УДК 517.53
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-487-495

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ BMOA И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В ОБЛАСТЯХ С ГРАНИЦЕЙ ТИНА ЛАВРЕНТЬЕВА

SOME PROPERTIES OF BMOA CLASSES AND INTEGRAL ESTIMATES OF CONFORMAL MAPPING FUNCTIONS IN DOMAINS WITH LAVRENTIEV's TYPE BOUNDARY

Н.М. Махина
N.M. Makhina

Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
ул. Бежицкая, 14, Брянск, 241036, Россия

Bryansk State University named after acad. I.G. Petrovsky
14 Bezhitskaya St., Bryansk, 241036, Russia

E-mail: mahinanm@yandex.ru

Аннотация
Рассматривается задача оценки производной конформно отображающей функции в областях с границей тина Лаврентьева. Решение данной задачи тесно связано с хорошо известными свойствами функций тина *BMOA*. Полученные результаты и используемый метод доказательства могут быть использованы при оппсанпи характеристик весовых пространств измеримых и аналитических функций на произведениях областей с указанными тинами границ.

Abstract
We considere the problem of estimating the derivative of a conformal mapping function in domains with Lavrentiev type boundary. The solution of this problem is closely related to the well-known properties of *BMOA* type functions. The results obtained and the method of proof can used to describe the characteristics of the weight spaces of measurable and analytic functions on the products of domains with specified types of boundary.

Ключевые слова: пространство *BMOA*, кривая Лаврентьева, конформное отображение, проектор, произведение областей.
Key words: *BMOA* space, Lavrentiev curve, conformal mapping, projector, product of domains.

1. Введение

В теории функций комплексного переменного хорошо известна задача, связанная с рассмотрением свойств пространств аналитических в некоторой области функций в зависимости от характеристик на границу данной области.

Указанные свойства имеют непосредственное выражение, в том числе, и в виде различных оценок функции, конформно отображающей единичный круг $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на изучаемую область.

Так, достаточно вспомнить хорошо известные п справедливые в произвольной области комплексной плоскости оценки Кебе, оценпвающпе модуль производной функции φ, конформно отображающей единичный круг S на некоторую односвязную область G, через расстояние до границы области d [Голузин, 1966]:

$$\frac{1}{4}\frac{d(\varphi(z),\partial G)}{1-|z|} \le \left|\varphi'(z)\right| \le 4\frac{d(\varphi(z),\partial G)}{1-|z|} .$$

Встает вопрос о возможности получения аналогов данных оценок, необходимость использования которых возникает в тех или иных классических задачах, например, в задачах построения ограниченных проекторов и базисов в пространствах аналитических функций в областях с границами того или иного типа.

Рассмотрим G – некоторую односвязную область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим $H(G)$ – множество всех аналитических функций в области G. Напомним, что пространство Харди H^p, $0 < p \le \infty$, [Duren, 1970] определяется как множество функций $f \in H(S)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} \stackrel{def}{=} \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty,$$

где для $0 < r < 1$

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p} \quad (0<p<\infty); \quad M_\infty(r,f) = \sup_{\theta\in R}\left|f(re^{i\theta})\right|.$$

Пространство $BMOA$ состоит из тех функций $f \in H^1$, граничные значения которых имеют ограниченную среднюю осцилляцию на единичной окружности T[John, Nirenberg, 1961]:

$$\sup_{|a|<1}\|f_a\|_1 < \infty, \quad f_a(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a),$$

где $\|\cdot\|_1$ определена как норма пространства H^1.

Пространство $VMOA$ является замыканием многочленов по $BMOA$-норме [Sarason, 1975].

Напомним также определения некоторых классов кривых. Пусть класс (C) есть класс кривых Γ на комплексной плоскости, состоящих из конечного числа гладких дуг (Γ_j), в точках стыка w_j, $j=\overline{1,n}$, образующих внутренние углы $\dfrac{\pi}{\alpha_j}, \dfrac{1}{2} \le \alpha_j < +\infty, j=\overline{1,n}$, [Дзядык, 1977, с. 386].

Класс (A) есть класс асимптотически конформных кривых Γ на комплексной плоскости, если справедливо

$$\mu(\delta) = \sup_{\substack{w_1,w_2\in\partial G\\ |w_1-w_2|\le\delta}} \sup_{w\in\Gamma'}\left(\frac{|w_1-w|+|w_2-w|}{|w_2-w_1|}-1\right) \to 0, \quad \delta\to 0,$$

где Γ' – кратчайшая дуга на границе $\Gamma=\partial G$, соединяющая точки w_1, w_2 (см. [Альфорс, 1969], для примера, и имеющуюся там литератруру).

Пусть также класс (L) есть класс таких кривых Γ (кривых Лаврентьева), для которых $l(w_1,w_2) \le c|w_1-w_2|$, где w_1, w_2 – произвольные точки на Γ, $l(w_1,w_2)$ – длина кратчайшей дуги Γ' на кривой Γ, соединяющей точки w_1, w_2 ([Альфорс, 1969; Гарнетт, 1984, с. 280]).

В ряде работ автора [Ткаченко, 2009 а,б; Tkachenko, 2009; Шамоян, 2013; Shamoyan, 2015; Махина, 2015; 2017; 2018] показано, что интегральные оценки модуля производной конформно отображающей функции тесно связаны с характеристиками границ рассматриваемых областей, которые, в свою очередь, определяются свойствами тех или иных классов аналитических функций.

Данные вопросы широко освещаются в работах как отечественных (см., например, [Некарский, 2001, и литературу там], так и зарубежных ученых (см., например, [Galanopoulos et al., 2011, и литературу там].

Так, например, в областях с кусочно-гладкими границами класса (C) [Дзядык, 1977] одним из свойств модуля производной конформно отображающей функции в окрестности угловой точки являются неравенства

$$c_1 |z-1|^{\frac{1}{\alpha_j}-1} \le |\varphi'(z)| \le c_2 |z-1|^{\frac{1}{\alpha_j}-1}, \quad c_1>0,\ c_2>0;$$

в областях с асимптотически конформными границами класса (A) [Pommerenke, 1978] применяются свойства функций класса $VMOA$, принимающие следующий вид:

$$(1-|z|)\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right| \to 0, \quad |z|\to 1-0.$$

Указанные свойства классов (C) и (A) использованы автором при рассмотрении вопросов, связанных с оценками производных конформно отображающих функций, например, в работах [2017; 2018].

В данной статье на основании характеристик кривых класса (L), а точнее, их связи со свойствами функций из классов $BMOA$, получены новые интегральные оценки модуля производной конформно отображающей функции в областях с указанными границами.

2. Оценки модуля производной конформно отображающей функции

Напомним хорошо известные результаты.

Лемма 1 [Pommerenke, 1977]. *Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости, ограниченная кривой класса (L), $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая круг S на область G, b – произвольное положительное число. Тогда функция $f(z)=b\ln\varphi'(z)$, где выбрана главная ветвь логарифма, принадлежит классу $BMOA$.*

Лемма 2 [Pommerenke, 1977]. *Для функции $f\in BMOA$, $|t|<1$, и произвольного $b\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ существует такое $M=M(b)$, что справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|q|=1}\left|e^{bf(s)}\right|^2\frac{(1-|t|^2)}{|1-\bar{t}q|^2}|dq| \le M\left|e^{bf(t)}\right|^2.$$

На основании указанных свойств получим новые оценки для конформно отображающей функции в областях с границами класса (L).

Теорема 1. *Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная кривой класса (L), $\varphi(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $\varphi(0)=\omega_0$, $\omega_0\in G$, $\varphi'(0)>0$. Тогда справедливы оценки*

1) *При $1<p<+\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $\beta>-1$, $1<\dfrac{\gamma}{q}<\beta+1, \eta\ge\beta+1-\dfrac{\gamma}{q}$:*

$$\int\limits_S\frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^\beta\chi_\gamma^p(z)}{|1-\bar{\zeta}z|^{\eta+2}}dm_2(z)\le\frac{\tilde{c}|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}(1-|\zeta|)^\beta\chi_\gamma^p(\zeta)}{(1-|\zeta|)^\eta},$$

где $\chi_\gamma(\zeta)=(1-|\zeta|)^{-\gamma/pq}, \tilde{c}$ – некоторая положительная постоянная;

2) *При $\beta>-1, \eta>\beta+1$:*

$$\int\limits_S\frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^\beta}{|1-\bar{\zeta}z|^{\eta+2}}dm_2(z)\le\frac{\tilde{\tilde{c}}|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}(1-|\zeta|)^\beta}{(1-|\zeta|)^\eta},$$

где $\tilde{\tilde{c}}$ – *некоторая положительная постоянная.*

□ Докажем п. 1) Полагая $f = \frac{\beta+2}{2}\ln\left|\varphi'(z)\right|$, $z \in S$, $z = re^{i\sigma}$, учитывая утверждения лемм 1 и 2, имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(e^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{(1-|t|^2)}{\left|1-\overline{t}e^{i\sigma}\right|^2}d\sigma \leq M\left|\varphi'(t)\right|^{\beta+2}, \tag{1}$$

где $0 < |t| < 1$.

Оценим теперь $I = \int\limits_S \frac{\left|\varphi'(z)\right|^{\beta+2}(1-|z|)^{\beta}\chi_{\gamma}^{p}(z)}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^{\eta+2}}dm_2(z)$. Здесь и далее $c_i, i \geq 0$, – некоторые положительные постоянные, конкретные значения которых не играют никакой роли.

Пусть $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Тогда

$$I = \int\limits_0^1 (1-r)^{\beta-\gamma/q}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(re^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2}{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2}\frac{d\sigma dr}{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^{\eta}} \leq$$

$$\leq c_0\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\beta-\gamma/q}}{(1-r\rho)^{\eta}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(re^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{d\sigma dr}{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2}.$$

Поскольку функция $\varphi'(z) \neq 0$, $z \in S$, то $(\varphi'(z))^{\beta+2}$, $(\varphi'(0))^{\beta+2} > 0$, голоморфна в S. Функция $\Psi_{\zeta}(z) = \frac{1}{(1-\overline{\zeta}z)^2}$ также является голоморфной в S при фиксированном $\zeta \in S$. Следовательно, $\Psi_{\zeta}(z)(\varphi'(z))^{\beta+2}$ – голоморфная в S функция. Поэтому

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(re^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{d\sigma}{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(re^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\left|\Psi_{\zeta}(re^{i\sigma})\right|d\sigma = I_1(r)$$

монотонно растет на $[0,1)$. Значит,

$$I_1(r) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(re^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{d\sigma 1}{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(re^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{(1-\rho^2)}{\left|1-r\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2}d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1-\rho^2)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\varphi'(e^{i\sigma})\right|^{\beta+2}\frac{(1-\rho^2)}{\left|1-\rho e^{i(\sigma-\theta)}\right|^2}d\sigma.$$

И из оценки (1), положив $t = \zeta$, получим: $I_1(r) \leq \frac{c_1\left|\varphi'(\rho e^{i\theta})\right|^{\beta+2}}{(1-\rho^2)}$.

То есть $I \leq \frac{c_2\left|\varphi'(\rho e^{i\theta})\right|^{\beta+2}}{(1-\rho^2)}\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\beta-\gamma/q}}{(1-r\rho)^{\eta}}dr$.

Но $\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\beta-\gamma/q}}{(1-r\rho)^{\eta}}dr \leq \frac{c_3}{(1-\rho)^{\eta-\beta+\gamma/q-1}}$ при $1 < \frac{\gamma}{q} < \beta+1, \eta \geq \beta+1-\frac{\gamma}{q}$. Откуда получается следующее неравенство $I \leq \frac{c_4\left|\varphi'(\rho e^{i\theta})\right|^{\beta+2}}{(1-\rho)^{\eta-\gamma/q}}$.

Итак, $\int\limits_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^{\beta}\chi_{\gamma}^{p}(z)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\eta+2}} dm_2(z) \le \frac{\tilde{c}\,|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}}{(1-|\zeta|)^{\gamma/q}}$
ири соответствующих условиях. Пункт 2) доказывается аналогично.

Повторяя рассуждения теоремы 1, несложно получить следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G – некоторая односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная кривой класса (L), $\varphi(z)$ – функция Римана, отображающая S на G, $\varphi(0)=\omega_0, \omega_0 \in G, \varphi'(0)>0$. Тогда при $1<p<+\infty$ справедливо неравенство:*

$$\int\limits_S \frac{|\varphi'(z)|^{\beta+2}(1-|z|)^{\beta}\chi_{\gamma}^{p}(z)}{|1-\overline{\zeta}z|^{\eta+2}\,|1-\overline{\xi}z|^{\mu}} dm_2(z) \le \frac{\tilde{\tilde{c}}|\varphi'(\zeta)|^{\beta+2}(1-|\zeta|)^{\beta}\chi_{\gamma}(\zeta)\chi_{\gamma}^{\frac{p}{q}}(\xi)}{(1-|\zeta|)^{\eta+2-\frac{2}{p}}(1-|\xi|)^{\mu-\frac{2}{q}}},$$

где $\chi_{\gamma}(\zeta)=(1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\beta>-1$, $0<\frac{\gamma}{q}<\beta p+1$, $\eta \ge \beta-2+\frac{3}{p}-\frac{\gamma}{pq}$; $\mu>2-\frac{\gamma}{q^2}$, $\tilde{\tilde{c}}$ – некоторая ноложительная ностоянная.

3. Заключение

В работах автора, нанример, [Tkachenko, 2009] с помощью аналогов рассмотренных оценок построены, в том числе, ограниченные интегральные операторы в весовых пространствах аналитических функций.

Пусть $E_p(G)$ – хорошо известный класс Смирнова в области G. Обозначим через $L^p(G)$ – класс измеримых по Лебегу в области G функций, для которых

$$\|f\|^p_{L^p(G)} = \int\limits_G |f(z)|^p\, dm_2(z) < +\infty, \quad 0<p<+\infty,$$

где $dm_2(z)$ – плоская мера Лебега.

Из классической теоремы М. Рисса известно, что интеграл типа Коши на границе ∂G отображает пространство $L^p(G)$ на $E_p(G)$ при всех $1<p\le+\infty$. В то же время, исходя из классических результатов А.Н. Колмогорова, такой интегральный оператор не отображает пространство $L^1(G)$ на $E_1(G)$ даже в том случае, когда ∂G представляет собой единичную окружность. Дж. Ньюмен показал, что такого интегрального оператора вообще не существует. Однако в пространствах Бергмана существует ограниченный проектор по плоской мере Лебега из $L^1(G)$ на соответствующее пространство Бергмана. Эти результаты были получены Ф.А. Шамояном в случае гладких контуров при всех $0<p\le1$. А при $1<p\le+\infty$ такие результаты можно вывести из результатов М. Рисса (см. [Ткаченко, 2009]).

Возможности распространения данных результатов на области с более общими границами рассматривались в работах отечественных и зарубежных авторов [Шихватов, 1976; Соловьев, 1985; Hedenmalm, 2002] и указанных выше работах автора.

Пусть $L^p_{\beta}(G)$ – класс измеримых по Лебегу в G функций f, для которых

$$\|f\|^p_{L^p_{\beta}(G)} = \int\limits_G |f(w)|^p\, d^{\beta}(w,\partial G) dm_2(w) < +\infty\,, \quad \beta>-1, \quad 0<p<+\infty\,,$$

$A^p_{\beta}(G)$ – нодпространство пространства $L^p_{\beta}(G)$, состоящее из аналитических функций.

Теорема 3 ([Tkachenko, 2009]). *Пусть G – односвязная область на комплексной нлоскости, ограниченная кривой класса (L), $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая S на G, $\varphi(0)=\omega_0$, $\omega_0 \in G, \varphi'(0)>0$, ψ – обратная функция для φ. Тогда интегральный оператор*

$$F(w)=P_{\eta}(f)(w)=\frac{\eta+1}{\pi}\int\limits_G \frac{(1-|\psi(\mu)|^2)^{\eta}}{(1-\overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\eta+2}} f(\mu)\left|\psi'(\mu)\right|^2 dm_2(\mu)$$

непрерывно отображает $L^p_\beta(G)$ *на* $A^p_\beta(G)$, $1 \le p < +\infty$, $\beta > -1$, $\eta > 2(\beta+1)$, *причем*

$$\|F\|_{A^p_\beta(G)} \le c(\beta,p)\,\|f\|_{L^p_\beta(G)},$$

$c(\beta,p)$ =const> 0.

Данная теорема устанавливается с применением аналога ядер М.М. Джрбашяна для области G и интегральных оценок модуля производной конформно отображающей функции (аналогов оценок теоремы 1).

Пусть G_j – некоторая односвязная область на комплексной плоскости, граница которой принадлежит классу Лаврентьева (L) . Рассмотрим $\{G_j\}_{j=1}^m$ – множество таких областей и $\tilde{G} = G_1 \times ... \times G_m$.

Обозначим $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ – множество измеримых в $\tilde{G}$ функций таких, что

$$\|f\|_{L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})} = \int\limits_{\tilde{G}} |f(w)|^p\, d^{\vec{\beta}}(w,\partial G)dm_{2m}(w) =$$

$$= \int\limits_{G_1} ... \int\limits_{G_m} |f(w_1,...,w_m)|^p \prod_{j=1}^m d^{\beta_j}(w_j,\partial G_j)dm_2(w_j) < +\infty,$$

где $0 < p < +\infty, \vec{\beta} = (\beta_1,...,\beta_m), \beta_j > -1, j = \overline{1,m}; dm_{2m} = dm_2...dm_2$ – мера Лебега на $\tilde{G}$. Пусть также $A^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G}) = H(\tilde{G}) \cap L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$.

Автор предполагает возможность получения аналога теоремы 3 и использования оценок теоремы 1 и 2 при изучении в пространствах $L^p_{\vec{\beta}}(\tilde{G})$ операторов типа Бергмана следующего вида:

$$(P_{\vec{\eta}}f)(\vec{w}) = \prod_{j=1}^m \frac{\eta_j+1}{\pi} \int\limits_{G_j} ... \int\limits_{G_m} f(\mu_1,...,\mu_m) \prod_{j=1}^m \frac{(1-|\psi_j(\mu_j)|^2)^{\eta_j} \left|\psi_j'(\mu_j)\right|^2}{(1-\overline{\psi(\mu_j)})\psi(w_j)^{\eta_j+2}} dm_2(\mu_1)...dm_2(\mu_m),$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ – функции Римана, выполняющие отображение S на G_j, $\varphi_j(0) = \omega_0^j$, $\omega_0^j \in G_j$, $\psi_j = \varphi_j^{-1}$, $j = \overline{1,m}$.

Автор выражает благодарность профессору Шамояну Ф.А. за внимание к работе и Шамояну Р.Ф. за идеи возможного применения результатов работы.

Список литературы

1. Альфорс Л. 1969. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 133.

2. Гарнетт Дж. 1984. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 469.

3. Голузин Г.М. 1966. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 628.

4. Дзядык В.К. 1977. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 512.

5. Махина Н.М. 2015. О сопряженных пространствах к некоторым весовым пространствам аналитических функций. Вестник Брянского государственного университета, 2: 420–423.

6. Махина Н.М. 2017. Оценки производных аналитических и гармонических функций в некоторых областях комплексной плоскости. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика, 2: 16–22.

7. Махина Н.М. 2018. Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей. Вестник Омского государственного университета, 23(3): 47–51.

8. Махина Н.М., Шамоян Ф.А. 2013. Базисы в весовых пространствах функций, аналитических в областях со спрямляемой границей. Вестник Брянского государственного университета, 4: 27–30.

9. Некарский А.А. 2001. Рациональные приближения функций с производными из пространства В.И. Смирнова. Алгебра и анализ, 13(2): 165–190.

10. Соловьев А.А. 1985. Оценки в Lp интегральных операторов, связанных с пространствами аналитических и гармонических функций. Сибирский математический журнал, 26(3): 168–191.

11. Ткаченко Н.М. 2009. Весовые Lp-оценки аналитических и гармонических функций в односвязных областях комплексной плоскости: дисс. ...канд. ф.-м. наук. Брянск, 116.

12. Ткаченко Н.М. 2009. Линейные непрерывные функционалы в Lp-нространствах аналитических функций. Вестник Брянского государственного университета, 4: 100–105.

13. Шихватов А.М. 1976. Об Lp-пространствах функций, аналитических в области с кусочно-аналитической границей. Математические заметки, 20(4): 537–548.

14. Duren P.L. 2000. Theory of Hp Spaces. New York/London: Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York, Dover, 292.

15. Galanopoulos P., Girela D., Hernandez R. 2011. Univalent Functions, VMOA and related spaces. Journal of Geometric Analysis, 21: 665–682.

16. Hedenmalm H. 2002. The dual of Bergman space on simply connected domains. Journal d' Analyse Mathematique, 88: 311–335.

17. John F., Nirenberg L. 1961. On functions of bounded mean oscillation. Communications on Pure and Applied Mathematics, 14: 415–426.

18. Sarason D. 1975. Functions of vanishing mean oscillation. Transactions of the American Mathematical Society, 297: 391–405.

19. Pommerenke Ch. 1977. Schlichte Functionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation. Commentarii Mathematici Helvetici, 52: 591–602.

20. Pommerenke Ch. 1978. On univalent Functions, Bloch Functions and VMOA. Mathematische Annalen, 236 (3): 199–208.

21. Shamoyan R.F., Makhina N.M. 2015. On continuous linear functionals in some weighted functional classes on product domains. Siberian electronic mathematical reports, 12: 651–678.

22. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. 2009. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 5(2): 192–210.

References

1. Al'fors L. 1969. Lekcii po kvazikonformnym otobrazhenijam [Lectures on quasiconformal mappings]. Moscow, Mir, 133.
2. Garnett J. 1984. Ogranichennye analiticheskie funkcii [Bounded analytic functions]. Moscow, Mir, 469.
3. Golusin G.M. 1966. Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo [The geometrical theory of functions complex variable]. Moscow, Nauka, 628.
4. Dzjadyk V.K. 1977. Vvedenie v teoriju ravnomernogo priblizhenija funkcij polinomami [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moskow, Nauka, 512.
5. Makhina N.M. 2015. O soprjazhennyh prostranstvah k nekotorym vesovym prostranstvam analiticheskih funkcij [On conjugate spaces to some weighted spaces of analytic functions]. Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2: 420–423.
6. Makhina N.M. 2017. Ocenki proizvodnyh analiticheskih i garmonicheskih funkcij v nekotoryh oblastjah kompleksnoj ploskosti [Estimates of the derivatives of analytic and harmonic functions in some domains of the complex plane]. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo oblastnogo universiteta. Serija: Fizika-matematika, 2: 16–22.
7. Makhina N.M. 2018. Nekotorye ocenki konformno otobrazhajushhej funkcii v oblastjah s kusochno-gladkoj i asimptoticheski konformnoj granicej [Some estimates of a conformally mapping function in domains with a piecewise-smooth and asymptotically conformal boundary]. Vestnik Omskogo gosudarstvennogo universiteta, 23(3): 47–51.
8. Makhina N.M., Shamoyan F.A. 2013. Bazisy v vesovyh prostranstvah funkcij, analiticheskih v oblastjah so sprjamljaemoj granicej [Bases in weighted spaces of functions analytic in domains with rectifiable boundary]. Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta, 4: 27–30.
9. Pekarskij A.A. 2001. Racional'nye priblizhenija funkcij s proizvodnymi iz prostranstva V.I. Smirnova [Rational approximations of functions with derivative in a V.I. Smirnov space]. Algebra i analiz [St. Petersburg Mathematical Journal], 13(2): 165–190 [2002, 13(2), 281–300].
10. Solov'yov A.A. 1985. Estimates in Lp for integral operators associated with the space of analytic and harmonic functions. Siberian Mathematical Journal, 26(3): 168–191.
11. Tkachenko N.M. 2009. Vesovye Lp-ocenki analiticheskih i garmonicheskih funkcij v odnosvjaznyh oblastjah kompleksnoj ploskosti [Weighted Lp estimates analytic and harmonic functions in a simply domains of complex plane]. Ph. D. Dissertation, Bryansk, 116.
12. Tkachenko N.M. 2009. Linejnye nepreryvnye funkcionaly v Lp-prostranstvah analiticheskih funkcij [Linear continuous functionals in Lp-spaces of analytic function]. Vestnik Brjanskogo gosudarstvennogo universiteta, 4: 100–105.

13. Shihvatov A.M. 1976. Ob Lp-prostranstvah funkcij, analiticheskih v oblasti s kusochno-analiticheskoj granicej [On Lp-spaces of functions analytic in a domain with piecewise analytic boundary]. Matematicheskie zametki [Mathematical Notes], 20(4): 537–548.

14. Duren P.L. 2000. Theory of Hp Spaces. New York/London: Academic Press, 1970. Reprint: Mineola, New York, Dover, 292.

15. Galanopoulos P., Girela D., Hernandez R. 2011. Univalent Functions, VMOA and related spaces. Journal of Geometric Analysis, 21: 665–682.

16. Hedenmalm H. 2002. The dual of Bergman space on simply connected domains. Journal d' Analyse Mathematique, 88: 311–335.

17. John F., Nirenberg L. 1961. On functions of bounded mean oscillation. Communications on Pure and Applied Mathematics, 14: 415–426.

18. Sarason D. 1975. Functions of vanishing mean oscillation. Transactions of the American Mathematical Society, 297: 391–405.

19. Pommerenke Ch. 1977. Schlichte Functionen und analytische Functionen von beschrankter mittlerer Oszillation. Commentarii Mathematici Helvetici, 52: 591–602.

20. Pommerenke Ch. 1978. On univalent Functions, Bloch Functions and VMOA. Mathematische Annalen, 236 (3): 199–208.

21. Shamoyan R.F., Makhina N.M. 2015. On continuous linear functionals in some weighted functional classes on product domains. Siberian electronic mathematical reports, 12: 651–678.

22. Tkachenko N.M., Shamoyan F.A. 2009. The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 5(2): 192–210.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Махина Н.М. 2019. Некоторые свойства классов BMOA и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей тина Лаврентьева. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 487–495. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-487-495.

Makhina N.M. 2019. Some properties of BMOA classes and integral estimates of conformal mapping functions in domains with Lavrentiev's type boundary. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 487–495 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-487-495.