УДК 517.987
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-3-366-373

УНИМОДАЛЬНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ МАКСИМУМОВ ВЫБОРКИ НЕЗАВИСИМЫХ ЭРЛАНГОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

UNIMODALITY OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS FOR SAMPLE MAXIMA OF INDEPENDENT ERLANG RANDOM VARIABLES

Ю.П. Вирченко, А.Д. Новосельцев

Yu.P. Virchenko, A.D. Novoseltsev

ООО Матрица
Россия, Белгород, ул. Королева 2а, Белгород, 308000, Россия
ООО Matrix,
2 Koroleva St., Belgorod, 308000, Russia

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы 85
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация

Рассматриваются выборки конечного объема $N \geq 2$ независимых одинаково распределенных случайных неотрицательных величин $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$. Ставится задача о нахождении достаточных условий для их общего распределения вероятностей $Q(x) = \Pr\{\tilde{r}_j < x\}$, $j = 1 \div N$, которые гарантируют унимодальность распределения вероятностей $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\}$ их максимума $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$. Доказывается, что в случае, если Q имеет непрерывно дифференцируемую плотность q, которая является плотностью Эрланга произвольного порядка $n \in \mathbb{N}$, то распределение F_N обладает непрерывно дифференцируемой унимодальной плотностью f_N.

Abstract

Finite samples of independent identically distributed nonnegative random variables $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$ are under consideration. It is set the problem about sufficient conditions for their common probability distribution $Q(x) = \Pr\{\tilde{r}_j < x\}$, $j = 1 \div N$ which guarantee the unimodality of the probability distribution $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\}\}$ of random value $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$. It is proven that in the case when Q has the continuously differentiable density q that is the Erlang density with an arbitrary order $n \in \mathbb{N}$, the distribution F_N is unimodal.

Ключевые слова: независимые случайные величины, максимум выборки, распределение вероятностей, унимодальность, плотность распределения, распределение Эрланга.

Key words: equivalent independent random values, sample maxima, probability distribution, unimodality, probability density, Erlang distribution.

Введение

Существует довольно обширное множество прикладных задач, при решении которых необходимо закладывать в конструкцию математической модели выборки независимых одинаково распределенных случайных величин $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$ и анализировать распределение вероятностей выборочных экстремумов (см., например, [Gnedenko, 1941; Gnedenko 1943; Gumbel 1962]). В частности, такая проблема возникает при изучении вероятностной модели электрической прочности полимерных эмаль-лаковых покрытий [Брагинский и др. 1983; Брагинский и др. 1988). В этой модели случайные величины $\tilde{r}_j$, $j = 1 \div N$ являются некоторыми случайными размерами воздушных включений в материал покрытия, которые возникают в результате технологического процесса создания покрытия. В рамках этой модели локальная электрическая прочность является убывающей функцией максимума $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$ случайных радиусов воздушных пузырьков. В этом случае необходимо изучить распределение вероятностей случайной величины $\tilde{r}$, когда $\tilde{r}_j$, $j = 1 \div N$ являются статистически независимыми и эквивалентно распределенными случайными положительными величинами. При этом объем выборки $N \geq 2$, по порядку величины, равен числу воздушных включений, приходящихся на 1 см^2 площади покрытия. Таким образом, это число является довольно неопределенным и не очень большим. Ввиду его относительно малой величины, нет возможности использовать при анализе модели известные предельные теоремы для распределения вероятностей выборочных максимумов [Gnedenko, 1941; Gnedenko 1943]. В условиях такой неопределенности математического моделирования приходится изучать функцию $F_N(x)$ при очень широких предположениях относительно распределения вероятностей $Q(x) = \Pr\{\tilde{r}_j < x\}$, $j = 1 \div N$ размеров воздушных пор. При этом предсказательную ценность составляют только наиболее важные качественные свойства распределения вероятностей $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\}$, которые могут наблюдаться при статистическом анализе. Ввиду же неопределенности числа N, искомые качественные свойства не должны зависеть от его величины.

Одним из наиболее важных качественных свойств одномерных распределений вероятностей, которые просто идентифицируются в процессе обработки статистических данных, является число их мод, в частности, распределения, используемые в математической статистике (например, распределения Пирсона [Королюк и др. 1985]) являются унимодальными. Проблеме унимодальности одномерных распределений вероятностей уделено большое внимание в научной литературе по теории вероятностей (см., например, [Lukacs 1970]). С физической точки зрения нарушение унимодальности распределения означает наличие какого-то специфического физического механизма, приводящего к появлению этого эффекта. Проявление его в процессе обработки статистических данных может оказаться довольно неожиданным сюрпризом и поэтому подлежит теоретическому осмыслению. Как раз такая ситуация реализуется в статистике электрической прочности эмаль-лаковых покрытий, что и вызвало исследовательский интерес к этой проблеме в работах [Брагинский и др. 1983; Брагинский и др. 1988]. В настоящей работе мы покажем, что при использовании, в процессе вероятностного моделирования положительных случайных величин $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$, любого из распределений Эрланга, распределение F_N является одновершинным.

2. Постановка задачи

Обозначим посредством $Q(x)$, $x > 0$ общее распределение вероятностей случайных величин $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$. Будем предполагать, что $Q(x)$ имеет непрерывную на $x > 0$ плотность $q(x) = dQ(x)/dx > 0$ на $[0, \infty)$, которая имеет единственный максимум, т. е. $Q(x)$ является унимодальным распределением. Так как $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$ статистически независимы, то $F_N(x) = \prod_{j=1}^{N} \Pr\{\tilde{r}_j < x\} = [Q(x)]^N$. В этом случае функция распределения $F_N(x)$ также имеет непрерывную плотность $f_N(x)$ при $x > 0$, которая дается следующей формулой:

$$f_N(x) = Nq(x)Q^{N-1}(x)\,, \qquad N \geq 2\,, \tag{1}$$

которое определяет все экстремальные точки плотности f_N.

Необходимо проанализировать, для каких унимодальных плотностей $q(x)$ плотность (1) также является унимодальной, а в каких случаях она имеет более одного максимума. Будем предполагать, далее, что плотность q является непрерывно дифференцируемой. Вследствие непрерывной дифференцируемости q, согласно (1), плотность $f_N(x)$ также непрерывно дифференцируема, и ее производная дается формулой $\dot{f}_N(x) = NQ^{N-2}(x)\big(\dot{q}(x)Q(x) + (N-1)q^2(x)\big)$, $N \geq 2$. Тогда задача об определении числа максимумов у плотности f_N сводится к определению числа решений уравнения

$$\dot{q}(x)Q(x) + (N-1)q^2(x) = 0\,, \quad x > 0\,, \quad Q(x) = \int_0^x q(y)dy\,. \tag{2}$$

В этой работе мы будем предполагать, что плотность q принадлежит классу плотностей распределений Эрланга, то есть представляется формулой

$$q(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda x)\,, \tag{3}$$

где число $n \in \mathbb{N}$ – порядок распределения, а $\lambda > 0$ – размерный параметр, определяющий статистические характеристики случайных величин $\tilde{r}_j$, $j = 1 \div N$.

Заметим, что $Q(0) = 0$, и поэтому должно иметь место $q(0) = 0$, т. е. уравнение (2) всегда имеет решение $x = 0$. В этой точке реализуется минимум неотрицательной плотности $f_N(x)$. Таким образом, нас будут интересовать строго положительные решения уравнения (2), которые обязаны существовать, ввиду неотрицательности $f_N(x)$. Наименьшее из таких решений очевидно соответствует максимуму плотности $f_N(x)$. Наконец, заметим, что при получении уравнения (2) производится деление на выражение $\big(\int_0^x q(y)dy\big)^{N-2}$, которое равно нулю при $x = 0$, если $N > 2$. По этой причине уравнение (2) может не содержать нулевого решения. Тем не менее утверждение о том, что его наименьшее положительное решение соответствует максимуму плотности $f_n(x)$ остается в силе.

Пример 1. Пусть $n = 1$, то есть $q(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\dot{q}(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$. Подстановка в уравнение (2) приводит к равенству

$$(1 - e^{-\lambda x}) = (N-1)e^{-\lambda x}\,, \tag{4}$$

которое возможно только при $1 = Ne^{-\lambda x}$, то есть имеется единственное решение $x_m = \ln N/\lambda$, которое является точкой максимума, а точка $x = 0$ выпала из рассмотрения.

Прежде чем переходить к доказательству основного результата работы, докажем следующее простое утверждение.

Теорема 1. Уравнение (2) эквивалентно уравнению для плотности $\mu q(\mu x)$ с произвольным значением $\mu > 0$.

□ При замене $q(x)$ на $\mu q(\mu x)$ имеет место $\dot{q}(x) \Rightarrow \mu^2 \dot{q}(\mu x)$ и, следовательно, уравнение (2) переходит в следующее

$$\mu^2 \dot{q}(\mu x) \cdot \mu \int\limits_0^x q(\mu y) dy + (N-1)\mu^2 q^2(\mu x) = 0\,,$$

$$\dot{q}(\mu x) \cdot \int\limits_0^{\mu x} q(y) dy + (N-1) q^2(\mu x) = 0\,.$$

После замены $\mu x \Rightarrow x$ получаем исходное уравнение (2). ■

В связи с доказанной теоремой, далее, достаточно исследовать уравнение (2) с плотностью

$$q(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-x)\,. \tag{5}$$

Пример 2. Рассмотрим случай $n = 2$, $q(x) = xe^{-x}$, $\dot{q}(x) = (1-x)e^{-x}$. Так как $\int\limits_0^x ye^{-y} dy = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$, то уравнение (2) в этом случае принимает вид

$$(1-x)(1 - e^{-x} - xe^{-x}) + (N-1)x^2 e^{-x} = 0\,,$$

либо, после преобразований,

$$1 - x = g(x)\,,$$

где

$$g(x) = e^{-x}(1 - Nx^2)\,.$$

Точка $x = 0$ является его решением, так как $g(0) = 1$. Производная функции g равна

$$\dot{g}(x) = e^{-x}(Nx^2 - 2Nx - 1)\,,$$

и поэтому $g(x)$ убывает при $Nx^2 - 2Nx - 1 < 0$, то есть при $x < 1 + \sqrt{1 + N^{-1}}$. В точке $x = 0$ имеем $\dot{g}(0) = -1$, то есть $g(x)$ касается графика линейной функции $1 - x$. Вторая производная функции g дается формулой

$$\ddot{g}(x) = e^{-x}(Nx^2 - 4Nx + 4N - 1)\,.$$

В точке $x = 0$ имеем $\ddot{g}(0) = -1$, то есть $g(x)$ вогнута при $Nx^2 - 4Nx + 4N - 1 < 0$, что имеет место начиная с точки $x = 0$, крайней точки ее области определения, и до точки $2 + \sqrt{4 - (4N-1)/N^2} = 4 - N^{-1}$. Поэтому на интервале $(0, 4 - N^{-1}]$ уравнение $g(x) = 1 - x$ не имеет корней. На интервале же $[4 - N^{-1}, \infty)$, где функция g выпукла и $g(x) < 1 - x$ при $x = 4 - N^{-1}$, уравнение имеет ровно один корень. В самом деле, во-первых, в силу выпуклости $g(x)$ уравнение имеет не более двух корней на этом интервале. Во-вторых, в случае отсутствия корней или наличия двух корней на нем, должно выполняться неравенство $g(x) < 1 - x$ на обоих концах интервала. Однако, при $x \to \infty$ функция $g(x) \to 0$, а $1 - x$ стремится к $-\infty$.

3. Основная теорема

В этом разделе мы докажем то утверждение, которому посвящено настоящее сообщение.

Теорема 2. Распределение вероятностей $F_N(x) = \Pr\{\tilde{r} < x\} = Q^N(x)$ максимума выборки N независимых одинаково распределенных неотрицательных величин $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$ с общим для них распределением вероятностей $Q(x)$, $x > 0$ унимодально при любом $N \in \mathbb{N}$ в том случае, когда $Q(x)$ определяется плотностью Эрланга

$$q(x) = \big(x^{n-1}\lambda^n/(n-1)!\big)\exp(-\lambda x)$$

при любых $\lambda > 0$ и $n \in \mathbb{N}$.

□ В силу теоремы 1, достаточно дать доказательство для $\lambda = 1$. Будем считать, что $N \geq 2$ и $n \geq 2$, так как при $N = 1$ утверждение тривиально, а при $n = 1$ его доказательство дается рассмотренным выше примером 1.

Доказательство состоит в вычислении, аналогичном тому, которое представлено в последнем рассмотренном выше примере. Для плотности q при $\lambda = 1$ имеем $\dot{q}(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}/(n-1)!$,

$$\int\limits_0^x q(y)dy = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x y^n e^{-y}dy = n\Big(1 - e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\frac{x^l}{l!}\Big)\,.$$

Подстановка в уравнение (2) дает

$$x^{n-1}(n-x)e^{-x}n!\Big(1 - e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\frac{x^l}{l!}\Big) + (N-1)x^{2n}e^{-2x} = 0$$

или, после очевидных алгебраических преобразований без учета корня уравнения $x = 0$,

$$(n-x)\Big(1 - e^{-x}\sum_{l=0}^{n}\frac{x^l}{l!}\Big) + (N-1)\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-x} = 0\,.$$

Отделяя слагаемые, пропорциональные e^{-x}, запишем это уравнение в следующей форме

$$(n-x) = e^{-x}\Big(n + \sum_{l=1}^{n-1}\frac{x^l}{(l-1)!}\Big[\frac{n}{l} - 1\Big] - \frac{Nx^{n+1}}{n!}\Big)\,. \tag{6}$$

Введем функцию $g(x) = e^{-x}P(x)$, где полином $P(x)$ представлен формулой

$$P(x) = n + \sum_{l=1}^{n-1}\frac{x^l}{(l-1)!}\Big[\frac{n}{l} - 1\Big] - \frac{Nx^{n+1}}{n!}\,, \tag{7}$$

с $n \geq 2$. Таким образом, решения уравнения (6) определяются точками пересечения графиков функций $n - x$ и $g(x)$. Графики, заведомо, пересекаются в точке $x = 0$, так как $g(0) = n$. Это решение не представляет интереса, так как соответствует точке минимума плотности $f_N(x)$. Далее,

$$\dot{g}(x) = e^{-x}(\dot{P}(x) - P(x))\,,$$

где

$$\dot{P}(x) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{l x^{l-1}}{(l-1)!}\left[\frac{n}{l} - 1\right] - \frac{(n+1)N x^n}{n!}\,. \tag{8}$$

Согласно этой формуле и формуле (7),

$$\dot{P}(x) - P(x) =$$

$$= -1 + \sum_{l=1}^{n-2} \frac{x^l}{(l-1)!}\left(\frac{l+1}{l}\left[\frac{n}{l+1} - 1\right] - \left[\frac{n}{l} - 1\right]\right) - \frac{x^{n-1}}{(n-2)!}\left[\frac{n}{n-1} - 1\right] + \frac{N x^n}{n!}(x - n - 1) =$$

$$= -1 - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} + \frac{N x^n}{n!}(x - n - 1)\,. \tag{9}$$

Следовательно, $\dot{g}(0) = \dot{P}(0) - P(0) = -1$, то есть график $g(x)$ касается графика $n - x$ точке $x = 0$.

Вычислим вторую производную функции $g(x)$,

$$\ddot{g}(x) = e^{-x}(P(x) - 2\dot{P}(x) + \ddot{P}(x))\,. \tag{10}$$

Так как, на основании (9),

$$\ddot{P}(x) - \dot{P}(x) = -1 - \sum_{l=1}^{n-2} \frac{x^l}{l!} + \frac{N x^{n-1}}{n!}(n+1)(x - n)\,,$$

то

$$P(x) - 2\dot{P}(x) + \ddot{P}(x) = \left\{ -1 - \sum_{l=1}^{n-2} \frac{x^l}{l!} + \frac{N x^{n-1}}{n!}(n+1)(x-n)\right\} -$$

$$-\left\{ -1 - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{x^l}{l!} + \frac{N x^n}{n!}(x - n - 1)\right\} =$$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{N x^{n-1}}{n!}\left[x^2 - 2x(n+1) + n(n+1)\right].$$

Отсюда следует, что в точке $x = 0$ выполняется $\ddot{g}(0) = 0$, однако в любой достаточно малой окрестности этой точки $\ddot{g}(x) < 0$, то есть функция $g(x)$ вогнута в этой окрестности. Кроме того, $g(x)$ имеет одну точку перегиба $x_* > 0$, где $\ddot{g}(x_*) = 0$, так как она удовлетворяет квадратному уравнению

$$n - N\left[x^2 - 2x(n+1) + n(n+1)\right] = 0\,,$$

которое имеет одно положительное решение

$$x_* = n + 1 + \sqrt{n + 1 + n/N}\,.$$

Дальнейшее рассуждение точно такое, как в примере 2. В силу вогнутости $g(x)$ и касания ее графика прямой $n - x$ в точке $x = 0$, должно иметь место $g(x) < n - x$ всюду на интервале $[0, x_*]$. Поэтому на интервале $(0, x_*)$ уравнение $g(x) = n - x$ не имеет корней.

На интервале же $[x_*\infty)$, где функция $g(x)$ выпукла и $g(x_*) < n - x_*$, уравнение имеет ровно один корень x_+. Такое положение, действительно, имеет место. Во-первых, в силу выпуклости $g(x)$, уравнение имеет не более двух корней. Во-вторых, в случае отсутствия корней или наличия ровно двух корней, ввиду $g(x_*) < n - x_*$, должно выполняться неравенство $g(x) < n - x$ при всех достаточно больших значениях x. Однако при $x \to \infty$ функция $g(x) \to 0$, а $n - x$ стремится к $-\infty$. Единственный положительный корень x_+ уравнения $n - x = g(x)$ соответствует положению единственного максимума плотности q. ■

4. Заключение

В заключение работы отметим, что несмотря на то, что распределения Эрланга составляют в математической статистике класс двухпараметрических распределений и имеют применение в различных приложениях теории вероятностей, полученный результат желательно далее распространить на существенно более широкое множество распределений, характеристика которых была не чисто аналитической, а, наоборот, – качественной и могла быть обоснована как естественная с точки зрения тех приложений, где используются максимумы выборок независимых положительных случайных величин $\tilde{r}_1, ..., \tilde{r}_N$ и где существенным является факт одновершинности (унимодальности) распределения вероятностей для $\tilde{r} = \max\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$. Более того, математический интерес представляет задача о том, в каких случаях, несмотря на унимодальность «затравочного» распределения Q, распределение вероятностей для случайной величины $\tilde{r}$ оказывается все же неунимодальным. Что касается свойства унимодальности, то интерес для статистики случайной величины $\tilde{r}$ представляет также исследование того случая, когда ее распределение вероятностей является *существенно унимодальным*. Понятие о таких распределениях было введено в работах [Virchenko, Mazmanishvili 1988; Virchenko, Mazmanishvili 1990; Virchenko, Mazmanishvili 1992]. Наконец, все сказанное здесь относительно свойств распределения вероятностей случайной величины $\tilde{r}$ касается также исследования качественных свойств распределения вероятностей для случайной величины $\tilde{r}' = \min\{\tilde{r}_j; j = 1 \div N\}$.

Список литературы
References

1. Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Молчанов С.А., Пешков С.А., Рыбников К.А. 1983. Математические модели старения полимерных изоляционных материалов. ДАН СССР. 268;2. С. 281–284.
Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Molchanov S.A., Peshkov S.A., Rybnikov K.A. 1983. Mathematical models of aging of polymer isolated materials. DAN SSSR. 268;2. P. 281–284.

2. Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Малунов В.В., Моисеев Ю.В., Молчанов С.А. 1988. Особенности перколяционной модели старения полимеров. ДАН СССР. 303;3. С. 535–537.
Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Malunov V.V., Moiseev Yu.V., Molchanov S.A. 1988. Peculiarities of percolation model of material aging. DAN SSSR. 303;3. P. 535–537.

3. Брагинский Р.П., Гнеденко Б.В., Зайцева Г.М., Молчанов С.А. 1988. Теоретическое и статистическое исследование дефектного множества в эмаль-лаковых электроизоляционных покрытиях. ДАН СССР. 303;2. С. 270–274.
Braginskii R.P., Gnedenko B.V., Zaitseva G.M., Molchanov S.A. 1988. Theoretical and statistical investigation of defect set in enamel-laque electrical isolated covers. DAN SSSR.303;2. P. 270–274.

4. Гнеденко Б.В. 1941. Предельные теоремы для максимального члена вариационного ряда. ДАН УССР. 32;1. С. 101–106.
Gnedenko B.V. 1941. Limit theorems for maximal term of sample. DAN USSR. 32;1. P. 101–106.

5. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. 1985. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М: Наука, 640 с.
Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. 1985. Handbook of probability theory and mathematical statistics. Moscow: Nauka, 640 p.

6. Gnedenko B.V. 1943. Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. Ann. Math. 44;3. P. 423–453.

7. Gumbel E. 1962. Statistics of Extrems. New York: Columbia University Press.

8. Lukacs E. 1970. Characteristic Functions, 2nd ed. London: Griffin.

9. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. Unimodality of a class of distributions connected with complex Ornstein - Uhlenbeck process. Doclady Akademii nauk Ukr. SSR, ser. A. 1988. 1. P. 55–87.

10. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. 1990. Essential unimodality of probability distributions of random quadratic functionals. Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR. 12. P. 3-4.

11. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. 1992. Essential unimodality of probabilistic distributions for random quadratic functionals. Cybernet. Systems Anal. 285;2. P. 312–315.

Ссылка для цитирования статьи
Reference to article

Вирченко Ю.П., Новосельцев А.Д. 2019. Унимодальность распределений вероятностей для максимумов выборки независимых Эрланговских случайных величин. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (3): 366–373. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-366-373.

Virchenko Yu.P., Novoseltsev A.D. 2019. Unimodality of probability distributions for sample maxima of independent Erlang random variables. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (3): 366–373 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-3-366-373.