УДК 621.396.8

Жиляков Е.Г. [Zhilyakov E.G.],
Белов С.П. [Belov S.P.],
Романькова Т.С. [Romankova T.S.],
Олейник И.И. [Oleinik I.I.]

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Processing of signals in linear systems

Восстановлением сигналов принято называть компенсацию искажений, которые возникают при их регистрации. Основной исследуемой в литературе проблемой является неустойчивость вычисляемых оценок входных воздействий к воздействиям ошибок регистрации откликов. Поэтому разработаны различные приемы регуляризации исходных уравнений на основе преобразования их в другое уравнение, решение которого вычисляется устойчиво. Наиболее известным приемом является метод регуляризации А.Н. Тихонова. Вместе с тем, в данной работе показано, что в отклике может отсутствовать часть информации о входном воздействии, то есть даже при отсутствии погрешностей измерений получаемое решение будет приближенным. Предложен способ оценивания невосстанавливаемых искажений, обусловленных самим оператором регистрирующей системы, что может быть использовано на этапе её синтеза. Получена линейная форма представления доступной для восстановления компоненты воздействия через импульсную характеристику, так что задача восстановления сводится к вычислению её коэффициентов. Предложен способ регуляризации возникающих при этом систем линейных алгебраических уравнений на основе адаптивного оценивания уровней погрешностей регистрации непосредственно по зарегистрированному отклику.

Recovering signals is usually called compensation of distortions that occur when they are registered. The main problem studied in the literature is the instability of the calculated estimates of the input effects to the effects of errors in the registration of responses. Therefore, various methods of regularizing the initial equations are developed on the basis of their transformation into another equation, the solution of which is calculated stably. The most famous technique is the Tikhonov A.N. method of regularization. At the same time, in this paper it is shown that some of the information on the input action may be missing in the response, that is, even if there are no measurement errors, the resulting solution will be approximate. A method for estimating non-recoverable distortions caused by the operator of the recording system is proposed, which can be used at the stage of its synthesis. A linear form of the representation of the impact component accessible for restoration through the impulse response is obtained, so that the restoration problem is reduced to the calculation of its coefficients. A method for regularizing the systems of linear algebraic equations arising on this basis is proposed on the basis of adaptive estimation of the error levels of registration directly from the registered response.

Ключевые слова: Восстановлением сигналов, компенсация искажений, оператор регистрирующей системы, способ регуляризации.
Key words: signal reconstruction, distortion compensation, register system operator, regularization method.

Введение

В рамках данной работы под сигналом понимается функция времени, в параметрах которой содержится некоторая информация о реальных процессах или явлениях. Такими сигналами в частности являются канальные сигналы систем передачи информации, отклики на зондирующие воздействия в радиолокации, входные воздействия в информационно-измерительных системах и т.д. Реальные сигналы поступают на входы некоторых систем и проявляются в виде откликов на их выходах. Во многих случаях адекватной моделью преобразования сигналов в регистрирующих системах служит интегральное соотношение типа свертки [1–3]

$$u(t)=\int_0^{T_f} r(t-\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где T_f – длительность сигнала (входного воздействия) f;
$r(z)$ – ядро интегрального соотношения (аппаратная функция системы), удовлетворяющая условию физической реализуемости

$$r(z)\equiv 0,\ \forall z<0 \qquad (2)$$

В дальнейшем предполагается, что область определения отклика $u(t)$ $0 \le t \le T_u$ не меньше чем длительность входного воздействия, т.е. имеет место неравенство

$$T_f \le T_u. \qquad (3)$$

Кроме того, считаем, что все, входящие в соотношение (1) функции непрерывны, вещественны и имеют ограниченную евклидову норму

$$\|f\|^2=\int_0^{T_f} f^2(t)dt<\infty;$$
$$\|u\|^2=\int_0^{T_u} u^2(t)dt<\infty;$$
$$\|r_t\|^2=\int_0 r^2(t-\tau)d\tau<\infty. \qquad (4)$$

Восстановлением сигналов принято называть оценивание при известном ядре входных воздействий на основе обработки результатов регистрации откликов (эмпирических данных).

Материалы и методы исследования

Функционирование реальных регистрирующих систем связано с дискретизацией области определения отклика и наличием искажений за счет неконтролируемых воздействий посторонних факторов (помехи, шумы аппаратуры) [2,4]. В соответствии с этим модель регистрации сигналов принимает вид

$$w_i=u(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)=\int_0^{T_f} \phi_i(\tau)f(\tau)d\tau+\varepsilon_i,\ i=1,...,N, \qquad (5)$$

где Δt – интервал дискретизации области определения отклика

$$\Delta t = T_u / (N-1); \tag{6}$$

$$\phi_i(\tau) = r(i\Delta t - \tau),\ i = 1,...,N. \tag{7}$$

Восстановление сигналов по результатам регистрации откликов является обратной задачей [6, 7]. Одна из проблем её решения возникает в виду того, что в отклике может отсутствовать часть информации об искомом сигнале.

В самом деле, известно [4] , что любая функция из L_2 может быть единственным образом представлена в виде суммы двух ортогональных компонент

$$f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau), \tag{8}$$

где f_1 – элемент линеала

$$f_1(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i(\tau), \tag{9}$$

а вторая компонента ортогональна ко всем функциям вида (7)

$$(f_2, \phi_i) = \int_0^{T_f} f_2(\tau)\phi_i(\tau)d\tau = 0, i = 1,...,N. \tag{10}$$

Таким образом, вторая компонента искомого сигнала (8) не проявляется в отклике. Иными словами в общем случае доступна для восстановления только компонента вида (9).

Рассмотрим возможность априорного анализа свойств доступных для восстановления компонент, когда заданы ядро интегрального соотношения (1), шаг дискретизации области определения отклика и модель входного воздействия (искомого сигнала).

Очевидно, что такой анализ связан с моделированием прямой задачи – формирования отклика, для чего в частности необходимо вычислять совокупность интегралов вида (10). В качестве квадратурной формулы используем формулу прямоугольников (крышка сверху означает оценку отклика)

$$\hat{u}_i = \Delta\tau \sum_{k=1}^{M} \phi_{ik} f_k, \tag{11}$$

где $\Delta\tau$ – интервал дискретизации области интегрирования, определяемый по аналогии с соотношением (6);

$$\hat{u}_i \approx u(i\Delta t);\ \phi_{ik} = \phi_i(k\Delta\tau);\ f_k = f(k\Delta\tau), k = 1,...,M.$$

В дальнейшем предполагается выполнение следующего неравенства

$$N \le M \tag{12}$$

Положим $\boldsymbol{\Phi} = \{\Delta\tau\phi_{ik}\}, i = 1,...,N : k = 1,...,M,$ (13)

так что совокупность соотношений (11) аппроксимируется приближенным матричным равенством

$$\vec{u} = (u_1,...,u_N)' \approx \Phi\vec{f}, \quad \vec{f} = (f_1,...,f_M)'. \tag{14}$$

В свою очередь для аппроксимации компоненты (9) естественно использовать векторное представление

$$\vec{f}_1 = \Phi'\vec{\alpha}. \tag{15}$$

При этом вторая из компонент (8) определяется соотношением

$$\vec{f}_2 = \vec{f} - \Phi'\vec{\alpha}, \tag{16}$$

так что в соответствии с (10) должно выполняться соотношение ортогональности

$$\Phi\vec{f}_2 = \Phi\vec{f} - \Phi\Phi'\vec{\alpha} = \vec{0}. \tag{17}$$

Так как соотношение (15) определяет ортогональную проекцию вектора отсчетов искомого сигнала, то компонента (16) должна иметь минимальную евклидову норму. Поэтому вектор коэффициентов $\vec{\alpha}$ должен удовлетворять следующему вариационному условию

$$\mathrm{F}(\vec{\alpha}) = \|\vec{f} - \Phi'\vec{\alpha}\|^2 = \min F(\vec{\beta}) = \min \|\vec{f} - \Phi'\vec{\beta}\|^2, \forall\vec{\beta} \in R^N, \tag{18}$$

Представляет интерес получить метод вычисления проекции (15) при заданных векторе f и матрице Φ, что позволяет провести априорный анализ доступных для восстановления компонент на основе моделирования.

Известно [5], что матрицы вида (12) могут быть представлены в виде сингулярного разложения

$$\Phi = QL^{1/2}G', \tag{19}$$

где штрих означает операцию транспонирования;

$$L = diag(\lambda_1,..,\lambda_N); \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N \geq 0; \tag{20}$$

Q – ортогональная матрица собственных векторов симметричной неотрицательно определенной матрицы

$$A = \Phi\Phi', \tag{21}$$

$$AQ = QL; \tag{22}$$

$$Q = \{\vec{q}_1 ... \vec{q}_N\}, \vec{q}_i = (q_{1i}, ..., q_{Ni})', i = 1, ..., N; \tag{23}$$

$$Q'Q = diag(1, ..., 1); \tag{24}$$

Если ранг матрицы (13) равен K, причем

$$K < N, \tag{25}$$

то будут иметь место равенства

$$\lambda_{K+1} = \lambda_{K+2} = ... = \lambda_N = 0. \tag{26}$$

В том случае можно исключить столбцы матрицы Q, соответствующие нулевым собственным числам.

В свою очередь G – в общем случае ортогональная матрица размерности $M * N$, столбцы которой представляют собой собственные векторы симметричной неотрицательно определенной матрицы

$$B = \Phi'\Phi, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{BG = GC}; \ \boldsymbol{C = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)}; \tag{28}$$

$$G'G = diag(1, ..., 1). \tag{29}$$

Справедливо следующее.

Утверждение 1. При заданных векторе $\vec{f}$ и матрице Ф для компоненты (15), удовлетворяющей условию (17), справедливо соотношение

$$\vec{f}_1 = GG'\vec{f}. \tag{30}$$

Доказательство. Легко показать, что вектор

$$\vec{f}_2 = \vec{f} - GG'\vec{f} \tag{31}$$

ортогонален ко всем строкам матрицы (13). Для этого (31) слева и справа умножим на эту матрицу. В результате имеем

$$\Phi\vec{f}_2 = (\Phi - \Phi GG')\vec{f} = 0\vec{f}\,. \qquad (32)$$

Нулевая матрица в скобках получается в результате подстановки разложения (19) с учетом свойства (29).

Рассмотрим теперь вариационное условие (18) и представим его правую часть в следующем виде

$$F(\vec{\beta}) = \|\vec{f}\|^2 - 2\vec{\beta}'\Phi\vec{f} + \vec{\beta}'\Phi\Phi'\vec{\beta}$$

Дифференцируя по вектору $\vec{\beta}$ и используя представление (19) с учетом свойства ортогональности (29), получаем равенство, которому удовлетворяет оптимальный в смысле (18) вектор коэффициентов

$$QL^{1/2}G'\vec{f} = QL^{1/2}L^{1/2}Q'\vec{\alpha}.$$

Диагональность матрицы $L^{1/2}$ позволяет получить отсюда равенство

$$L^{1/2}Q'\vec{\alpha} = G'\vec{f}.$$

Умножив последнее соотношение слева и справа на матрицу G, с учетом разложения (19) получаем

$$GL^{1/2}Q'\vec{\alpha} = \Phi'\vec{\alpha} = GG'\vec{f}, \qquad (33)$$

что и завершает доказательство сформулированного выше утверждения.

В качестве следствия справедливости (30) получаем соотношение для квадрата нормы вектора (31)

$$\|\vec{f}_2\| = \|\vec{f}\|^2 - \|G'\vec{f}\|^2. \qquad (34)$$

Отсюда и из (29) следует, что равенство ортогональной компоненты нулю достигается на векторах из линеала

$$\vec{f} \equiv \vec{f}_1 = G\vec{\beta}, \qquad (35)$$

где $\vec{\beta}$ – вектор с произвольными вещественными компонентами $\vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_N)'$.

В общем случае при разработке метода восстановления сигналов представляется естественным руководствоваться тем, что восстановлению доступна только компонента вида (9), используя при этом её дискретные аппроксимации (15) или (35). Тогда вычисления сводятся к определению коэффициентов этих представлений на основе зарегистрированных значений откликов.

Для иллюстрации важности учета искажения информации о входном воздействии в отклике рассмотрим следующий пример. Пусть i-тая строка матрицы (13) имеет вид $\vec{\phi}_i = (0,.., 0, v(1),..., v(Mi), 0,..,0)$, где количество нулей в начале равно $i-1$, $Mi = 150$. $v(k) = 0{,}5\,(1 - \cos(2\pi k/Mi))$, $i = 1,..., N = 200$, $M = N + 149$. В качестве вектора отсчетов входного воздействия используем прямоугольный «импульс» $\vec{f} = (1,..,1,2,...,2,1,..,1)'$, где число нулей в начале равно 50, а число подряд идущих единиц равно 20. Это соответствует моделированию радиолокационных измерений по дальности.

На рис. 1 приведены графики компонент вектора $\vec{f}$ и полученной на основе соотношения (30) его компоненты f_1. Эти графики наглядно демонстрируют то, что сохраняющаяся компонента может существенно отличаться от точного воздействия, причем могут проявляться ложные «всплески» (второй отрицательный импульс), которые при восстановлении будут восприниматься как реальные.

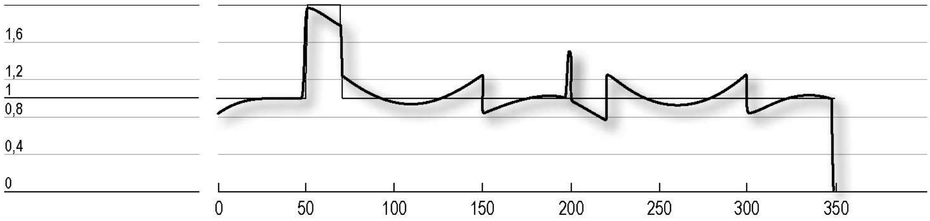

Рис. 1. **Графики входного воздействия (сплошная линия) и его компонента (30).**

Другая проблема при решении задачи восстановления сигналов возникает в случае, когда некоторые элементы матрицы L в разложении (19) (сингулярные числа матрицы Ф) будут недостаточно велики по сравнению с погрешностями измерений. В самом деле, имея в виду представления (14) и (35), а также разложение вида (19) с учетом свойства (29), модель реальных измерений откликов (5) можно аппроксимировать следующим соотношением

$$\vec{w} = (w_1,...,w_N)' = QL^{1/2}\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}. \tag{36}$$

Здесь вектор ошибок $\vec{\varepsilon}$ = $(\varepsilon_1,...,\varepsilon_N)'$, куда целесообразно включить погрешности аппроксимаций за счет применения квадратур, предполагается неизвестным, так что для вычисления неизвестного вектора коэффициентов $\vec{\beta}$ приходится использовать представление

$$\vec{w} = QL^{1/2}\vec{\beta}. \tag{37}$$

Устойчивое оценивание отсюда $\vec{\beta}$ возможно только тогда, когда элементы диагональной матрицы L не очень малы по сравнению со значениями квадратов компонент вектора $\vec{\varepsilon}$ в (36). В противном случае необходимо использовать специальные приемы построения устойчивых приближений к искомым сигналам. Эти приемы принято называть регуляризацией.

Результаты исследований и их обсуждение

Проблеме регуляризации задачи восстановления посвящена обширная литература.

Основное противоречие возникает между желанием достичь устойчивости и при этом обеспечить воспроизведение достаточно тонких деталей входных воздействий при наличии неизвестных погрешностей в модели регистрации откликов.

Отметим, что известные подходы к построению приближенных решений не учитывают того, что в отклике в общем случае отсутствует информация о второй компоненте разложения (8).

Наиболее общий подход к регуляризации обратных задач развит в работах Тихонова А.Н. и его последователей [3, 5, 6]. В его основе используется прием замены исходного уравнения «близким» к нему, решение которого является устойчивым. Это реализуется с применением вариационного принципа минимизации регуляризирующего функционала

$$G(f,\alpha) = \int_0^{T_u}[w(t) - \int_0^{T_f} r(t-\tau)f(\tau)d\tau]^2 dt + \alpha\Omega(f) = \min \forall f \in X, \tag{38}$$

где предполагается, что эмпирические данные представляют собой функцию времени;

$\alpha \geq 0$ – параметр регуляризации;

X – некоторое функциональное пространство, например пространство Соболева или L_2;

$\Omega(f) \geq 0$ – стабилизирующий функционал (стабилизатор), определенный на заданном функциональном пространстве.

Специфика уравнения свертки заключается в возможности использования алгебраического соотношения

$$U(\omega) = R(\omega)F(\omega), \tag{39}$$

между трансформантами Фурье (спектрами, заглавные буквы) входящих в соотношение (1) функций, определение которых имеет следующий вид

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(y)\exp(-j\omega y)dy, \tag{40}$$

где $\omega = 2\pi\nu -$ круговая частота;
$\nu -$ частота; $j = (-1)^{1/2}$.

Условия существования таких интегралов рассматриваются во многих руководствах, например в [7]. Предполагается также существование обратных преобразований

$$z(y) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)\exp(j\omega y)d\omega / 2\pi. \tag{41}$$

В связи с этим принцип регуляризации (38) можно реализовать на основе модели

$$f_\alpha(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)R^*(\omega)\exp(j\omega\tau)d\omega/(|R(\omega)|^2 + \alpha\omega^2)/2\pi, \tag{42}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение трансформанты Фурье ядра, а в качестве стабилизатора используется евклидова норма первой производной искомого сигнала.

Таким образом, реализация (42) предполагает определение трансформанты Фурье отклика и вычисление обратного преобразования при некотором значении параметра регуляризации. Представляет интерес анализ этой процедуры.

Во-первых, отметим, что по дискретным данным может быть вычислена только оценка спектра отклика

$$W_d(\omega) = \Delta t \sum_{k=1}^{N} w_k \exp(-j\omega\Delta t(k-1)), \tag{43}$$

которая является периодической

$$W_d(\omega + 2\pi m P_w) = W_d(\omega), \tag{44}$$

с периодом

$$P_w = 2\pi / \Delta t. \tag{45}$$

Поэтому интеграл в (42) должен рассматриваться в частотной области не шире

$$-\pi / \Delta t \le \omega \le \pi / \Delta t. \tag{46}$$

При этом справедливо соотношение [9]

$$W_d(\omega) = W(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} (W(\omega + 2\pi k P_w) + W(\omega - 2\pi k P_w)), \tag{47}$$

из которого следует, что спектр отклика может быть существенно искажен по сравнению со спектром непрерывной реализации, особенно сильно будут искажаться частотные составляющие вблизи границ интервала (46).

Реально спектр (43) также вычисляется в дискретном наборе точек

$$\omega_i = \pi i / (\Delta t (I-1)), \quad -I \le i \le I, \tag{48}$$

в которых также должен вычисляться и спектр ядра $R(\omega_1)$. Поэтому (42) аппроксимируется интегральной суммой

$$f_\alpha(k) = \Delta\tau\Delta\omega \sum_{i=-I}^{I} W(\omega_i) R^*(\omega_i) \exp(ji\Delta\omega(k-1)) / (|R(\omega_i)|^2 + \alpha\omega_i^2), \ \Delta\omega = \pi/(I-1). \tag{49}$$

Шаг дискретизации спектров часто выбирается в соответствии с принципом дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (это позволяет использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)) [9]

$$\Delta\omega = 2\pi / (\Delta t N). \tag{50}$$

Таким образом, и спектр оценки искомого сигнала будет ограничен интервалом (46), что может приводить к погрешностям. Кроме того в виду необходимости вычисления спектра ядра должно выполняться равенство

$$\Delta t = \Delta\tau. \tag{51}$$

Но если необходимо сохранить тонкие детали профиля входного сигнала, например, обеспечить разрешение близко расположенных экстремумов, то следует соответствующим образом выбрать шаг дискретизации области определения отклика. В частности из равенства Парсеваля [8] следуют требования

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega)|^2 d\omega / 2\pi \approx \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |R(\omega)|^2 d\omega / 2\pi, \tag{52}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi \approx \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |F(\omega)|^2 d\omega / 2\pi. \tag{53}$$

Ясно, что выполнимость последнего условия подтвердить невозможно. Таким образом, представляется целесообразным применять такой метод регуляризации, когда интервалы дискретизации не связаны жестким условием вида (51), что может быть невыполнимо при использовании эмпирических данных.

Выбор значения параметра регуляризации является одной из основных проблеме, которая характеризуется противоречием между желанием обеспечить устойчивость оценки входного сигнала к влиянию неточности априорных знаний о свойствах погрешностей наряду с необходимостью выявить тонкие детали. Решение этой проблемы базируется на предположениях об уровне погрешностей например в смысле её дисперсии.

Представляется целесообразной разработка такого метода восстановления входного сигнала по эмпирическим данным, который учитывает только первую из компонент в аддитивной смеси (8) и позволяет оценивать уровень погрешностей регистрации отклика непосредственно по имеющимся данным.

Так как вторая из компонент суммы (8) теряется, то в качестве исходного вектора значений восстанавливаемого сигнала естественно использовать представление

$$\vec{f}_1 = G\vec{\beta}, \tag{54}$$

С учетом свойства (29) нетрудно получить соотношение

$$\|\vec{f}_1\|^2 = \|\vec{\beta}\|^2. \tag{55}$$

тогда как для нормы сигнальной части отклика (14) в виду (19) и (24) имеет место

$$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \beta_k^2. \tag{56}$$

Положим

$$\vec{\gamma} = Q'\vec{w} = Q'\vec{u} + Q'\vec{\varepsilon}. \tag{57}$$

С учетом (36) имеем

$$\vec{y} = Q'\vec{u} = (y_1, \dots, y_N)' = L^{1/2}\vec{\beta}, \tag{58}$$

$$y_k = \lambda_k^{1/2}\beta_k,\ k = 1, \dots, N. \tag{59}$$

Таким образом, выполнение равенств вида (36) влечет равенства

$$y_k = 0,\ k = K+1,\dots,N. \tag{60}$$

Поэтому сформированный на основе (55), (57) и (58) регуляризирующий функционал Тихонова А.Н. должен учитывать только ненулевые сингулярные числа

$$G(\vec{\beta},\alpha) = \sum_{k=1}^{K} (\lambda_k^{1/2}\beta_k - \gamma_k)^2 + \alpha\sum_{k=1}^{K} \beta_k^2. \tag{61}$$

Минимизация этого функционала при фиксированном параметре регуляризации достигается на векторе с компонентами вида

$$\beta_k = \lambda_k^{1/2}\gamma_k / (\alpha+\lambda_k),\ k = 1,\dots,K. \tag{62}$$

В соответствии с (60) остальным компонентам вектора коэффициентов в (54) следует придать нулевые значения.

При подстановке этого представления в первую сумму правой части (61) нетрудно получить соотношение для квадрата нормы вектора отклонений от эмпирических данных

$$H(\alpha) = \alpha^2\sum_{k=1}^{K} \gamma_k^2 / (\alpha+\lambda_k)^2. \tag{63}$$

Если теперь задать его значение, то тем самым определится уравнение для параметра регуляризации

$$\alpha^2\sum_{k=1}^{K} \gamma_k^2 / (\alpha+\lambda_k)^2 = s^2. \tag{64}$$

Нетрудно получить соотношение

$$dH(\alpha)/d\alpha = \alpha\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\gamma_k^2 / (\alpha+\lambda_k)^2,$$

которое показывает, что правая часть (63) монотонно не убывает, а следовательно корень уравнения (64) будет единственным, причем следует иметь в виду необходимость выполнения неравенства

$$s^2 < \sum_{k=1}^{K} \gamma_k^2 / \lambda_k^2, \tag{65}$$

чтобы корень был неотрицательным и ограниченным.

Использование равенства

$$s_2 = 0 \tag{65}$$

дает нулевое значение параметра регуляризации, поэтому его следует применять в тех случаях, когда норма вектора погрешностей в (36) мала по сравнению с нормой информационного вектора (37), в частности, когда собственные числа матрицы (21) достаточно велики. В противном случае представляется естественным использовать оценку математического ожидания по близким к нулю собственным числам (см. [60])

$$s^2 = K \sum_{k=K+1}^{N} \gamma_k^2 / (N-K). \tag{66}$$

Отметим также, что для поиска корня уравнения (64) следует использовать метод последовательных приближений на основе представления

$$\alpha = s(\sum_{k=1}^{K} \gamma_k^2 / (\alpha + \lambda_k)^2)^{-1/2}, \tag{67}$$

который сходится при выполнении неравенства (65).

Выводы

Рассмотрена задача устойчивого восстановления сигналов в линейных системах с постоянными параметрами. Показано, что в отклике системы может отсутствовать часть информации о входном воздействии, и разработан метод априорного анализа доступной для восстановления компоненты. Предложен проекционный метод устойчивого восстановления сигналов на основе сингулярного разложения матриц. Получены основные соотношения, позволяющие регуляризовать задачу восстановления и вычислить параметр регуляризации непосредственно по данным измерений.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №17–07–00268

Библиографический список

1. Василенко Г.И. Теория восстановления сигналов. О редукции к идеальному прибору в физике и технике. М.: Сов. Радио, 1979
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: наукова думка, 1986
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986
4. Ректорис К. Вариационные методы в физике и технике. М.: Мир, 1985

5. Уоткинс Д. Основы матричных вычислений. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2009.
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990
7. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009
8. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука
9. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. М.: БИНОМ, 2006
10. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка Изображений. М.: Техносфера, 2006

References

1. Vasilenko G.I. Teoriya vosstanovleniya signalov. O reduktsii k ideal'nomu priboru v fizike i tekhnike. (Theory of signal recovery. On reduction to an ideal device in physics and engineering) M.: Sov. Radio, 1979
2. Verlan A. F., Sizikov V. S. Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy (Integral equations: methods, algorithms, programs). Kiev: naukova dumka, 1986
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Metody resheniya nekorrektnykh zadach (Methods for solving ill-posed problems). M.: Nauka, 1986
4. Rektorys K. Variatsionnye metody v fizike i tekhnike (Variational methods in physics and engineering). M.: Mir, 1985
5. Watkins D. Osnovy matrichnykh vychislenij (Fundamentals of matrix computations). M.: Binom. Laboratoriya znanij. 2009.
6. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach (Numerical methods for solving ill-posed problems). M.: Nauka, 1990
7. A. S. Leonov, Reshenie nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach (Solution of ill-posed inverse problems). M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009
8. Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P. Finitnye funktsii v fizike i tekhnike (Finite functions in physics and engineering). M.: Nauka
9. Lyons R. Tsifrovaya obrabotka signalov (Digital signal processing). M.: BINOM, 2006
10. Gonzalez R., Woods R. Tsifrovaya obrabotka Izobrazhenij (Digital Image processing). M.: Tekhnosfera, 2006