УДК 517.43
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-52-63

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА 4-ГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ КОРНЕМ

INVESTIGATION OF THE SPECTRUM AND RESOLVENT OF A FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL SHEAF WITH A TRIPLE CHARACTERISTIC ROOT

Э.Г. Оруджев[1], С.А. Алиев[2]
E.G. Orudzhev[1] , S.A. Aliev[2]

[1)]Бакинский государственный университет
Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23
[2)]Нахичеванский Институт Учителей
Азербайджан, AZ7000, г.Нахичевань, пр. Гейдара Алиева,1

[1)]Baku State University,
23 Academic Zahid Khalilov St., Baku,AZ1148, Republic of Azerbaijan
[2)]Nakhchivan Teachers Institute,
1 Heydar Aliyev Ave., AZ7000, Republic of Nakhchivan

E-mail: elsharorucov63@mail.ru
E-mail: sahil.liyev83@mail.ru

Аннотация
В данной работе исследуется спектр и резольвента пучка дифференциальных операторов четвертого порядка в пространстве $L_2(0;\infty)$, когда главный характеристический полином имеет один трехкратный корень. Показано, что пучок может иметь в открытой нижней и открытой верхней полуплоскостях конечное или счетное число собственных значений, а непрерывный спектр заполняет всю действительную ось, где могут находиться спектральные особенности. Доказано, что резольвента пучка является ограниченным интегральным оператором, определенным на всем пространстве $L_2(0;\infty)$, с ядром типа Карлемана.

Abstract
The article is considered that, the spectrum and the resolvent of a structure of fourth-order differential operators are investigated in space $L_2(0;\infty)$, when one triple root is the main characteristic polynomial . It is shown that, a sheaf can have a finite or countable number of eigenvalues in the open lower and open upper half-planes, and the continuous spectrum fills the all real axis, where spectral singularities are located. It is proved that, the sheaf resolvent is a bounded integral operator, defined on the whole space $L_2(0;\infty)$, with a Carleman type kernel.

Ключевые слова: спектр, собственная функция, резольвента, сопряженный оператор, ядро типа Карлемана.
Keywords: spectrum, eigen function, resolvent, adjoint operator, Carleman type kernel.

Введение и постановка задачи

В пространстве $L_2(0,\infty)$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов L_λ^α, порожденный дифференциальным выражением

$$l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)Y \equiv \left(\frac{d}{dx}-i\lambda\right)^3\left(\frac{d}{dx}+i\lambda\right)Y + r(x)\frac{dy}{dx} + (\lambda p(x)+q(x))Y = 0\ , \qquad (1)$$

и граничными условиями

$$U_\nu(Y) \equiv \alpha_{\nu 0}Y(0,\lambda)+\alpha_{\nu 1}Y'(0,\lambda)+\alpha_{\nu 2}Y''(0,\lambda)+\alpha_{\nu 3}Y'''(0,\lambda)=0\ ,\ \nu=\overline{1,3} \qquad (2)$$

где λ -спектральный параметр, $r(x), p(x), q(x)$ - комплекснозначные функции, определенные и непрерывные на $[0,\infty)$, соответственно, имеющие непрерывные производные до порядка 3,4,5 включительно, и также сходятся интегралы

$$\int_0^\infty x^4\left|r^{(s)}(x)\right|dx<\infty, s=\overline{0,3};\ \int_0^\infty x^4\left|p^{(s)}(x)\right|dx<\infty, s=\overline{0,5};\ \int_0^\infty x^4\left|q^{(s)}(x)\right|dx<\infty, s=\overline{0,4}; \qquad (3)$$

$\alpha_{\nu k}$ фиксированные комплексные числа такие, что формы $U_\nu(Y)$ линейно независимы, а число граничных условий меняется в зависимости от местонахождения параметра λ в комплексной плоскости, здесь $\nu=\overline{1,3}$, $k=\overline{0,3}$.

Спецификой пучка L_λ^α является то, что главный характеристический многочлен уравнения (1) имеет трехкратный корень i и простой корень $-i$. В общем случае кратных корней этого многочлена формальные решения уравнения с полиноминальным вхождением λ могут содержать дробные степени параметра, как в показателе экспоненты, так и при множителе экспоненты, и сама структура асимптотических представлений этих решений не только зависит от старших коэффициентов, но и алгебраических комбинаций коэффициентов при низких степенях параметра [Оруджев, 1998]. Эти свойства здесь учтены таким образом, что формальные решения не содержат дробные степени параметра.

Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов на конечном отрезке, в случае различных корней главного характеристического многочлена, изучены достаточно хорошо. Наиболее полные исследования вопроса о возможности разложения функций в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям несамосопряженных дифференциальных пучков с регулярными и нерегулярными краевыми условиями проведены в работах Г.Д. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М.А. Наймарка, М.В. Келдыша, А.Г. Костюченко, В.А. Ильина, В.А. Марченко, М.Г. Гасымова, М.Л. Расулова, А.А. Шкаликова и др. [Оруджев, 1999, с.14]. В частности, вопросы кратной полноты системы собственных и присоединенных функций подобных пучков решены в зависимости от расположения этих корней. При этом существенным условием кратной полноты является расположение характеристических корней на различных лучах, исходящих из начала координат. При нарушении этого условия данная система присоединенных функций обладает бесконечным дефектом в смысле кратной полноты [Вагабов, 1987; Богомолова, Печенцов, 1989; Гасымов, Магеррамов, 1982].

Дифференциальные пучки, заданные на бесконечных интервалах также изучены довольно хорошо в случае различных характеристических корней. И, здесь обнаружен такой эффект, что число граничных условий на левом конце, в случае полуоси, также зависит от местонахождения параметра λ и связано с расположением корней характеристического полинома. Соответствующий несамосопряженный пучок не является аналитической функцией параметра λ во всей комплексной плоскости [Фунтаков, 1961; Максудов и др., 1990], но является аналитической функцией от λ в верхней и нижней полуплоскостях с разрезом вдоль вещественной оси.

Ввиду того, что рассматриваемый здесь пучок имеет один трехкратный корень, который лежит на ординатной оси, на луче, выходящем из начала координат, необходимо провести специальное исследование этого пучка. Результаты разложения по собственным функциям непрерывных и дискретных спектров (когда кратности характеристических корней равны и они симметрично расположены относительно начала координат) получены в работах [Orudzhev, 1999; Оруджев, 1997; Mirzoyev, et al., 2012].

В работах Алиева и Оруджева [Aliyev, 2013; Orudzhev, Aliyev, 2014] исследовано уравнение (1) и построены операторы преобразования, переводящее решения уравнения $\left(\frac{d}{dx}-i\lambda\right)^3\left(\frac{d}{dx}+i\lambda\right)Y=0$ в решения уравнения (1). В частности, в [Orudzhev, Aliyev, 2014] доказано, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $Y_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,4}$, которые удовлетворяют условиям:

$$\lim_{x\to\infty}\left[Y_j(x,\lambda)-x^{j-1}e^{i\lambda x}\right]=0,\ j=\overline{1,3},\ Im\lambda\ge 0;$$
$$\lim_{x\to\infty}\left[Y_j(x,\lambda)-e^{-i\lambda x}\right]=0,\ Im\lambda\le 0. \tag{4}$$

Там же, доказано, что существуют ядра $K_j^{\pm}(x,t)$, такие, что

$$Y_j(x,\lambda)=x^{j-1}e^{i\lambda x}+\int_x^{\infty}K_j^{+}(x,t)e^{i\lambda t}dt,\ Im\lambda\ge 0$$
$$Y_4(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+\int_x^{\infty}K_4^{-}(x,t)e^{-i\lambda t}dt,\ Im\lambda\le 0, \tag{5}$$

при этом $K_j^{\pm}(x,t)$, $j=\overline{1,4}$ удовлетворяют уравнениям

$$l\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\ \pm i\frac{\partial}{\partial t}\right)K_j^{\pm}(x,t)dt=0, \tag{6}$$

и имеет место

$$\lim_{x+t\to\infty}\frac{\partial^{\alpha+\beta}K_j^{\pm}(x,t)}{\partial x^{\alpha}\partial t^{\beta}}=0,\ \alpha+\beta\le 4,\quad \int_x^{\infty}\left|K_j^{\pm}(x,t)\right|^2dt<\infty, \tag{7}$$

Кроме того, функции $K_j^{\pm}(x,t)$ и их производные удовлетворяют определенным интегральным условиям на характеристике $t=x$.

В данной работе исследуется структура спектра пучка L_λ^α, строится ядро её резольвенты и изучаются аналитические свойства ядра.

Заметим, что для пучка L_λ^α не удается применить технику работы [Фунтаков, 1961] в том отношении, что применяемый там подход предельного перехода при $b\to\infty$ для оператора L_λ^α, порожденного дифференциальным выражением (1) в конечном интервале *(0,b)* и некоторыми регулярными распадающимися краевыми условиями на концах этого интервала основывается на оценке ядра резольвенты. Ввиду того, что эти краевые условия являются нерегулярными [Оруджев, 1998] для пучка $L_{\lambda b}^\alpha$, с привлечением тонких свойств оператора $L_{\lambda b}^\alpha$ таких, как, например, поведение ядра резольвенты $\left(L_{\lambda b}^\alpha\right)^{-1}$ при $b\to\infty$ вне малой окрестности спектра, не позволительно использовать этот подход при выводе интегрального представления резольвенты пучка L_λ^α.

Дискретный спектр пучка L_λ^α. Обозначим через D совокупность всех функций $Y(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ таких, что: 1)производные $Y^{(\nu)}(x,\lambda)$, $\nu=\overline{0,3}$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0,b]$, $b>0$, при каждом $\lambda : \pm Im\lambda \ge 0$; 2) $l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Y \in L_2(0,\infty)$. Далее, через D_α обозначим совокупность тех функций из D, для которых выполняется условие (2). Определим L_λ^α так: область определения есть D_α и $L_\lambda^\alpha = l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Y$ при $Y \in D$. Обозначим $A(\lambda) = \det\|U_i(Y_k)\|_{i,k=1}^3$ и рассмотрим верхнюю полуплоскость $\lambda : Im\lambda \ge 0$. В её открытой части решения $Y_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,3}$ принадлежат пространству $L_2(0,\infty)$, а $Y_4(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty)$. Если λ находится в открытой нижней полуплоскости, то ни одно из решений $Y_k(x,\lambda)$, *где* $k=\overline{1,3}$ не принадлежит этому пространству, а $Y_4(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$. Тогда собственные значения пучка L_λ^α в открытой верхней полуплоскости определяются из уравнения $A(\lambda)=0$.

Собственные значения этого пучка в открытой нижней полуплоскости могут определяться одним краевым условием $U_\nu(Y_4)=0$, где ν может быть одним из чисел 1,2,3. А на действительной оси ни одно из решений $Y_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,4}$ не принадлежит пространству $L_2(0,\infty)$, следовательно, при $Im\lambda = 0$, ни одно из краевых условий не входит в D_λ^α. Значит, на действительной оси пучок дифференциальных операторов L_λ^α не имеет собственных значений. Действительно, если фиксируем λ_0 с $Im\lambda = 0$, и будем считать, что оно является собственным значением, тогда для решений из $Im\lambda \ge 0$, будем иметь $Y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{3} C_k Y_k(x,\lambda)$ и $Y(x,\lambda_0) \in L_2(0,\infty)$, при этом хотя бы одно из чисел C_k, $k=\overline{1,3}$ должно быть отлично от нуля. Но, при $x \to \infty$ имеем

$$Y(x,\lambda_0) = \{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + 0(1)\}e^{i\lambda_0 x}.$$

Поэтому

$$\int_0^N |Y(x,\lambda_0)|^2 dx = \int_0^N \left|C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + 0(1)\right|^2 dx = C_1^2 \cdot N + C_2^2 \cdot \frac{N^3}{3} + C_3^2 \cdot \frac{N^5}{5} + 0(1). \quad (8)$$

Если $Y(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, тогда все C_k, *где* $k=0,1,2$ должны равняться нулю, т.е. $Y(x,\lambda_0)=0$, а это означает, что соответственно к λ_0 не существует нетривиального решения. Приближаясь к действительной оси из открытой нижней полуплоскости и из условия, что $Y_4(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $Y_k(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty)$, *где* $k=1,2,3$, $Im\lambda < 0$, проверяется, что на действительной оси не имеются собственные значения. Теперь предположим, что λ_0 является точкой открытой верхней и открытой нижней полуплоскостей.

Теорема 1. *Для того, чтобы* $\lambda_0 : +Im\lambda > 0$ *являлась собственным значением пучка* L_λ^α *необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию* $A(\lambda_0)=0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что число λ_0 из открытой верхней полуплоскости является собственным значением оператора L_λ^α. Тогда решение уравнения (1), принадлежащее пространству $L_2(0,\infty)$ является линейной комбинацией решений $Y_k(x,\lambda_0)$, $k=1,2,3$:

$$Y(x,\lambda_0) = C_1 Y_1(x,\lambda_0) + C_2 Y_2(x,\lambda_0) + C_3 Y_3(x,\lambda_0), \quad (9)$$

где C_i - определенные коэффициенты, $i=\overline{1,3}$ С другой стороны $Y(x,\lambda_0)$ как решение уравнения (1) из $L_2(0,\infty)$, должно удовлетворять краевым условиям (2). Подставляя (9) в (2), получаем:

$$\sum_{k=1}^{3} C_k U_\nu(Y_k) = 0,\ \nu = 1,2,3. \tag{10}$$

Для того, чтобы (10) имело ненулевое решение относительно C_k, $k=\overline{1,3}$, должно быть $A(\lambda_0)=0$.

Достаточность. Предположим, что $A(\lambda_0)=0$. Тогда система (10) имеет нетривиальную систему решений $\{C_1, C_2, C_3\}$, причем $|C_1|+|C_2|+|C_3|\neq 0$. Разрешая систему (10), затем подставляя найденные решения в (9), находим функцию $Y(x,\lambda_0)\in D_\lambda$ для которой $l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda_0\right)Y=0$, т.е. λ_0 является собственным значением пучка L_α. Теорема доказана.

Подобным образом получаем, что в открытой нижней полуплоскости имеются собственные значения, которые являются корнями уравнения $B(\lambda)\equiv U_\nu(Y_4)=0$, где ν одно из чисел 1,2,3.

Теорема 2. *Оператор L_λ^α в открытой верхней и в открытой нижней полуплоскостях имеет собственные значения, которые являются, соответственно, корнями уравнений $A(\lambda)=0$ и $B(\lambda)=0$. Этот оператор не имеет собственных значений на действительной оси. Если числа λ_0 и λ_1 с $Im\lambda_0=0$ и $Im\lambda_1=0$, соответственно, являются корнями уравнения $A(\lambda)=0$ и $B(\lambda)=0$, тогда эти числа являются спектральными особенностями пучка L_λ^α.*

Предположим, что λ_μ является собственным значением пучка L_λ^α. Тогда соответствующая собственная функция определяется из формулы $Y_\mu(x)=\sum_{k=1}^{3}C_kY_k(x,\lambda_\mu)$. Положим $C_3=1$. Тогда, из краевых условий (2), находим:

$$\sum_{k=1}^{2} C_k U_\nu(Y_k) + U_\nu(Y_3) = 0,\ \nu=\overline{1,2,3}.$$

(11)

Ввиду того, что мы ищем ненулевые решения, ранг этой системы должен быть меньше 3. Пусть $ranq=2$. Тогда при условии, что

$$\Delta_0(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(Y_1) & U_1(Y_2) \\ U_2(Y_1) & U_2(Y_2)\end{vmatrix}\neq 0,$$

из системы

$$\begin{cases} C_1U_1(Y_1)+C_1U_1(Y_2)=-U_1(Y_3) \\ C_1U_2(Y_1)+C_2U_2(Y_2)=-U_2(Y_3)\end{cases} \tag{12}$$

можно определить C_i, $i=\overline{1,2}$. Для них $C_i=-\dfrac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$, $i=\overline{1,2}$. Здесь $\Delta_i(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой элементов столбца с номером i на элементы $\{-U_1(Y_3),-U_2(Y_3)\}'$.

Таким образом, собственная функция, отвечающая собственному значению λ_μ, выражается формулой

$$Y_\mu(x) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\Delta_i}{\Delta_0} Y_i\left(x, \lambda_\mu\right) + Y_3\left(x, \lambda_\mu\right). \tag{13}$$

Непосредственным вычислением с использованием формулы Лейбница для дифференцирования производных, из формул (5) перенумерацией Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, на $Y_0^+, Y_1^+, Y_2^+, Y_0^-$, получаем

$$\begin{gathered}\left(Y_j^\pm(x,\lambda)\right)^{(k)} = e^{\pm i\lambda x}\sum_{\nu=0}^{k}(\pm i)^\nu \lambda^\nu C_k^\nu \left(x^j\right)^{(k-\nu)} + \\ + e^{\pm i\lambda x}\sum_{\mu=0}^{k}\lambda^\nu g_{\mu,k,j}^\pm(x) + \int_x^\infty \frac{\partial^k K_j^\pm(x,t)}{\partial x^k} e^{\pm i\lambda t}dt,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$g_{kk0}^\pm = 0,\ g_{0,1,j}^\pm = -K_j^\pm(x,x),\ g_{1,2,j}^\pm = \mp K_j^\pm(x,x),\ K_j^\pm(x,x) =$$

$$= \pm\frac{1}{8i}\int_x^\infty \xi^j p(\xi)(\xi - x)d\xi + \frac{1}{8}\int_x^\infty \xi^j r(\xi)[i-\xi]d\xi,$$

$$\frac{d}{dx}K_j^\pm(x,x) = \mp\frac{1}{8i}\int_x^\infty \xi^j p(\xi)d\xi - \frac{1}{8}(i-x)x^j r(x)$$

$$g_{02j}^\pm(x) = -\frac{d}{dx}K_j^\pm(x,x) - \left.\frac{\partial K_j^\pm(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x},$$

$$g_{23j}^\pm(x) = \pm i g_{12j}^\pm(x), \qquad g_{13j}^\pm(x) = g_{12j}^\pm(x)' \pm i g_{02j}^\pm(x).$$

Используя оценки $\left.\dfrac{\partial^k K_j^\pm(0,t)}{\partial x^k}\right|_{x=0}$, $k=\overline{0,1,2,3}$ [Orudzhev, Aliyev, 2014], подставляя (14) в (2), убеждаемся, что функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, соответственно, являются регулярными функциями в верхней и нижней полуплоскостях, следовательно, нули этих функций образуют конечное или счетное множество.

Теорема 3. *Операторный пучок L_λ^α может иметь лишь конечное или счетное число собственных значений, образующих ограниченное множество в комплексной λ-плоскости с разрезом вдоль вещественной оси. Предельные точки этого множества могут находиться только на вещественной оси.*

Резольвента и непрерывный спектр пучка L_λ^α. Теперь построим явный вид резольвенты $R_\lambda^{(\pm)\alpha}$ дифференциального пучка $L_\lambda^{(\pm)\alpha}$ в каждой полуплоскости $\pm Im\lambda > 0$ в отдельности. Предположим, что область определения резольвенты $R_\lambda^{(\pm)\alpha}$ содержит функции $f(x)$, равные нулю вне произвольного конечного интервала $[0,a]$. Положим, $R_\lambda^{+\alpha}f = Y$, т.е. $L_\lambda Y = f$. Это означает, что $Y(x,\lambda)$ есть решение уравнения

$$l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right)Y = f \tag{15}$$

для любой функции $f(x) \in L_2(0,\infty)$. Это решение принадлежит $L_2(0,\infty)$ и удовлетворяет краевым условиям (2). Имея фундаментальные системы решений $Y_i(x,\lambda)$, $k=\overline{1,4}$ однородного дифференциального уравнения (1), методом вариации произвольных постоянных находим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (15). Общее решение ищем в виде

$$Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{4} C_i Y_i(x,\lambda). \tag{16}$$

Согласно этому методу, предположим, что C_1, C_2, C_3, C_4 являются функциями от x. Вычисляя все производные до 4-го порядка включительно, выражения (16) и подчиняя дополнительным условиям, получаем некоторую систему уравнений относительно $C_i'(x)$, $i=\overline{1,4}$. Решая полученную систему, относительно $C_i'(x)$ имеем

$$C_i'(x)=Z_{5-i}^{+}(x,\lambda)f(x), \tag{17}$$

где

$$Z_{5-i}^{+}(x,\lambda)=\frac{W_i(x,\lambda)}{W(x,\lambda)}, \quad i=1,2,3,4\cdot \tag{18}$$

Здесь $W(x,\lambda)$ определитель Вронского от $Y_1(x,\lambda), Y_2(x,\lambda), Y_3(x,\lambda), Y_4(x,\lambda)$, а $W_i(x,\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента $Y_i^{(3)}(x,\lambda)$ в вронскиане $W(x,\lambda)$. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $Z_i^{+}(x,\lambda), i=\overline{1,4}$ являются решениями уравнения $l^*\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)Z=0$, транспонированного к уравнению (1). Из (17) получаем

$$C_i(x)=C_i+\int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\cdot \tag{19}$$

Подставляя (19) в (16), имеем

$$Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{4}\left[C_i+\int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda). \tag{20}$$

В открытой верхней полуплоскости $Y_i(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $i=1,2,3$; $Y_4(x,\lambda)\notin L_2(0,\infty)$, $Z_1^{+}(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $Z_i^{+}(x,\lambda)\notin L_2(0,\infty)$, $i=2,3,4$. Поэтому $Y(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ возможно лишь тогда, когда сумма коэффициентов при $Y_4(x,\lambda)$ равна нулю, т.е. когда $C_4=-\int_0^a Z_1^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi$. Подобное равенство можно также записать в виде $C_4=-\int_0^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi$, ибо $f(x)=0$ при $x>a$. С учетом этого, выражение (20) имеет вид

$$Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\left[C_i+\int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda)-\int_x^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\cdot Y_4(x,\lambda). \tag{21}$$

Отсюда

$$Y^{(\nu)}(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\left[C_i+\int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i^{(\nu)}(x,\lambda)-\int_x^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\cdot Y_4(x,\lambda).$$

Поскольку из определения функции $Z_i^{+}(x,\lambda)$, $i=\overline{1,4}$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i^{(k)}(x,\lambda)\cdot Z_{5-i}^{+}(x,\lambda)=0, \quad k=0,1,2.$$

С помощью граничных условий имеем:

$$U_\nu(Y)=\sum_{i=1}^{3}C_iU_\nu(Y_i)-\left[\int_0^\infty Z_1^+(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]U_\nu(Y_4)=0,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{3}C_iU_\nu(Y_i)=\int_0^\infty Z_1^+(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi U_\nu(Y_4).$$

Решая эту систему уравнений относительно C_i, $i=\overline{1,3}$, получим

$$C_i=\frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)}\int_0^\infty Z_1^+(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi, \tag{22}$$

где $A(\lambda)=\det\left|U_\nu(Y_k)\right|_{\nu,k=1}^{3}\neq 0$, $A_i(\lambda)$ определитель, полученный из $A_3(\lambda)$ заменой $U_\nu(Y_i)$ на $U_\nu(Y_4)$.

Обозначая через

$$h_i^+(x,\lambda)=\frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)}Z_1^+(x,\lambda),\ i=\overline{1,3}, \tag{23}$$

можем записать:

$$C_i=\int_0^\infty h_i^+(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi,\ i=1,2,3. \tag{24}$$

Подставляя эти значения в (21), имеем:

$$Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\left[\int_0^x\left(h_i^+(\xi,\lambda)+Z_{5-i}^+(\xi,\lambda)\right)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda)+$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{3}\int_x^\infty h_i^+(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda)-\int_x^\infty Z_1^+(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\cdot Y_4(x,\lambda).$$

Обозначая через $K^+(x,t,\lambda)$ ядро резольвенты $R_\lambda^{+\alpha}$ в верхней полуплоскости

$$K^+(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}\left[h_i^+(\xi,\lambda)+Z_{5-i}^+(\xi,\lambda)\right]Y_i(x,\lambda), & npu\,\xi<x\\ \sum\limits_{i=1}^{3}h_i^+(\xi,\lambda)Y_i(x,\lambda)-Z_1^+(\xi,\lambda)Y_4(x,\lambda), & npu\,\xi>x.\end{cases} \tag{25}$$

и введя переобозначения

$$Z_{5-i}^+(\xi,\lambda)=\omega_i^+(\xi,\lambda),\ i=\overline{1,4},$$

имеем

$$K^+(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}\left[h_i^+(\xi,\lambda)+\omega_i^+(\xi,\lambda)\right]Y_{i-1}^+(x,\lambda), & npu\,\xi<x\\ \sum\limits_{i=1}^{3}h_i^+(\xi,\lambda)Y_{i-1}^+(x,\lambda)-\omega_4^+(\xi,\lambda)Y_0^-(x,\lambda), & npu\,\xi>x,\end{cases} \tag{26}$$

где

$$h_i^+(x,\lambda)=\frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)}\cdot\omega_4^+(\xi,\lambda).$$

Из последнего выражения можем написать

$$Y(x,\lambda)=R_\lambda^{+\alpha}f=\int_0^\infty K^+(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим открытую нижнюю полуплоскость. В этой полуплоскости $Y_0^-(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, а $Y_0^+\ Y_1^+,\ Y_2^+$, не принадлежат пространству $L_2(0,\infty)$. А для решений сопряженного уравнения $Z_i^-(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $i=\overline{1,3}$; $Z_4^-(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty)$. В этом случае, перенумеруя $Y_0^-,\ Y_0^+\ Y_1^+,\ Y_2^+$ соответственно через Y_1,Y_2,Y_4,Y_4 имеем, что $Y_1(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $Y_i(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty)$. Тогда функция $Y(x,\lambda)$, выраженная в виде

$$Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^4\left[C_i+\int_0^x Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda), \quad (28)$$

принадлежит $L_2(0,\infty)$тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов функций $Y_i(x,\lambda)$, $i=2,3,4$ равна нулю, то есть

$$C_i=-\int_0^\infty Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi,\ i=2,3,4\ , \quad (29)$$

где $f(x)=0,\ при\, x\geq a.$

С учетом (29), выражение (28) имеет вид

$$Y(x,\lambda)=\left[C_1+\int_0^x Z_4^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_1(x,\lambda)-\sum_{i=2}^4\left[\int_0^x Z_{5-1}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda). \quad (30)$$

Отсюда

$$Y^{(k)}(x,\lambda)=\left[C_1+\int_0^x Z_4^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_1^{(k)}(x,\lambda)-\sum_{i=2}^4\left[\int_x^\infty Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i^{(k)}(x,\lambda).$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^4 Y_i^{(k)}(x,\lambda)\cdot Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)=0,\ k=0,1,2,$ для фиксированного граничного условия имеем $U_\nu(Y)=C_1U_\nu(Y_1)-\sum_{i=2}^4\left[\int_0^\infty Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]U_\nu(Y_i)=0,\quad \nu-фиксировано.$

Отсюда

$$C_1=\frac{1}{U_\nu(Y_1)}\cdot\sum_{i=2}^4\left[\int_0^\infty Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]\cdot U_\nu(Y_i).$$

Обозначая

$$h^-(x,\lambda)=\frac{1}{U_\nu(Y_1)}\cdot\sum_{i=2}^4 U_\nu(Y_i)Z_{5-i}^-(x,\lambda) \quad (31)$$

можем написать

$$C_1=\int_0^\infty h^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi. \quad (32)$$

Подставляя это значение в (30), получаем:

$$Y(x,\lambda)=\left[\int_0^x\left[h^-(\xi,\lambda)+Z_4^-(\xi,\lambda)\right]f(\xi)d\xi\right]\cdot Y_1(x,\lambda)+$$
$$+\left[\int_x^\infty h^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]\cdot Y_1(x,\lambda)-\sum_{i=2}^4\left[\int_x^\infty Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]\cdot Y_i(x,\lambda). \tag{33}$$

Обозначая через $K^-(x,\xi,\lambda)$ выражение:

$$K^-(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\left[h^-(\xi,\lambda)+Z_4^-(\xi,\lambda)\right]Y_1(x,\lambda), & при\, \xi<x\\ h^-(\xi,\lambda)Y_1(x,\lambda)-\sum\limits_{i=2}^4 Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)Y_i(x,\lambda), & при\, \xi>x,\end{cases} \tag{34}$$

и снова введя обозначения $Z_{5-i}^-(\xi,\lambda)=\omega_i^-(\xi,\lambda),\ i=\overline{1,4}$ получаем:

$$K^-(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\left[h^-(\xi,\lambda)+\omega_1^-(\xi,\lambda)\right]Y_0^-(x,\lambda), & при\, \xi<x,\\ h^-(\xi,\lambda)Y_0^-(x,\lambda)-\sum\limits_{i=2}^4 \omega_i^-(\xi,\lambda)Y_{i-2}^+(x,\lambda), & при\, \xi>x,\end{cases} \tag{35}$$

где

$$h^-(x,\lambda)=\frac{1}{U_\nu\left(Y_0^-\right)}\sum_{i=2}^4 U_\nu\left(Y_{i-2}^+\right)\cdot\omega_i^-(\xi,\lambda).$$

Введенное обозначение удобно для записи ядра в компактном виде и мы имеем следующее представление:

$$Y(x,\lambda)=\int_0^\infty K^-(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi. \tag{36}$$

Теорема 4. *Для всех значений спектрального параметра λ из открытой верхней и открытой нижней полуплоскостей, не являющихся корнями уравнения $A(\lambda)=0$ и $B(\lambda)=0$, резольвента оператора L_λ^α определена на всем пространстве $L_2(0,\infty)$, в нём является ограниченным интегральным оператором, с ядрами типа Карлемана. При приближении λ к действительной оси норма резольвенты неограниченно возрастает и вся действительная ось принадлежит непрерывному спектру пучка L_λ^α.*

Доказательство. В представлениях (25) и (34) ядра резольвенты, в верхней полуплоскости $Y_j(x,\lambda)\in L_2(0,\infty),\ j=\overline{1,3};\ Y_4(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty);\ Z_1^+(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $Z_j^+(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty),\ j=\overline{1,3}$, а в нижней полуплоскости $Y_j(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty),\ j=\overline{1,3}$; $Y_4(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$; $Z_1^-(x,\lambda)\overline{\in} L_2(0,\infty),\ Z_j^-(x,\lambda)\in L_2(0,\infty),\ j=\overline{1,3}$. Учитывая, что $x^j\xi^j e^{i\lambda(x-\xi)}$, $x^j\xi^j e^{-i\lambda(x-\xi)}$ являются доминантными членами в соответствующих выражениях, с привлечением неравенства

$$\left|\sum_{\alpha=1}^k x_\alpha\right|^2\le k\sum_{\alpha=1}^k\left|x_\alpha\right|^2,$$

получается оценка

$$\int_0^\infty\left|\int_0^\infty K(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right|^2dx<const\cdot\int_0^\infty\left|f(\xi)\right|^2d\xi,$$

где

$$K(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} K^{+}(x,\xi,\lambda), & npu \quad Im\lambda>0 \\ K^{-}(x,\xi,\lambda), & npu \quad Im\lambda<0. \end{cases}$$

А это означает, что $K(x,\xi,\lambda)$ является ограниченным интегральным оператором на всем пространстве $L_2(0,\infty)$. Ввиду того, что ядро является ядром Гильберта-Шмидта, оно порождает вполне непрерывный оператор.

Оценки

$$\int_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2 dx<+\infty, \quad \int_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2 d\xi<\infty$$

типа Карлемана, получаются из асимптотических разложений функций $Y_i(x,\lambda), Z_i(x,\lambda),\ j=\overline{1,4};$ из представлений (25) и (34).

Теперь возьмем $a>0$ такое, что при $x\geq a>0$ выполняется неравенство $0(1)<\frac{1}{2}$.

Из оценки

$$\int_0^\infty |Y_k(x,\lambda)|^2 dx=\int_a^\infty \left|x^{2(x-1)}e^{2i\lambda x}[1+0(1)]^2\right|dx=\int_a^\infty x^{2(x-1)}e^{-2Im\lambda x}[1+0(1)]^2 dx\geq$$

$$\geq\frac{1}{4}\int_a^\infty x^{2(x-1)}e^{-Im\lambda x}dx,\ k=\overline{1,4},$$

частично интегрируя правую часть, имеем следующую оценку

$$\left\|R_\lambda^\alpha f\right\|^2=\int_0^\infty \left|R_\lambda^\alpha f\right|^2 dx\geq C_\lambda^{\pm}\cdot\|f\|^2,$$

где $C_\lambda^{\pm}$ является многочленом третьей степени относительно $\frac{1}{Im\lambda}$.

Из этой формулы вытекает, что при приближении λ к действительной оси норма резольвенты неограниченно растет. Теперь покажем, что при $\lambda\in(-\infty;\infty)$ область определения оператора R_λ^α плотна в $L_2(0,\infty)$, т.е. область значений L_λ^α является плотной в $L_2(0;\infty)$. Предположим противное. Тогда в $L_2(0;\infty)$ будет существовать такая функция $f(x)\neq 0$, что равенство $(L_\lambda^\alpha Y,f)=0$ (т.е. $(f,L_\lambda^{\alpha *}f)=0$) должно выполняться для всех $Y(x,\lambda)\in D(L_\lambda^\alpha)$. А это означает, что $L_\lambda^{*\alpha}f=0$, то есть $\overline{\lambda}$ является собственным значением оператора $(L_\lambda^\alpha)^*$. Но, тогда λ стала бы собственным значением оператора L_λ^α . Таким образом получили противоречие. Поэтому, предположение $f\neq 0$ не имеет место.

Таким образом, вся действительная ось принадлежит непрерывному спектру оператора L_λ^α. Если $A(\lambda)=0, B(\lambda)=0$ имеют действительные корни, тогда эти числа являются спектральными особенностями пучка L_λ^α. Теорема доказана.

Заключение

В результате проведенного анализа доказано, что рассматриваемый пучок L_λ^α имеет конечное число собственных значений из открытого верхнего и открытого нижнего полуплоскостей, непрерывный спектр заполняет действительную ось, где могут быть конечное число спектральных особенностей. Построена резольвента пучка L_λ^α в виде ограниченного интегрального оператора с ядром типа Карлемана.

Список литературы
References

1. Богомолова Е.П., Печенцов А.С. 1989. О базисных свойствах системы собственных функций краевой задачи с кратным корнем характеристического многочлена. Вестник Московского Университета, серия 1, математика, механика, 4: 17-22.

Bogomolova E.P. Pechentsov A.S. 1989. On the basic properties of the system of eigenfunctions of a boundary value problem with a multiple root of the characteristic polynomial. Vestnik Moskovskogo Universiteta, seriya 1, Mathematica, Mechanica, 4: 17-22. (in Russian)

2. Вагабов А.И. 1987. Квадратичные пучки обыкновенных дифференциальных операторов. Математические заметки, 42 (3): 381-393.

Vagabov A.I. 1987. Quadratic sheafs of ordinary differential operators. Mathematicheskie Zametki, 42 (3): 381-393. (in Russian)

3. Гасымов М.Г., Магеррамов А.М. 1982. Исследование одного класса операторных пучков четного порядка. ДАН СССР, 265 (2): 277-280.

Gasymov M.G., Magerramov A.M. 1982. Study of one class of operator sheafs of even order. DAN SSSR, 265 (2): 277-280. (in Russian)

4. Максудов Ф.Г., Магеррамов А.М., Мамедов М.З. 1990. Спектральный анализ пучков дифференциальных операторов специального вида. ДАН СССР, 310 (1): 24-28.

Maksudov F.G., Magerramov A.M. Mamedov M.Z. 1990. Spectral analysis of sheaf of differential operators of a special type. DAN SSSR, 310(1): 24-28. (in Russian)

5. Оруджев Э.Г. 1997. Резольвента и спектр одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов с кратными характеристиками. Труды Института матем. и мех. АН Азербайджана, 6 (12): 148-160.

E.G.Orudzhev . 1997. Resolvent and the spectrum of a class of non-self-adjoint differential operators with multiple characteristics. Proceedings of the Institute of Mat. and fur. The Academy of Sciences of Azerbaijan, 6(12):148-160. (in Russian)

6. Оруджев Э.Г. 1998. Прямые спектральные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, полиноминально зависящего от спектрального параметра. Доклады АН Азербайджана, 54 (1): 9-15.

Orudzhev E.G. 1998. Direct spectral problems for an ordinary differential equation of the 4th order, polynomially dependent on the spectral parameter. Reports of the Academy of Sciences of Azerbaijan, 54 (1): 9-15. (in Russian)

7. Оруджев Э.Г. 1999. Краевые задачи для дифференциальных уравнений четного порядка с кратными характеристиками. Доклады Академии Наук, Российская Академия Наук, 368(1), 14-17.

Orudzhev E.G. 1999. Boundary value problems for even differential equations with multiple characteristics . Doklady Akademii Nauk, Rossiyskaya Akademiya Nauk, 368(1): 14-17.

8. Фунтаков В.Н. 1961. О разложении по собственным функциям несамосопряженно дифференциального пучка произвольного порядка на полуоси $[0;\infty)$. Известия Академии Наук Азербайджанской ССР, серия физико-математических и технических наук, 1: 3-21.

Funtakov V.N. 1961 On expansion in eigenfunctions of a non-self-adjoint differential sheaf of arbitrary order on a semi-axis. Izvestiya Akademii Nauk Azerbaydjanskoy SSR, seriya fiziko-matematicheskix i technicheskix nauk, 1: 3-21. (in Russian)

9. Sahil A.Aliev. 2013. On the existence of transformation operator for a fourth order differential equation with triple characteristics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 39:3-8.

10. Mirzoyev S.S., Orudzhev E.G., Aliyev A.R. 2012. Spectral Analysis of a Fourth Order Differential Pensil on the Whole Real Line.Doklady Mathematics, 2012, 85(1): 57-59.

11. Orudzhev E.G. 1999. Spectral analysis of differential operators with multiple characteristics on a semi-axis. Russian Mathematical Surveys 54 (2): 448-449.

12. Elshar G.Orudzhev and Sahil A.Aliyev. 2014. Construction of a kernel of the transformation operator for a fourth order differential bundle with multiple characteristics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Special Issue, 40: 351-358.