)
- Dyusekenov D.S., Tyumentsev E.A. 2022. Comparative analysis of recurrent neural networks and the ARIMA autoregression model in predicting nonstationary time series. Applied Mathematics and Fundamental Computer Science, 9 (4): 33-41. (in Russian)
- Egorova L.I., Kondrashova A.V., Shevyrtalov Ya.A. 2022. Economic and environmental vectors of regional development: problems and prospects. Economics: Theory and Practice, 3 (67):15-19. (in Russian)
- Ketova K.V. 2007. On one problem of macroeconomic dynamics of the region taking into account factors of economic development. Bulletin of Izhevsk State Technical University, (35): 33–40. (in Russian)
- Larin V.O. 2020. Construction of production functions of the regional economic system. Diary of Science, 6 (42): 27–40. (in Russian)
- Mikhailova A.V. 2022. The impact of economic sanctions on the socio-economic development of the regions of the Far Eastern Federal District of the Russian Federation. Regional economics and management: electronic scientific journal, 3(71): 7117. (in Russian)

- Mukhin A.A. 2020. Using the Cobb-Douglas function in industrial process modeling. Bulletin of Udmurt University. Series Economics and Law, Vol. 30, 6: 822–829. (in Russian)
- Rusyak I.G. 2003. About one problem of managing the demo-economic state of the region. Intelligent systems in production, 2: 151–160. (in Russian)
- Faizullin R.V., Abasheva O.V., Chichenkov I.I. 2020. Competitive advantages of using intellectual capital. University Bulletin, 6: 55–62. (in Russian)
- Ketova K.V. 2020. Modeling a human capital of an economic system with neural networks. Journal of Physics: Conference Series, 012035.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 09.02.2024

Received February 09, 2024

Поступила после рецензирования 26.02.2024

Revised February 26, 2024

Принята к публикации 29.02.2024

Accepted February 29, 2024

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Вавилова Дайана Дамировна**, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия

**Diana D. Vavilova**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia

**Зерари Раян**, магистрант кафедры прикладной математики и информационных технологий, Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия

**Rayane Zerari**, master's student of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russia