УДК 519.651
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-514-521

РАСЧЁТ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

NUMERICAL SOLUTION TO THE FINITE-DIMENSION PROBLEM OF QUADRATIC EXPONENTIAL INTERPOLATION

А.С. Тимашев
A.S. Timashev

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: aleksandrtim@rambler.ru

Аннотация
В статье рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов квадратичных экспонент — функций Гаусса. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усеченных систем линейных уравнений. Приведен основной результат о корректности решения системы линейных уравнений, лежащий в основе излагаемого подхода. Проведено краткое сравнение данного метода с известными ранее и перечислены приложения полученных результатов в теории сигналов.

Abstract
In this paper we consider approximations of functions using integer shifts of Gaussians — quadratic exponentials with parameters. A method is proposed to find coefficients of node functions by solving linear systems of equations. The main result is announced on correct solvability of the fundamental linear system. We compare results with known ones and briefly indicate applications to signal theory.

Ключевые слова: квадратичные экспоненты, функции Гаусса, интерполяция, цифровые сигналы.
Keywords: quadratic exponentials, Gauss functions, interpolation, digital signals.

1. Введение

В течение длительного времени основным инструментом приближений были разложения по полным ортогональным системам. Однако, за последние годы в различных разделах математики и прикладных областях оформился весьма широкий круг задач, решение которых требует использования разложений функций по неполным, переполненным или неортогональным системам. Такие задачи возникают, например, при изучении электрических или оптических сигналов, теории фильтрации, голографии, при моделировании процессов в томографии и медицине. Примерами переполненных систем являются фреймы, а неортогональных — всплески, системы Габора (когерентные состояния), функции Рвачёвых и другие.

Рассмотрим задачу о приближении достаточно произвольной функции в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Известно, что эта система неполна в стандартных пространствах, тем не менее она часто и с успехом используется. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в работах [Maz'ya, 2007; Kiselev, 2014; Zhuravlev, 2011; Minin, 2009].

2. Интерполяционная задача

Более точно, будет исследована следующая основная

Интерполяционная задача: рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, заданную на всей оси $x \in \mathbb{R}$, и некоторый параметр $\sigma > 0$, который в вероятностных приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Функция действительно может быть произвольного вида, так как мы работаем только с её значениями в целочисленных узлах. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, также определённую на всей оси $x \in \mathbb{R}$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

$$\tilde{f}\left(x\right) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках

$$f\left(m\right) = \tilde{f}\left(m\right), \ m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Известны несколько подходов к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета–функций Якоби [Maz'ya, 2007]. Однако, как показано в [Zhuravlev, 2011; Minin, 2009], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных нерснектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [Zhuravlev, 2011; Minin, 2009], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой усложнения алгоритма, при этом вычисления эффективны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Чтобы преодолеть указанные трудности был предложен прямой метод решения поставленной задачи интерполяции, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений [Ситник, 2013; Ситник, 2014, Ситник, Тимашов, 2014].

Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе приведены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДНФ. Также могут быть получены дальнейшие результаты для переполненных систем линейных уравнений и предельные свойства решений конечномерных систем.

Для дальнейшего изложения введём удобное обозначение для квадратичной экспоненты

$$e\left(\sigma, x, k\right) = e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}}\ . \tag{3}$$

Решение поставленной задачи сводится к нахождению носледовательности неизвестных коэффициентов f_k из (1). Для этого, следуя стандартной схеме решеппя задач интерполяции, необходимо построить узловые функции для каждого узла интерполяции $x = m, \ m \in \mathbb{Z}$. В нашем случае достаточно построить одну *базисную узловую функцию* для узла при $x = 0$, которую мы будем искать в виде

$$G\left(\sigma, x\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \ e(\sigma, x, k). \tag{4}$$

Вывод определяющих соотношений и бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции известен, для полноты изложения мы кратко повторим эти выкладки, [Maz'ya, 2007; Kiselev, 2014; Zhuravlev, 2011; Minin, 2009].

Из (2) следует, что эта базисная узловая функция должна удовлетворять основному условию при всех $m \in \mathbb{Z}$:

$$G(\sigma, m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\, e(\sigma, m, k) = \sigma_{m0}, \tag{5}$$

где σ_{m0} есть символ Кронекера

$$\sigma_{m0} = \begin{cases} 1, \ m = 0 \\ 0, \ m \neq 0. \end{cases}$$

Предположим, что такая функция $G(\sigma, x)$, удовлетворяющая условию (5), уже найдена. Тогда нетрудно выписать формальное решение поставленной задачи. Действительно, функция

$$G_l(\sigma, x) = G(\sigma, x - l)$$

является узловой функцией для узла при $x = l$, так как при всех значениях m

$$G_l(\sigma, m) = G(\sigma, m - l) = \sigma_{ml}.$$

Тогда одним из решений поставленной интерполяционной задачи будет, очевидно, функция

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G_l(\sigma, x), \tag{6}$$

так как при $x = m$ от суммы (6) остаётся только одно слагаемое:

$$f(m)\, G_m(\sigma, m) = f(m) \cdot 1 = f(m).$$

Чтобы перейти от представления решения в виде (6) к искомому представлению в виде (1), выполним необходимую подстановку. В результате получим с учетом (4):

$$\tilde{f}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G_l(\sigma, x) =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l)\, G(\sigma, x - l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(l) \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_k\, e(\sigma, x - l, k)$$

Введём новый индекс суммирования $j = l + k$ вместо $l = j - k$ и формально поменяем порядок суммирования. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(j-k) g_k\, e(\sigma, x - j, k) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(j-k)\, g_k \right\} e(\sigma, x - j, k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j\, e(\sigma, x, j), \end{aligned} \tag{7}$$

где искомые коэффициенты разложения представляются в виде (после замены индексов $j \rightleftarrows k$, чтобы согласовать результат с (1)),

$$f_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(k - j)\, g_j, \tag{8}$$

где $f(m)$ — значения заданной функции в целых точках, а g_j — коэффициенты разложения базисной узловой функции (4).

Преобразуем систему уравнений:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e\left(\sigma, m, k\right) = \sigma_{m0},\ m \in \mathbb{Z}.$$

Для этого введём новую переменную $q = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$. Получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k q^{(m-k)^2} = \sigma_{m0},\ m \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Для численного решения необходимо рассмотреть конечномерные усечения полученной бесконечной системы уравнений (9).

3. Переход к конечномерным аппроксимациям интерполяционной задачи

Как было показано выше, при решении задач интерполяции ключевым моментом является построение узловой функции. Перейдём теперь к рассмотрению конечномерных приближений нервоначальной интерполяционной задачи, которые получаются в результате перехода от бесконечномерной системы к её конечномерным «усечениям». Этот естественный подход, основанный на приближении решений изучаемой интерполяционной задачи решениями конечномерных систем, рассматривался в работах [Ситник, 2013; Ситник, 2014, Ситник, Тимашов, 2014]. Разумеется, такой подход имеет свои ограничения, но вместе с тем он позволяет обойти некоторые сложности, возникающие при перечисленных выше других подходах, и расширяет возможности эффективного численного решения интерполяционной задачи, в том числе компьютерного.

Итак, будем искать приближения для узловой функции (4) $G\left(\sigma, x\right)$ в виде приближающей её функции $H\left(\sigma, x\right)$ в виде конечных сумм

$$H\left(n, x, \sigma\right) = \sum_{k=-n}^{n} d_k \cdot q^{(x-k)^2},\ q = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right),\quad 0 < q < 1, \tag{10}$$

при этом бесконечная система (9) заменяется конечной, причем число уравнений может быть больше числа неизвестных

$$H(n, m, j, \sigma) = \delta_{0j},\quad j = -m, \ldots, 0, \ldots m,\quad m \geq n. \tag{11}$$

В системе линейных уравнений, которая получается из условий (10)–(10), всего $2m+1$ уравнений и $2n+1$ неизвестных d_k, $-n \leq k \leq n$.

Перепишем систему уравнений, вытекающую из (10) – (11) в матричной форме:

$$A \cdot d = y, \tag{12}$$

где соответствующие элементы матрицы и вектора правой части представляются в виде

$$a_{ij} = q^{(i-j)^2},\quad y_j = \delta_{0j},\quad i = -n, \ldots, 0, \ldots, n,\quad j = -m, \ldots, 0, \ldots, m.$$

Для полученных при $m = n$ коэффициентов d_k приближённую узловую функцию будем обозначать как $H(n, x, \sigma)$, а при $m > n$, — как $H(n, m, x, \sigma)$.

Введём некоторые обозначения. Определитель Вандермонда размера n обозначим через $Wx_1, \ldots, x_n$, определитель Вандермонда без l–ой строки и k–ого столбца — $W_{l,k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Для наглядности общие выкладки далее с определителями и матрицами произвольных порядков будем иллюстрировать объектами размером 5×5 и получающимися из них, например,

$$W(rx_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix},$$

$$W_{3,2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5^3 & x_5^3 & x_5^4 \end{vmatrix}.$$

Как известно,

$$W_{l,k}(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_{n-k}} \cdot \prod_{n \geq i > j \geq 1,\ i \neq l, j \neq l} (x_i - x_j), \tag{13}$$

где сумма берется по всем сочетаниям $n - k$ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-k}$ из набора $1, 2, \ldots, n$.

Теперь основным объектом нашего изучения становится система линейных уравнений (12) с квадратной или прямоугольной матрицами. Далее используются обозначения, введённые в соотношениях (10)–(12).

Основные полученные результаты содержатся в двух теоремах.

Теорема 1. *Рассматриваемые конечномерные нрнблнження для нахождения коэффициентов базисной узловой функции образуют однозначно разрешимые системы линейных уравнений при любых размерностях, их определители не равны нулю.*

Теорема 2. *При увеличении размерности конечномерных систем их решения стремятся к решению исходной бесконечной системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов базисной узловой функции.*

Также проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров, результаты представлены в графическом и табличном виде. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. Выведен большой объём графиков для аппроксимаций этих сигналов, проанализированы ошибки приближений, вычислены количественные характеристики ошибок, среднеквадратичные и равномерные.

Представляется также перспективным использование данного метода при изучении дифференциальных уравнений Больцмана, а также с использованием теории операторов преобразования [Katrakhov, 2018; Sitnik, 2019].

4. Заключение

В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведен достаточно существенный объём компьютерных вычислений.

Приведём список основных полученных результатов, см. также [Ситник, 2013; Ситник, 2014, Ситник, Тимашов, 2014].

- Рассмотрена задача об интерполяции произвольной функции по её значениям при целых значениях аргумента при помощи целочисленных сдвигов квадратичной экснопенты — функции Гаусса.
- К данной задаче сведена математическая модель приближения цифровых сигналов но значениям их отсчетов.
- Применён метод узловых функций для решения данной интерполяционной задачи.
- Проведено сведение интерполяционной задачи к бесконечной системе линейных уравнений.
- Проведена редукция бесконечной системы линейных уравнений к конечной.
- Доказано, что при всех допустимых значениях параметров q,? исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.
- Проведено компьютерное исследование решений нолученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров q, σ.
- Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры.

Список литературы

1. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. 2009. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций. Научные ведомости Белгородского государственного университета. 13 (68); 17/2. С.89–99.
2. Ситник С.М., Тимашов А.С. 2013. Приложения экснонепциальной аппроксимации по целочисленным сдвигам функций Гаусса. Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. 2; 56. С.90–94.
3. Ситник С.М., Тимашов А.С. 2014. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции сигналов. Вестник Воронежского института МВД России. 2. С. 163–171.
4. Ситник С.М. 2014. Обобщённые дискретные преобразования Фурье и их спектральные свойства. Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы семнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. С. 281–291.
5. Ситник С.М., Тимашов А.С. 2014. Вычислительные аспекты метода квадратичной экснопенциальной интерполяции в задачах теории сигналов. Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Материалы семнадцатого научно-практического семинара. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. С.292–300.
6. Katrakhov V.V. , Sitnik S.M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 64; 2. P.211–426.

7. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. 2014. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. Mathematical Notes. 96; 1–2. P.228–238.

8. Maz'ya V., Schmidt G. 2007. Approximate approximations. Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs. 349p.

9. Sitnik S.M., Shishkina E.L. 2019. Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel operators. Moscow, Fizmatlit. 224P.

10. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. 2011. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions Journal of Mathematical Science, Springer. 2; 173. P.131–140.

References

1. Minin L.A., Sitneyk S.M., Zhuravlev M.V. 2009. O vy'chislitel'ny'kh osobennostiakh interpoliatcii s pomoshch'iu tcelochislenny'kh sdvigov gaussovy'kh funktcii'. Nauchny'e vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. 13 (68); 17/2. C.89–99.

2. Sitneyk S.M., Timashov A.S. 2013. Prilozheniia e'ksponentcial'noi' approksimatcii po tcelochislenny'm sdvigam funktcii' Gaussa. Vestneyk Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta inzhenerny'kh tekhnologii'. 2; 56. C.90–94.

3. Sitneyk S.M., Timashov A.S. 2014. Metod konechnomerny'kh priblizhenii' v zadachakh kvadratichnoi' e'ksponentcial'noi' interpoliatcii signalov. Vestneyk Voronezhskogo instituta MVD Rossii. 2. C.163–171.

4. Sitneyk S.M. 2014. Obobshchyonny'e diskretny'e preobrazovaniia Fur'e i ikh spektral'ny'e svoi'stva. Novy'e informatcionny'e tekhnologii v avtomatizirovanny'kh sistemakh. Materialy' semnadtcatogo nauchno-prakticheskogo seminara. M.: Institut pricladnoi' matematiki im. M.V. Keldy'sha RAN. C.281—291.

5. Sitneyk S.M., Timashov A.S. 2014. Vy'chislitel'ny'e aspekty' metoda kvadratichnoi' e'ksponentcial'noi' interpoliatcii v zadachakh teorii signalov. Novy'e informatcionny'e tekhnologii v avtomatizirovanny'kh sistemakh. Materialy' semnadtcatogo nauchno-prakticheskogo seminara. M.: Institut pricladnoi' matematiki im. M.V. Keldy'sha RAN. C. 292–300.

6. Katrakhov V.V. , Sitnik S.M. 2018. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 64; 2. P.211–426.

7. Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. 2014. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. Mathematical Notes. 96; 1–2. P.228–238.

8. Maz'ya V., Schmidt G. 2007. Approximate approximations. Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys and Monographs. 349p.

9. Sitnik S.M., Shishkina E.L. 2019. Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel operators. Moscow, Fizmatlit. 224P.

10. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. 2011. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions Journal of Mathematical Science, Springer. 2; 173. P.131–140.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Тимашев А.С. 2019. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной эксноненциальной интерноляции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (4): 514–521. DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-514-521.

Timashev A.S. 2019. Numerical solution to the finite-dimension problem of quadratic exponential interpolation. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (4): 514–521 (in Russian). DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-4-514-521.