



УДК 517.957, 336.76

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-451-459

СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕННОГО РАСПАДА  
ДЛЯ ОПЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ «СТРЭДДЛ»  
В СЛУЧАЕ НЕДОСТАТОЧНОЙ ЛИКВИДНОСТИ  
ИЛИ НАЛИЧИЯ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕЖЕК<sup>1)</sup>

TIME DECAY COMPARISON FOR OPTION STRADDLE  
IN CASE OF INSUFFICIENT LIQUIDITY OR TRANSACTION COSTS

М.М. Дышаев, В.Е. Федоров

M.M. Dyshaev, V.E. Fedorov

Челябинский государственный университет,  
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

Chelyabinsk State University,  
129 Kashyrin's Br. St., Chelyabinsk, 454001, Russia

E-mail: Mikhail.Dyshaev@gmail.com

**Аннотация**

В статье анализируется временной распад для опционной стратегии стрэддл (straddle). Моделирование осуществляется на примере двух моделей: Sircar-Papanicolaou (1998) и Jandačka-Ševčovič (2005). Первая модель учитывает эффекты обратной связи от операций крупных трейдеров, вторая учитывает наличие транзакционных издержек. Построены графики, показывающие отличие в ценах и в скорости временного распада для исследуемых нелинейных моделей от классической линейной модели Блэка-Шоулза при использовании стратегии straddle.

**Abstract**

The article analyzes time decay for the option strategy «straddle». The simulation is carried out on the example of two models: the model of R.K. Sircar and G. Papanicolaou (1998) and the model of M. Jandačka and D. Ševčovič (2005). The first model takes into account the feedback effects of the operations of large traders, the second model takes into account the transaction costs. The results are presented in the form of graphs, showing the difference in prices of and time decay for the nonlinear models under study from the classical linear model of Black-Scholes, when using the strategy straddle.

**Ключевые слова:** транзакционные издержки; нелинейные уравнения типа Блэка-Шоулза; ценообразование опционов; стрэддл.

**Key words:** transaction costs; nonlinear Black — Scholes equations; option pricing; straddle.

---

---

**Введение**

Классическая линейная модель ценообразования Блэка-Шоулза с постоянной (так называемой исторической) волатильностью была предложена в работе [5]. Модель была выведена с использованием нескольких ограничений, таких как непрерывная торговля,

---

<sup>1)</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00244.



отсутствие транзакционных издержек и абсолютная ликвидность. Согласно этой теории ценообразования опционов цена  $u(x, t)$  условного требования, где цена базового актива  $x > 0$  и момент времени  $t \in [0, T]$ , является решением линейного параболического уравнения:

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad (1)$$

где  $r > 0$  — безрисковая процентная ставка, а  $\sigma$  — постоянная историческая волатильность базового актива.

Однако практический анализ рыночных данных показывает необходимость построения более реалистичных моделей, которые учитывают вышеупомянутые недостатки классической теории Блэка-Шоулза. Это стимулировало разработку различных нелинейных моделей ценообразования опционов, в которых функция волатильности больше не является постоянной.

Наиболее общей моделью, учитывающей недостаточную ликвидность, является модель Сиркара-Папаниколау [16]. В данной модели для описания ценообразования опционов используется понятие совокупного дохода «реферальных» трейдеров. Авторами получено семейство нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, в случае отсутствия программных трейдеров ( $\rho \rightarrow 0$ ,  $\rho$  — доля крупных трейдеров) сводящееся к классическому уравнению Блэка-Шоулза:

$$u_t + \frac{1}{2} \left[ \frac{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x))}{V(1 - \rho u_x) U'(V(1 - \rho u_x)) - \rho x u_{xx}} \right]^2 \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $V(\cdot) = U^{-1}(\cdot)$ , а  $U(\cdot)$  — функция относительного спроса реферальных трейдеров. Авторы модели, Р. Сиркар и Г. Папаниколау, подробно рассматривали случай линейной функции  $U(z) = \beta z$ ,  $\beta > 0$ , в этом случае уравнение имеет вид

$$u_t + \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \rho u_x}{1 - \rho u_x - \rho x u_{xx}} \right]^2 \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0, \quad (3)$$

и провели численное исследование поведения модели в моменты, близкие к экспирации опционов.

**Замечание.** Проведенная групповая классификация уравнения (2) (см. [7, 10]) позволила выделить две спецификации, которым соответствуют логарифмическая функция спроса реферальных трейдеров  $U(z) = \frac{1}{\beta} \ln z + A$  и степенная функция спроса  $U(z) = Az^{1/\beta}$ , где  $A$  — константа интегрирования. В этом случае модель выглядит как

$$u_t + \frac{1}{2} [1 - xv(u_x)u_{xx}]^{-2} \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0.$$

При этом свободный элемент  $v(u_x)$  принимает значения  $v(u_x) = \beta$  (логарифмическая функция спроса) или  $v(u_x) = \beta/u_x$  для степенной функции спроса. Здесь  $\beta$  — постоянная. В случае, когда  $v(u_x) = 0$ , получается линейная модель Блэка-Шоулза, которая, заметим, методами симметричного анализа была исследована в работе [11].

Методология ценообразования с поправкой на риск (risk adjusted pricing methodology, сокращенно RAPM), учитывающая не только транзакционные издержки, но и



риск, возникающий из-за недостаточной частоты балансировки портфеля при дельта-хеджировании, была обобщена в [14]. В этой модели уравнение имеет вид

$$u_t + \frac{1}{2} \left[ 1 - \mu (xu_{xx})^{\frac{1}{3}} \right] \sigma^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0, \quad (4)$$

где  $\mu = 3(C_0^2 R / 2\pi)^{\frac{1}{3}}$ ,  $C_0, R \geq 0$  — неотрицательные постоянные, представляющие показатель стоимости транзакции и показатель премии за риск соответственно. В численных расчетах авторы брали показатель  $\mu = 0.2$ .

Существует много различных опционных стратегий, направленных на решение задач максимизации прибыли, страхования портфеля или управления риском [4]. Одна из них, часто используемая на практике, получила название straddle («стеллаж»). Она состоит в одновременной покупке или продаже опциона колл (call) и опциона пут (put), на одну дату исполнения (дата экспирации, *expire date*) и с одной ценой исполнения (страйк, *strike price*). Если ожидается, что цена базового актива существенно вырастет или упадет, покупаются два опциона, колл и пут. И наоборот, если ожидается, что цена базового актива останется на месте, трейдер продает два опциона, колл и пут, с одними страйком и датой экспирации.

Так как цена опциона в соответствии с моделью Блэка-Шоулза зависит помимо прочего от времени, оставшегося до истечения опциона, уменьшение цены называется *временным распадом* цены опциона. Во многом доходность операций с опционами зависит от скорости, с какой уменьшается цена опциона при сохраняющихся остальных параметрах. Показателем, характеризующим временной распад, является частная производная цены опциона  $u$  по времени  $t$ :

$$\text{Theta} = -\frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5)$$

Знак минус перед производной ставят, чтобы подчеркнуть уменьшение стоимости со временем. В рыночном сообществе этот и подобные показатели получили общее название «греки» или «показатели чувствительности» (Greeks, sensitivities). На практике используется около 30 таких показателей. Наиболее подробное, по-видимому, их описание и анализ для линейной модели приведены в книге [13, Табл 2.1, стр 22]. Для некоторых нелинейных моделей подобные результаты приведены в [8, 9].

## 1. Численное решение

**1.1. Начально-краевая задача.** Первоначальной целью данной работы является нахождение численного решения краевой задачи для уравнения

$$u_t + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 x^2 u_{xx} + r(xu_x - u) = 0, \quad (x, t) \in [0, +\infty) \times [0, T], \quad (6)$$

при различных модифицированных волатильностях  $\hat{\sigma}$  и граничных условиях для стратегии straddle.

Так как граничные условия для стратегии являются суммой граничных условий для входящих в нее опционов, в случае, например, «длинного стрэддла» (long straddle),



состоящего из двух купленных опционов колл и пут, получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{longcall :} \quad & u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \quad u(x, T) = \max\{x - K, 0\}, \\ \text{longput :} \quad & u(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, T) = \max\{K - x, 0\}, \\ \text{longstraddle :} \quad & u(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \quad u(x, T) = |x - K|, \end{aligned}$$

где цена страйк для опционов  $K > 0$ , историческая волатильность базового актива  $\sigma > 0$  и безрисковая процентная ставка  $r \geq 0$ .

В данной работе была выполнена замена направления времени  $t' = T - t$  и усечение области определения справа. Усечение области определения  $x$  было сделано в соответствии с методом, изложенном в [15]. В результате получаем начально-краевую задачу (обозначив новое время снова как  $t$ )

$$u_t - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) = 0, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (7)$$

$$u(0, t) = Ke^{-rt}, \quad u(1, t) = 1 - Ke^{-rt}, \quad t \in [0, 1], \quad (8)$$

$$u(x, 0) = |x - K|, \quad x \in [0, 1]. \quad (9)$$

**1.2. Выбор шаблона.** Численные решения получены для трех моделей:

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}_{BS}^2 = \sigma^2, & \text{линейная модель Блэка-Шоулза;} \\ \hat{\sigma}_{SP}^2 = \sigma^2 \left( \frac{1 - \rho u_x}{1 - \rho u_x - \rho x u_{xx}} \right)^2, & \text{нелинейная модель Sircar-Papanicolaou;} \\ \hat{\sigma}_{JS}^2 = \sigma^2 \left( 1 - \mu (x u_{xx})^{\frac{1}{3}} \right), & \text{нелинейная модель Jandačka-Ševčovič.} \end{cases} \quad (10)$$

Известная устойчивость неявных схем и наличие ограничений на величину шага  $\tau$  по времени  $t$  в явных схемах для параболических уравнений предполагали выполнение расчетов с использованием только неявной схемы. Однако явная схема обладает тем преимуществом, что помимо относительно быстрого счета все величины в (10) могут быть выражены через значения с одного и того же временного слоя и нет необходимости прибегать к дополнительным допущениям при вычислениях.

В то же время использование чисто неявной схемы и последующее применение метода прогонки, являющегося частным случаем метода исключения Гаусса, как раз затруднено из-за наличия нелинейных членов в уравнении (7). Поэтому было принято решение брать значения  $u(x, t)$  для нелинейных членов уравнений с предыдущего временного слоя. В силу нелинейности уравнений отметим также необходимость установления ограничений на шаг по времени  $\tau$ .

В данной ситуации удобно воспользоваться двухслойным неявно-явным шеститочечным шаблоном с весами (см. [3, с. 193], [1, с. 370–372], [12]), когда значения искомой функции  $u_n^{m+1}$  на  $(m + 1)$ -м слое имеют вес  $\omega$ , а значения с предыдущего  $m$ -го слоя учитываются с весом  $1 - \omega$ . Получаемая с его помощью разностной схемой называется неявно-явной разностной схемой с весами и в случае, когда  $\omega = 1/2$ , получила название схемы Кранка-Никольсон [6].



Для линейного уравнения параболического типа с постоянным коэффициентом  $u_t = au_{xx}$ ,  $a > 0$ , такая схема безусловно устойчива при  $1/2 \leq \omega \leq 1$ . При  $0 \leq \omega < 1/2$  схема устойчива, если шаг по времени выбран таким, чтобы  $\tau \leq \frac{h^2}{2a(1-2\omega)}$ . В работе [12] проведено исследование ошибок аппроксимации, устойчивости и сходимости данной конечно-разностной схемы для линейного уравнения Блэка-Шоулза.

Для нахождения приближенного решения уравнения (7) использовались следующие разностные представления функции  $u(x, t)$  и ее производных:

$$\begin{aligned} u &\sim \omega u_n^{m+1} + (1 - \omega) u_n^m, & u_t &\sim \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau}, \\ u_x &\sim \omega \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^{m+1}}{h} + (1 - \omega) \frac{u_{n+1}^m - u_n^m}{h}, \\ u_{xx} &\sim \omega \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + (1 - \omega) \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{h^2}, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $\tau$  — шаг по переменной  $t$ ,  $h$  — шаг по переменной  $x$ .

Общим для всех расчетов является тот факт, что первоначально выбирался шаг  $\tau$ , не превышающий шага, необходимого для устойчивой работы явной схемы для линейного уравнения параболического типа  $u_t = u_{xx}$ , т.е.  $\tau \leq \tau_{\max}$ . В случае переменной величины шага  $\tau$  предусмотрено, что в процессе счета  $\tau$  не может превысить этой величины. Следующий шаг по времени выбирался как

$$\tau_{m+1} = \min \left\{ \tau_{\max}, \frac{h^2}{2 \max_k (A_k^m)} \right\}, \quad A_n^m = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_n^m)^2 h^2 n^2,$$

где  $A_k^m$  рассчитывается для каждой исследуемой модели (10) в узле  $k$  в слое  $m$ .

**1.3. Решение системы линейных уравнений.** Подставив в уравнение (7) соответствующие разностные представления (11), получим следующую систему линейных уравнений:

$$a_n u_{n-1}^{m+1} - b_n u_n^{m+1} + c_n u_{n+1}^{m+1} = d_n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad m = 1, 2, \dots, M - 1,$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2} \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2, \\ b_n &= -\left[ \frac{1}{\tau} + \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 + \omega r n + r \omega \right], \\ c_n &= -\frac{1}{2} \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 - \omega r n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\tau} u_n^m + (1 - \omega) (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 (u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m) - \\ &\quad - r (1 - \omega) u_n^m + r (1 - \omega) n (u_{n+1}^m - u_n^m), \end{aligned}$$

и  $(\hat{\sigma}_n^m)^2$  является модифицированной волатильностью для каждой модели из (10). Напомним, что в формулах для волатильности используются значения с предыдущего временного слоя.

Полученная система решалась методом прогонки. Метод прогонки применим в данном случае, поскольку выполняется (причем строго) условие преобладания диагональных элементов  $|b_n| \geq |a_n| + |c_n|$  (нет деления на ноль).

**1.4. Параметры для расчетов.** Для выполнения расчетов необходимо выбрать коэффициенты разностной схемы и задать несколько параметров моделей.

Для двухслойного неявно-явного шеститочечного шаблона весовой коэффициент для задания веса верхнего слоя в шаблоне выбран как  $\omega = 0,9$ . Количество узлов по оси  $x$  принято равным  $N = 200$ . Следовательно, шаг по оси  $x$ , учитывая выполненное усечение области до  $[0, 1]$ , равен  $h = 1/N$ .

Для нелинейной модели Сиркара-Папаниколау необходимо задать долю крупных (программных) трейдеров в операциях  $\rho$ . Следуя авторам модели, полагаем  $\rho = 0,1$ . Для расчетов в нелинейной модели Яндачки-Шевчовича воспользуемся значением коэффициента  $\mu = 0,2$ , которое также было использовано авторами модели.

Для приближения результатов моделирования к фактическим данным полагаем при моделировании  $\sigma = \sigma_{BS} = 0,299688$ . Данное числовое значение получено для волатильности фьючерса BR-8.19 на нефть сорта Brent [2]. За волатильность принято стандартное отклонение цен закрытия за период с 13.03.2016 по 20.06.2019 (69 торговых дней), приведенное к годовому исчислению (250 торговых дней). Время, оставшееся до погашения опционов (они истекают 26.07.2019), фактически составляет 26 рабочих дней или  $t = 26/250 = 0,104$ .

Чтобы наглядно продемонстрировать эффекты от временного распада, учтем цены приобретения или продажи опционов в стратегии. Цены получены из модели Блэка-Шоулза и рассчитаны для фактической волатильности и оставшегося времени до исполнения. В модели цена опциона call составила 0,015612, а для опциона put — 0,015237.

Поскольку базовым активом в исследовании выступает фьючерс, а не акция, и опционы являются маржируемыми (futures-style options), то безрисковая процентная ставка должна быть принята для расчетов как  $r = 0,0$ .

## 2. Результаты

Ниже на рисунках представлены полученные результаты расчетов. На рисунке 1 представлены временные срезы для цены сформированной стратегии long straddle и временные срезы скорости изменения цены со временем для различных цен базового актива в модели Яндачки-Шевчовича. Для модели Сиркара-Папаниколау результаты представлены на рисунке 2.



Рис. 1. Временные срезы цены купленного straddle (слева) и для Theta (справа) в модели Яндачки-Шевчовича

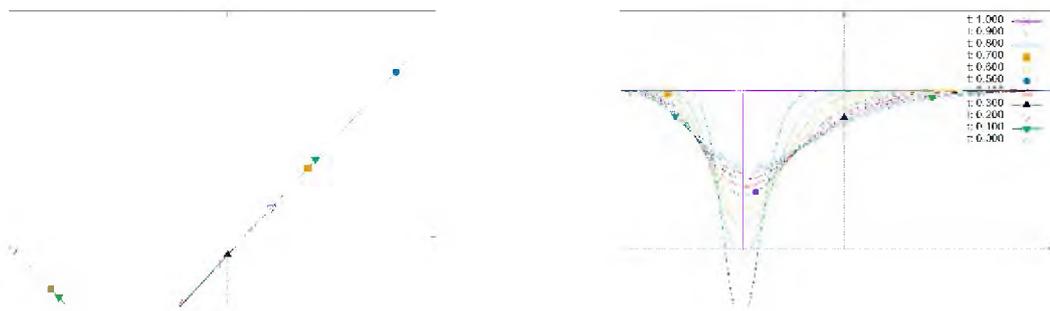


Рис. 2. Временные срезы цены купленного straddle (слева) и для Theta (справа) в модели Сиркара-Папаниколау

Из графиков видно, что в полном соответствии с теорией и практикой временной распад почти отсутствует при цене базового актива  $x$ , отстоящей далеко <sup>2)</sup> от страйка  $K = 0,4$ , по которой сформирован straddle. Расстояние между линиями на рисунках соответствует примерно одному календарному месяцу. Согласно графикам за последний месяц цена из-за временного распада сильно убывает и делает стратегию убыточной для купленного straddle, сформированного близко к центральному страйку.

На рисунке 3 представлено сравнение показателя Theta для рассматриваемых в работе моделей за один год до истечения опционов ( $t = 0$ ). Видно, что из-за эффектов недостаточной ликвидности, учитываемых моделью Сиркара-Папаниколау, временной распад существенно меньше, чем в классической линейной модели Блэка-Шоулза и модели Яндачки-Шевчовича, учитывающей транзакционные издержки.

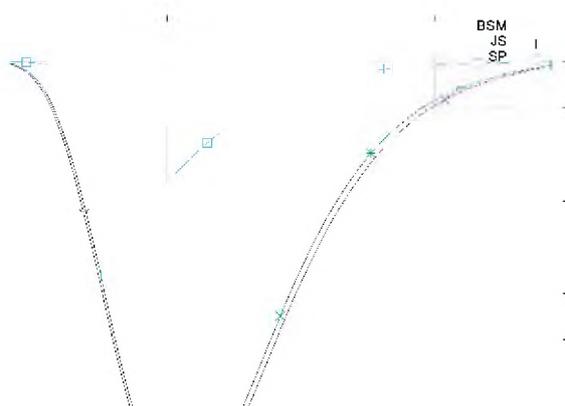


Рис. 3. Сравнение Theta для моделей Яндачки-Шевчовича (JS), Сиркара-Папаниколау (SP) и модели Блэка-Шоулза (BSM) в момент  $t = 0$

<sup>2)</sup>  $x < 0,2$  или  $x > 0,8$ , т.е. опционы находятся либо глубоко «вне денег» (out of the money, OTM), либо глубоко «в деньгах» (in the money, ITM).



### 3. Заключение

В работе рассмотрены две модели, отличные от модели Блэка-Шоулза, одна из которых учитывает эффекты недостаточной ликвидности, а другая — наличие транзакционных издержек. Для каждой из моделей построены графики, представляющие изменение скорости, с которой цена опционной стратегии straddle меняется по мере приближения срока истечения опциона. Также представлен график, наглядно демонстрирующий разницу в скорости временного распада для разных моделей в сравнении с классической линейной моделью Блэка-Шоулза.

### Список литературы References

1. Калиткин Н.Н. 1978. Численные методы. М.: Гл. редакция физ.-мат. лит. изд-ва «Наука». Kalitkin N.N. 1978. Chislennyye metody. M.: Nauka.
2. Московская Биржа: Итоги торгов по фьючерсным контрактам и опционам. URL: <https://www.moex.com/ru/derivatives/contractresults.aspx?code=BR-8.19>. (дата обращения 22.06.2019).  
Moskovskaja Birzha: Itogi torgov po f'juchersnym kontraktam i opcionam.  
Available at: <https://www.moex.com/ru/derivatives/contractresults.aspx?code=BR-8.19>. (accessed 22.06.2019).
3. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.В. Разностные методы решения краевых задач: пер. с англ. М.: Мир, 1972.
4. Халл Джон К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты: пер. с англ. 8-е изд. М.: ООО «И.Д.Вильямс», 8 издание, 2014.
5. Black F., Scholes M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
6. Crank J., Nicolson P. 1947. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1):50–67.
7. Dyshaev M.M., Fedorov V.E. 2016. Symmetry analysis and exact solutions for a nonlinear model of the financial markets theory. *Mathematical Notes of North-Eastern Federal University*, 23(1):28–45.
8. Dyshaev M.M., Fedorov V.E. 2019. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. *Mathematical notes of NEFU*, 26(2):94–108.
9. Dyshaev M.M., Fedorov V.E. The Sensitivities (Greeks) for some models of option pricing with market illiquidity. DOI:10.13140/RG.2.2.27157.58083.
10. Fedorov V.E., Dyshaev M.M. Invariant solutions for nonlinear models of illiquid markets. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(18):8963–8972, January 2018.
11. Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 17(4):387–407, December 1998.



12. Geske R., Shastri K. 1985. Valuation by approximation: a comparison of alternative option valuation techniques. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 20(1):45–71.
13. Haug E.G. 2007. *The complete guide to option pricing formulas*. McGraw-Hill, New York, second edition.
14. Jandačka M., Ševčovič D. 2005. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. *Journal of Applied Mathematics*, 2005(3):235–258.
15. Kangro R., Nicolaides R. 2000. Far field boundary conditions for Black-Scholes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(4):1357–1368.
16. Sircar R.K., Papanicolaou G. 1998. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 5(1):45–82.

**Ссылка для цитирования статьи**

**Reference to article**

Дышаев М.М., Федоров В.Е. 2019. Сравнение временного распада для опционной стратегии «стрэддл» в случае недостаточной ликвидности или наличия транзакционных издержек. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 51 (3): 451–459. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-451-459.

Dyshaev M.M., Fedorov V.E. 2019. Time decay comparison for option straddle in case of insufficient liquidity or transaction costs. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*. 51 (3): 451–459 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-451-459.