УДК: 517.53
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-2-217-226

# СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

# WEAKLY REGULAR SETS IN THE SPACE OF FUNCTIONS OF FINITE ORDER IN THE HALF-PLANE

**А.Л. Гусев**
**A.L. Gusev**

ФГБОУ ВПО «Курский государственный университет»,
Россия, 305000, г. Курск, ул. Радищева, 33

Kursk State University, 33 Radischeva str., Kursk 305000, Russia

E-mail: cmex1990goose@yandex.ru

**Аннотация**
В данной статье вводится понятие слабо регулярного множества в пространстве аналитических в верхней полуплоскости **C**+=$\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ комплексного переменного функций конечного порядка больше единицы. Последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset$ **C**+ называется слабо регулярной последовательностью в **C**+ при порядке $\rho>1$, или точнее $WR_+(\rho)$-множеством, если выполняется одно из следующих условий $(C_+)$ или $(C_+^{'})$: $(C_+)$ 1) Среди точек множества $A$ нет кратных; 2) для любого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)$ такое, что при $r_n>R$ исключительные круги радиусов $d_n(\varepsilon)=\sin^{\frac{1}{2}}\theta_n r_n^{1-\frac{\rho+\varepsilon}{2}}$ с центрами в точках $a_n$ не пересекаются; 3) для любого $\varepsilon>0$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}}<\infty$. $(C_+^{'})$ 1') Среди точек множества $A$ нет кратных и нет точек с одинаковыми модулями; 2') выполняются условия 1) и 3); 3') для любого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $a_n$ и $a_k$, принадлежащих $A$, из неравенства $|a_n|\ge|a_k|>R$ следует соотношение: $|a_n|\ge|a_k|+\frac{\operatorname{Im} a_k}{|a_k|^{\rho+\varepsilon}}$. Получены оценки плотности распределения аргументов слабо регулярных множеств в верхней полуплоскости. Доказывается, что такие множества являются интерполяционными в данном пространстве.

**Abstract**
In this article, the concept of a weakly regular set in the space of analytical functions of the finite order greater than unity in the upper half-plane of complex variable is introduced. The sequence $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset$ **C**+, is called weakly regular in **C**+ by order $\rho>1$ if one of the following conditions $(C_+^{'})$ or $(C_+)$ is satisfied: $(C_+)$ 1) Among the points of the set $A$ there are no multiples; 2) for any $\varepsilon>0$ there exists $R=R(\varepsilon)$ such that for $r_n>R$ the disks of radius $d_n(\varepsilon)=\sin^{\frac{1}{2}}\theta_n r_n^{1-\frac{\rho+\varepsilon}{2}}$ with centers $a_n$ do not intersect; 3) for any $\varepsilon>0$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}}<\infty$. $(C_+^{'})$ 1') Among the points of the set $A$ there are no multiples and there are no points with the same modules; 2') conditions 1) and 3) are true; 3') for any $\varepsilon>0$ there exists $R=R(\varepsilon)$ such that for $r_n>r_k>R$ the inequality

$|a_n| \geq |a_k| + \dfrac{\operatorname{Im} a_k}{|a_k|^{\rho+\varepsilon}}$ are true. It is proved that such sets are interpolation in the sense of free interpolation in this space.

**Ключевые слова:** верхняя полуплоскость, конечный порядок, слабо регулярное множество, свободная интерполяция.
**Keywords:** upper half-plane, finite order, weakly regular set, free interpolation.

## Введение

Понятие регулярного множества в комплексной плоскости было введено Б.Я. Левиным в монографии Distribution of Zeros of Entire Functions [1980]. Пусть $\rho(r)$ – некоторый уточнённый порядок [Levin, 1980] такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$, $A = \{a_n, n = 1,2,...\}$ – последовательность различных точек в комплексной плоскости. Предположим, что точки отделены друг от друга. Точнее, выполняется одно из следующих условий $(C)$ или $(C')$:

$(C)$ Точки $a_n$ расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, которые не пересекаются, так, что для любых двух точек последовательности $A$, расположенных внутри одного из углов, выполняется условие: $|a_{n+1}| - |a_n| \geq r_n = d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$ при некотором $d > 0$.

$(C')$ Существует число $d > 0$ такое, что кружки, радиусов $r_n = d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$ с центрами в точках $a_n$, не пересекаются.

Правильное множество $A$ [Levin, 1980], которое удовлетворяет одному из условий $(C)$ или $(C')$, называется регулярным множеством в смысле Левина, или кратко R-множеством, а кружки $\{z : |z - a_n| \leq r_n\}$ называют исключительными кружками R-множества ($C_R$-кружками).

Б.Я. Левин показал [Levin, 1980, Chapter III], что регулярные множества являются интерполяционными в классах целых функций с индикатором, строго меньше данного, при заданном уточненном порядке.

Множества, которые удовлетворяют лишь условию $(C)$ (без предположения правильной распределённости), играют важную роль в теории целых функций. В частности, они применялись для построения канонических произведений множеств в работах А.Ф. Гришина [Гришин, 1983], [Гришин, 1984] и А.Ф. Леонтьева [Леонтьев, 1976].

Обозначим через $[\rho, \infty]$ пространство целых функций $f$ порядка $\rho > 0$, т. е. таких, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |f(re^{i\theta})|}{\ln r} \leq \rho,$$

где, как обычно, $\ln^+ a = \begin{cases} 0, a \leq 0; \\ \ln a, a > 0. \end{cases}$

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$. Через $[\rho(r), \infty)$ обозначим пространство целых функций $f$ не более, чем нормального типа при порядке $\rho(r)$, т. е. таких, что $\ln^+ |f(re^{i\theta})| \leq C_f V(r)$, где $V(r) = r^{\rho(r)}$, а $C_f > 0$ константа, не зависящая от $r$.

В работе К.Г. Малютина и О.А. Боженко [Malyutin, 2012–2013] было введено понятие слабо регулярных множеств в пространствах $[\rho, \infty]$ и $[\rho(r), \infty)$.

**Определение 1.** Последовательность различных точек $A=\{a_n, n=1,2,...\}$ комплексной плоскости называется слабо регулярной при порядке $\rho>0$, или $WR(\rho)$-множеством, если существует уточнённый порядок $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, такой, что выполняется одно из двух условий – $(C)$ или $(C')$, и

$$n(C(0,r))\le KV(r), K>0, \tag{1}$$

где $n(C(a,r))$ – число точек последовательности $A$ в круге $C(a,r)$ с центром в точке $a$ и радиуса $r$.

**Определение 2.** Последовательность различных точек $A=\{a_n, n=1,2,...\}$ комплексной плоскости называется слабо регулярной при уточнённом порядке $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, или $WR(\rho(r))$-множеством, если выполняется одно из двух условий – $(C)$ или $(C')$ и условие (1).

Было показано, что $WR(\rho)$-множество является интерполяционным в пространстве $[\rho,\infty]$, а $WR(\rho(r))$-множество – интерполяционным в пространстве $[\rho(r),\infty)$. В работах К.Г. Малютина [Malyutin, 1995] рассматривались множества $A=\{a_n\}$ в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+ = z:\operatorname{Im} z>0$, удовлетворяющие условию: $(C_+)$. Для точек множества $A$ при некотором $d>0$ выполняется неравенство $|a_{n+1}|-|a_n|\ge r_n = d\sin\arg(a_n)|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$. Такие множества также использовались для построения канонических произведений в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$.

В упомянутой выше работе К.Г. Малютина и О.А. Боженко [Malyutin, 2012–2013] было также введено понятие слабо регулярных множеств в пространствах $[\rho,\infty]^+$ и $[\rho(r),\infty)^+$ функций конечного порядка $\rho>0$ и типа не выше, чем нормальный, при уточнённом порядке $\rho(r)$ в верхней полуплоскости. Заметим, что определение слабо регулярного множества в пространстве $[\rho,\infty]^+$, которое основано на понятии уточнённого порядка, нуждается в корректировке. В настоящей работе мы уточняем это определение, при этом не используем понятие уточнённого порядка.

Обозначим через $[\rho,\infty]^+$ пространство аналитических функций порядка $\rho>1$ в полуплоскости $\mathbf{C}_+$ [9], т. е. $f\in[\rho,\infty]^+$, если

$$\limsup_{r\to\infty}\sup_{0<\theta<\pi}\frac{\ln^+\ln^+|f(re^{i\theta})|}{\ln r}\le\rho.$$

**Определение 3.** Последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset\mathbf{C}_+$, называется слабо регулярной последовательностью в $\mathbf{C}_+$ при порядке $\rho>1$, или точнее $WR_+(\rho)$-множеством, если выполняется одно из следующих условий $(C'_+)$ или $(C_+)$.

$(C_+)$

1) Среди точек множества $A$ нет кратных и

$$A\subset\mathbf{C}_+\backslash C(0,2); \tag{2}$$

2) для любого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)$ такое, что при $r_n>R$ исключительные круги радиусов

$$d_n(\varepsilon)=\sin^{\frac{1}{2}}\theta_n r_n^{1-\frac{\rho+\varepsilon}{2}} \tag{3}$$

с центрами в точках $a_n$ не пересекаются;

3) для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty . \tag{4}$$

$(C_+^{'})$

1') Среди точек множества $A$ нет кратных и нет точек с одинаковыми модулями;

2') выполняются условия 1) и 3);

3') для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $a_n$ и $a_k$, принадлежащих $A$, из неравенства $|a_n| \geq |a_k| > R$ следует соотношение:

$$|a_n| \geq |a_k| + \frac{\operatorname{Im} a_k}{|a_k|^{\rho+\varepsilon}} . \tag{5}$$

Введем следующее определение.

**Определение 4.** Последовательность $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1,2,...\}$, $A \subset$ **C**+, различных точек называется интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho, \infty]^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям

$$\limsup_{r_n \to \infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln r_n} \leq \rho, \ \sup_n \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln r_n + 2} < \infty ,$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]^+$, решающая интерполяционную задачу

$$F(a_n) = b_n, \ \ n = 1,2,... .$$

Сформулируем главный результат статьи.

**Теорема.** Пусть последовательность $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1,2,...\}$, $A \subset$ **C**+, является слабо регулярной последовательностью в **C**+ при порядке $\rho > 1$. Тогда А является интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho, \infty]^+$.

**Вспомогательные результаты**

Обозначим через $C(a, r)$ круг с центром в точке $a$ радиуса $r$. Определим считающую функцию синусов аргументов множества $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1,2,...\}$, $A \subset C_+$, равенством

$$n_+(z, \alpha) = \sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} \sin\theta_n , \ \ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} .$$

Положим также,

$$n(z, \alpha) = \sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} 1 , \ \ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} .$$

Докажем несколько лемм, которые понадобятся в дальнейшем.

**Лемма 1.** Пусть последовательность $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1,2,...\}$, $A \subset$ **C**+, удовлетворяет условию $(C_+)$. Тогда существует постоянная K>0, зависящая только от А, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ при $|z| > R = R(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$(n_+(z, \alpha) - \sin\theta_n)^+ \leq K\alpha^2 r^{\rho+\varepsilon} , \tag{6}$$

где $\theta_n$ – аргумент точки последовательности А, ближайшей к точке z (если таких несколько, то выбираем любую из них).

**Доказательство**. Пусть условие $(C_+)$ выполняется. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существует число $R = R(\varepsilon)$ такое, что для всех $r_n > R/2$ справедливо условие 2). Пусть $z$ такое, что $|z| > R$ и точка $z$ не принадлежит ни одному из кругов в условии 2). Рассмотрим круг $C(z, \alpha|z|)$. Так как центр этого круга не входит ни в один исключительный круг, то радиусы исключительных кружков с центрами внутри этого круга меньше величины $\alpha|z|$. Кроме того, $r_n > \frac{|z|}{2}$. Так как исключительные круги не пересекаются, то покрываемая ими площадь меньше площади круга $C(z, 2\alpha|z|)$:

$$\sum_{a_n \in C(z,\alpha|z|)} \pi\, d_n^2 = \pi \sum_{a_n \in C(z,\alpha|z|)} \sin\theta_n r_n^{2-(\rho+\varepsilon)} \le 4\pi\alpha^2 |z|^2.$$

Учитывая неравенство $\frac{|z|}{2} \le r_n \le \frac{3|z|}{2}$, окончательно получаем

$$\sum_{a_n \in C(z,\alpha|z|)} \sin\theta_n \le 16\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho+\varepsilon} \alpha^2 |z|^{\rho+\varepsilon}.$$

Если точка $z$ такая, что $|z| > R$ и $z$ принадлежит одному (и только одному) из кругов в условии 2), то, исключая ее из рассмотрения, мы приходим к ситуации, описанной выше.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть последовательность $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}, n = 1,2,\dots\}$, $A \subset \mathbf{C}_+$, удовлетворяет условию $(C_+^{'})$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что при $r_n > R$ исключительные круги радиусов $d_n(\varepsilon) = \frac{1}{24}\sin\theta_n r_n^{1-\varepsilon}$ с центрами в точках $a_n$ не пересекаются.

**Доказательство**. Пусть условие $(C_+^{'})$ выполняется. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существует число $R = R(\varepsilon)$ такое, что для всех $|a_n| \ge |a_k| > R$ справедливо условие (5). Если $r_n \ge 2\left(r_k + \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}\right)$, то круги $\tilde{N}\left(a_k, \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}\right)$ и $C\left(a_n, \frac{r_n}{2}\right)$ не пересекаются, так как в этом случае для любой точки $z \in C\left(a_n, \frac{r_n}{2}\right)$ выполняется неравенство $|z - a_k| \ge \frac{r_n}{2} \ge \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}$.

И так как $r_n^{\rho+\varepsilon} \ge 2$, тем более не пересекаются круги $\tilde{N}\left(a_k, \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}\right)$ и $\tilde{N}\left(a_n, \frac{\operatorname{Im} a_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}}\right)$.

Если $\sin\theta_n > 4\sin\theta_k$ или $\sin\theta_n < \frac{1}{4}\sin\theta_k$, то не пересекаются круги $C\left(a_k, \frac{\operatorname{Im} a_k}{2}\right)$ и $C\left(a_n, \frac{\operatorname{Im} a_n}{2}\right)$.

Пусть, наконец, $\frac{1}{4}\sin\theta_k \le \sin\theta_n \le 4\sin\theta_k$ и $\left(r_k + \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}\right) \le r_n < 2\left(r_k + \frac{\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}\right)$. В этом случае $r_n < 2(r_k + 1)$ и $\frac{\operatorname{Im} a_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \frac{12\operatorname{Im} a_k}{r_k^{\rho+\varepsilon}}$. Отсюда следует, что не пересекаются круги $\tilde{N}\left(a_k, \frac{\operatorname{Im} a_k}{24 r_k^{\rho+\varepsilon}}\right)$ и $\tilde{N}\left(a_n, \frac{\operatorname{Im} a_n}{24 r_n^{\rho+\varepsilon}}\right)$.

Лемма доказана.

**Определение 5.** Пусть последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset$ **C**+, удовлетворяет условию $(C_+)$ или $(C_+^{'})$, тогда круги $\tilde{N}\left(a_n, \sin^{\frac{1}{2}}\theta_n r_n^{1-\frac{\rho+\varepsilon}{2}}\right)$ или $\tilde{N}\left(a_n, \frac{\operatorname{Im} a_n}{24 r_n^{\rho+\varepsilon}}\right)$ называются исключительными $C_+^{\varepsilon}(\rho)$-кругами.

**Лемма 3.** Пусть последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset$ **C**+, удовлетворяет условию $(C_+^{'})$. Тогда существует постоянная K>0, зависящая только от A, такая, что для любого $\varepsilon>0$ при $|z|>R=R(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$(n_+(z,\alpha)-\sin\theta_n)^+\le K\alpha\ r^{\rho+\varepsilon}, \tag{7}$$

где $\theta_n$ – аргумент точки последовательности A, ближайшей к точке z (если таких несколько, то выбираем любую из них).

**Доказательство**. Пусть условие $(C_+^{'})$ выполняется. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Существует число $R=R(\varepsilon)$ такое, что для всех $r_n>R/2$ справедливо условие 2'). Пусть $z$ такое, что $|z|>R$ и $z$ не принадлежит ни одному исключительному $C_+^{\varepsilon}(\rho)$-кругу. Опишем из $z$ круг $C(z,\alpha|z|)$. Если точка $a_n\in C(z,\alpha|z|)$, то обозначим через $[\alpha_n,\beta_n]$ круговую проекцию отрезка $[\alpha_n,\beta_n]=[a_n-e^{i\theta_n}\dfrac{\operatorname{Im}a_n}{24|a_n|^{\rho+\varepsilon}}, a_n+e^{i\theta_n}\dfrac{\operatorname{Im}a_n}{24|a_n|^{\rho+\varepsilon}}]$ на луч $\arg\xi=\arg z$.

Рассмотрим круг $C(z,\alpha|z|)$. Так как центр этого круга не входит ни в один исключительный круг, то радиусы исключительных кругов с центрами внутри этого круга меньше величины $\alpha|z|$. Кроме того, $r_n>\dfrac{|z|}{2}$. Так как отрезки $[\alpha_n,\beta_n]$ не пересекаются, то сумма их длин меньше диаметра круга $C(z,2\alpha|z|)$:

$$\frac{1}{12}\sum_{a_n\in C(z,\alpha|z|)}\sin\theta_n r_n^{1-(\rho+\varepsilon)}\le 2\alpha|z|.$$

Учитывая неравенство $\dfrac{|z|}{2}\le r_n\le\dfrac{3|z|}{2}$, окончательно получаем

$$\sum_{a_n\in C(z,\alpha|z|)}\sin\theta_n\le 48\left(\frac{3}{2}\right)^{\rho+\varepsilon}\alpha|z|^{\rho+\varepsilon}.$$

Если точка $z$ такая, что $|z|>R$ и $z$ принадлежит одному (и только одному) из исключительных кругов, то исключая из рассмотрения центр этого круга, мы приходим к ситуации, описанной выше.

Лемма доказана.

## Задача свободной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$

Докажем теперь основной результат нашей статьи. Прежде всего заметим, что рассматриваемая интерполяционная задача относится к так называемым задачам свободной интерполяции, которую впервые рассмотрел А.Ф. Леонтьев [Леонтьев, 1948] в пространстве целых функций $[\rho,\infty]$, и которая послужила толчком для многочисленных исследований в работах [Malyutin, 1994], [Malyutin, 1995], [Малютин, 2013], [Bozhenko, 2014]. Задача свободной интерполяции в пространстве $[\rho,\infty]^+$ при $\rho>1$ рассматривалась в совместной работе К.Г. Малютина и А.Л. Гусева [Malyutin, 2018]. В частности, была доказана следующая теорема.

**Теорема А.** Для того, чтобы последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset$**C**+ различных точек была интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho,\infty]^+$, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$\limsup_{r_n\to\infty}\frac{1}{\ln r_n}\ln^+\ln^+\frac{1}{\operatorname{Im}a_n\,|E'(a_n)|}\le\rho, \tag{8}$$

$$\sup_n\ln^+\ln^+\frac{1}{\operatorname{Im}a_n\,|E'(a_n)|}<\infty, \tag{9}$$

где

$$E(z)=\prod_{r_n\le1}\frac{z-a_n}{z-\overline{a}_n}\prod_{r_n>1}\left[\frac{\overline{a}_n(z-a_n)}{a_n(z-\overline{a}_n)}\exp\left\{\sum_{j=1}^{[\rho]}\frac{z^j}{j}\left(\frac{1}{a_n^j}-\frac{1}{\overline{a}_n^j}\right)\right\}\right]$$

каноническая функция последовательности А.

Чтобы доказать нашу основную теорему, покажем, что каноническая функция слабо регулярной последовательности в **C**+ при порядке $\rho>1$ удовлетворяет условиям (8) и (9). Итак, пусть последовательность $A=\{a_n=r_ne^{i\theta_n}, n=1,2,...\}$, $A\subset C$+, является слабо регулярной последовательностью в **C**+ при порядке $\rho>1$. Пусть, например, последовательность $A$ удовлетворяет условию $(C_+)$. Тогда выполняется неравенство (7).

Из условия (4) следует, что $E(z)\in[\rho,\infty]^+$. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Существуют число $R=R(\varepsilon)$ и множество кругов $\tilde{N}_\eta$ со сколь угодно малой линейной плотностью $\eta$ таких, что для всех $z\notin C_\eta, |z|>R$, выполняется неравенство [15]:

$$\ln|E(z)|\ge -M_\eta|z|^{\rho+\varepsilon}, \tag{10}$$

где $M_\eta>0$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon$. Причем для точек вещественной оси эта оценка выполняется почти всюду. Положим $\eta=1/30$. Выберем $r_\eta$ так, чтобы при $r>r_\eta$ выполнялось соотношение: $\frac{1}{r}\sum_{l_j\le r}l_j\le\frac{1}{20}$, где $l_j$ – радиусы кругов множества $\tilde{N}_\eta$.

Увеличивая при необходимости константу $M_\eta$, можно считать, что $\sum_{l_j\le r_\eta}l_j\le\frac{\eta}{2}$.

Для каждой точки $a_n\in A$ найдется число $\delta_{1,n}\in(0;0.1)$ такое, что окружность $L_{1,n}=\{z:|z-a_n|=\delta_{1,n}r_n\}$ будет лежать вне $\tilde{N}_\eta$-множества. Пусть $x_n=\operatorname{Re}a_n$. Если $\sin\theta_n\le1/8$, то найдется число $\delta_{2,n}\in(0;0.25)$ такое, что окружность $L_{2,n}=\{z:|z-x_n|=\delta_{2,n}r_n\}$ будет также лежать вне $\tilde{N}_\eta$-множества. Пусть $a_n\in A$, $\sin\theta_n>1/8$. Запишем формулу Иенсена в точке $a_n$:

$$\ln|E'(a_n)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|E(a_n+\delta_{1,n}r_ne^{i\theta})|\,d\theta-\int_0^{\delta_{1,n}r_n}\frac{n(a_n,t)-1}{t}\,dt-\ln(\delta_{1,n}r_n). \tag{11}$$

Заметим, что при $\sin\theta_n>1/8$ справедливы неравенства

$$n(z,\alpha) < 8n_+(z,\alpha),\ \mathrm{Im}a_n > 1/4. \tag{12}$$

Сделав замену $t = \alpha\ r_n$ во втором интеграле в правой части равенства (11), учитывая (7) и (12) и включение $E(z) \in [\rho,\infty]^+$, нетрудно получить из равенства (11) соотношения (8) и (9) для точек $a_n \in A$ таких, что $\sin\theta_n > 1/8$.

Пусть теперь $a_n \in A$, $\sin\theta_n \le 1/8$. Запишем обобщенную формулу Неванлинны [Govorov, 1994] для полукруга $C_n^+ = C(x_n, \delta_{2,n} r_n) \cap \mathbf{C}_+$:

$$\ln|E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\tilde N_\delta^+} \frac{\partial G_n(\zeta,a_n)}{\partial n_\zeta}\ln|E(\zeta)|\,d\zeta - \sum_{a_k\in C_n^+, a_k\ne a_n} \ln\left|\frac{\overline{a_k}-a_n}{a_k-a_n}\right| - \ln(2\,\mathrm{Im}\,a_n) +$$

$$+\sum_{a_k\in C_n^+, a_k\ne a_n} \ln\left|\frac{(\delta_{2,n}r_n)^2 - i(a_k-x_n)\,\mathrm{Im}\,a_n}{(\delta_{2,n}r_n)^2 - i(\overline{a_k}-x_n)\,\mathrm{Im}\,a_n}\right| - \ln(2\,\mathrm{Im}\,a_n) = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial N_\delta^+} \frac{\partial G_n(\zeta,a\ )}{\partial n_\zeta}\ln|E(\zeta)|\,d\zeta - \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 - -\ln(2\,\mathrm{Im}\,a_n),$$

где $G_n(\zeta,a_n)$ – функция Грина полукруга $C_n^+$. Заметим, что сингулярная граничная мера функции $E(z)$ равна нулю.

Интеграл $I$ в правой части равенства (13) оценивается снизу с использованием неравенства (10) и свойств функции Грина (неотрицательность и интеграл по границе области равен единице):

$$I \ge -M_1 r_n^{\rho+\varepsilon}, r_n > r_\varepsilon, \tag{14}$$

где $M_1 > 0$ – константа. Вторая сумма неотрицательная:

$$\sum\nolimits_2 \ge 0. \tag{15}$$

Для оценки первой суммы воспользуемся леммой 4, из работы [Гришин, 1968]:

$$\sum\nolimits_1 \le \sum_{\alpha_{n,k}<\sin\theta_n} \frac{2\sin\theta_k}{\sin\theta_n - \alpha_{n,k}}\ln\frac{2\sin\theta_n - \alpha_{n,k}}{\alpha_{n,k}} + \sum_{\alpha_{n,k}\ge\sin\theta_n} \frac{4\sin\theta_k\sin\theta_n}{\alpha_{n,k}^{\ 2}},\quad \alpha_{n,k} = \frac{|a_n - a_k|}{r_n}. \tag{16}$$

Суммирование в правой части неравенства (16) распространяется на точки $a_k \in C_n^+$.

Замечая, что $C_n^+ \subset C(a_n, 2\delta_{2,n} r_n) \subset C(a_n, r_n/2)$, получим:

$$\sum\nolimits_1 \le 2\int_0^{\sin\theta_n} \frac{1}{\sin\theta_n - \alpha}\ln\frac{2\sin\theta_n - \alpha}{\alpha}d(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+ +$$

$$+4\int_{\sin\theta_n}^{1/2} \frac{\sin\theta_n}{\alpha^2}d(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+ = \tag{17}$$

$$= 2I_1 + 4I_2.$$

После интегрирования по частям, используя неравенство (7), получаем:

$$I_2 \le 8\sin\theta_n (n^+\left(a_n, \frac{1}{2}\right) - \sin\theta_n)^+ + 4\int\limits_{\sin\theta_n}^{1/2} \frac{\sin\theta_n (n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+}{\alpha^3} d\alpha \le$$
$$\le \sum_{a_n \in C(0,1.5|a_n|)} \sin\theta_n + 64K(n^+\left(a_n, \frac{1}{2}\right) - \sin\theta_n)^+. \le 65Kn^+\left(a_n, \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

Оценим $I_1$:

$$I_1 = \int\limits_0^{\sin\theta_n/2} + \int\limits_{\sin\theta_n/2}^{\sin\theta_n} \le \frac{2}{\sin\theta_n} \int\limits_0^{\sin\theta_n/2} \ln\frac{2\sin\theta_n}{\alpha} d(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+ +$$
$$+2\int\limits_{\sin\theta_n/2}^{\sin\theta_n} \frac{d(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+}{\alpha} = \frac{2\ln 4(n^+(a_n,\sin\theta_n/2) - \sin\theta_n)^+}{\sin\theta_n} +$$
$$+\frac{2}{\sin\theta_n}\int\limits_0^{\sin\theta_n/2} \frac{(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+}{\alpha} d\alpha + \left.\frac{2(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+}{\alpha}\right|_{\sin\theta_n/2}^{\sin\theta_n} + \tag{19}$$
$$+2\int\limits_{\sin\theta_n/2}^{\sin\theta_n} \frac{(n^+(a_n,\alpha) - \sin\theta_n)^+}{\alpha^2} d\alpha \le K\ln 4r_n^{\rho+\varepsilon} + 2Kr_n^{\rho+\varepsilon} + 2\ln 2Kr_n^{\rho+\varepsilon} =$$
$$= Kr_n^{\rho+\varepsilon}(\ln 16 + 2).$$

Теперь из (4), (13), (14), (15), (17), (18) и (19) получаем, что $E(z)$ удовлетворяет соотношению (8). Соотношение (9) доказывается аналогично.

## Заключение

В работе введено определение слабо регулярного множества в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка больше единицы. Это определение дополняет определение слабо регулярного множества в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка и нормального типа, введенного К.Г. Малютиным в работе [Malyutin, 1995]. Получены оценки плотности распределения аргументов слабо регулярных множеств в верхней полуплоскости. Используя критерий интерполяционности последовательности в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка больше единицы из работы [Malyutin, 2018], доказано, что такие множества являются интерполяционными в данном пространстве.

*Автор выражает признательность профессору К.Г. Малютину за постановку задачи и руководство настоящей работой. Автор также выражает признательность редактору за конструктивные замечания, которые позволили улучшить оформление статьи.*

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.*

## Список литературы
## References

1. Гришин А.Ф. 1983. О множествах регулярного роста целых функций. I. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 40: 36–47.

Grishin A.F. 1983. O mnozhestvakh regulyarnogo rosta tselykh funktsiy. I [On sets of regular growth of entire functions. I]. Teoriya funktsiy, funktsional`nyy analiz i ikh prilozheniya [Theory of functions, functional analysis and their applications], 40: 36–47 (in Russian).

2. Гришин А.Ф. 1983. О множествах регулярного роста целых функций. II. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 41: 39–55.

Grishin A.F. 1983. O mnozhestvakh regulyarnogo rosta tselykh funktsiy. II [On sets of regular growth of entire functions. II]. Teoriya funktsiy, funktsional`nyy analiz i ikh prilozheniya [Theory of functions, functional analysis and their applications], 41: 39–55 (in Russian).

3. Гришин А.Ф. 1984. О множествах регулярного роста целых функций. III. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 41: 37–43.

Grishin A.F. 1984. O mnozhestvakh regulyarnogo rosta tselykh funktsiy. III [On sets of regular growth of entire functions. III]. Teoriya funktsiy, funktsional`nyy analiz i ikh prilozheniya [Theory of functions, functional analysis and their applications], 41: 37–43 (in Russian).

4. Гришин А.Ф. 1968. О регулярности роста субгармонических функций. II. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 7: 59–84.

Grishin A.F. 1968. O regulyarnosti rosta subgarmonicheskikh funktsiy. II [On the regularity of growth of subharmonic functions. II]. Teoriya funktsiy, funktsional`nyy analiz i ikh prilozheniya [Theory of functions, functional analysis and their applications], 7: 59–84 (in Russian).

5. Леонтьев А.Ф. 1976. Ряды экспонент. М., Наука, 536.

Leont'ev A.F. 1976. Ryady eksponent [Rows of exhibitors]. Moscow, Nauka, 536 (in Russian).

6. Леонтьев А.Ф. 1948. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. ДАН СССР, 5: 785–787.

Leont'ev A.F. 1948. Ob interpolirovanii v klasse tselykh funktsiy konechnogo poryadka [On interpolation in the class of entire functions of finite order]. Doklady akademii nauk SSSR [Reports of the academy of sciences of USSR], 5: 785–787 (in Russian).

7. Малютин К.Г., Боженко О.А. 2013. Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка. Зборник трудов Ин-та математики НАН Украины, 10 (4–5): 412– 423.

Malyutin K.G., Bozhenko O.A. 2013. Zadacha kratnoy interpolyatsii v klasse tselykh funktsiy nulevogo poryadka [The problem of multiple interpolation in the class of entire functions of order zero]. Zbornik trudov instituta matematiki Natsional'noy akademii nauk Ukrainy [Collection of works of the Institute of mathematics of the National academy of sciences of Ukraine], 10 (4–5): 412– 423 (in Russian).

8. Bozhenko O.A., Malyutin K.G. 2014. Problem of multiple interpolation in class of analytical functions of order zero in half-plane. Ufa Mathematical Journal, № 6 (1): 18–28.

9. Govorov N.V. 1994. Riemann's boundary problem with infinite index. Basel; Boston; Berlin; Birkhruser: 240.

10. Levin B.Ya. 1980. Distribution of Zeros of Entire Functions. English revised edition Amer. Math. Soc. Providence, RI: 523.

11. Malyutin K.G. 1994. The problem of multiple interpolation in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type. Sbornik: Mathematics, 78 (1): 253–266.

12. Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane. I. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, 59 (4): 785–814.

13. Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane. II. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, 59 (5): 983–1006.

14. Malyutin K.G., Bozhenko O.A. 2012-2013. Weakly regular. Istanb. Univ. Fen Fak. Mat. Fiz. Astron. Derg. (N.S.), 4: 1–8.12. Malyutin K.G. 1995. Sets of regular growth of functions in a half-plane. I. Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics, 59 (4): 785–814.

15. Malyutin K.G., Gusev A.L. 2018. The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane. Probl. Anal. Issues Anal., 7 (25), Special Issue: 113–123.

**Ссылка для цитирования статьи**
**Reference to article**

Гусев А.Л. 2019. Слабо регулярные множества в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 51 (2): 217–226. Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-217-226.

Gusev A.L. 2019. Weakly regular sets in the space of functions of finite order in the half-plane. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics. 51 (2): 217–226 (in Russian). Doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-217-226.