УДК 517.926: 537.934
DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-21-32

# ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ В ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КАНА-ХИЛЛИАРДА

# SPATIALLY INHOMOGENEOUS SOLUTIONS IN TWO BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE CAHN-HILLIARD EQUATIONS

**А.Н. Куликов, Д.А. Куликов**
**A.N. Kulikov, D.A. Kulikov**

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова,
Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, 14

Demidov Yaroslavl State University,
14 Sovetskaya St., Yaroslavl, 150003, Russian

**Аннотация**
Рассматривается известное в математической физике уравнение Кана-Хиллиарда, имеющее приложения в химической кинетике и физике пограничных явлений. Данное нелинейное дифференциальное уравнение изучается вместе с однородными краевыми условиями Дирихле и Неймана. Для обеих краевых задач дан анализ локальных бифуркаций в окрестности однородных состояний равновесия. Для краевой задачи Дирихле получены условия, при выполнении которых в окрестности нулевого состояния равновесия реализуется бифуркация типа «вилка». Более сложный характер бифуркаций реализуется в краевой задаче Неймана. В работе показано, что при превышении порогового значения управляющего параметра из однородных состояний равновесия бифурцируют однопараметрические семейства пространственно неоднородных состояний равновесия. Для обоснования результатов использованы методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий: метод интегральных (инерциальных) многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре, асимптотические методы анализа. Их использование позволяет получать асимптотические формулы для найденных решений, а также изучать вопрос об их устойчивости в смысле определения А.М. Ляпунова в метрике фазового пространства решений.

**Abstract**
The well-known Cahn-Hilliard equation, which has applications in chemical kinetics and physics of boundary phenomena, is considered. This nonlinear differential equation is studied together with homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions. For both boundary value problems, an analysis of local bifurcations in the neighborhood of homogeneous equilibrium states is given. For the Dirichlet boundary value problem, conditions under which a pitchfork bifurcation is realized in the neighborhood of the zero equilibrium state are obtained. The more complex nature of bifurcations is realized in the Neumann boundary value problem. It is shown that when the threshold value of the control parameter is exceeded, then from homogeneous equilibrium states, one-parameter families of spatially inhomogeneous equilibrium states are bifurcating. To substantiate the results, the methods of the theory of dynamic systems with an infinite-dimensional space of initial conditions were used: the method of integral (inertial) manifolds, the theory of Poincare normal forms, asymptotic methods of analysis. Their use allows one to obtain asymptotic formulas for the solutions found, and also to study the problem of their stability in the sense of A.M. Lyapunov in the metric of the phase space of solutions.

**Ключевые слова:** уравнение Кана-Хиллиарда, краевые задачи, динамические системы, устойчивость, бифуркации, асимптотика.
**Keywords**: Cahn-Hilliard equation, boundary value problems, dynamical systems, stability, bifurcations, asymptotic.

## 1. Введение

В работе изучается вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений известного в математической физике нелинейного уравнения

$$u_t = (-u_{xx} - au + u^3)_{xx} \tag{1}$$

которое принято называть уравнением Кана-Хиллиарда [Cahn, 1985, с. 262; Temam, 1997, с.183]. Это уравнение моделирует процесс химических реакций в двукомпонентной среде. В данном варианте уравнения считаем, что $u = u(t,x)$, т.е. неизвестная функция зависит от одной пространственной переменной $x$.

Естественно, в связи с приложениями в химической кинетике рассматривают и иные, более общие варианты данного уравнения. Например,

$$u_t = \Delta[-\Delta u + F'(u)],$$

где $u = u(t,x,y), \Delta$ – оператор Лапласа по пространственным переменным $(\Delta v = v_{xx} + + v_{yy})$, а $F(u)$ в физической химии принято называть химическим потенциалом или свободной энергией [Alikatos, 1991; Pego, 1989].

В уравнении (1) $F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + \frac{u^4}{4}, a \in R$, т.е. будет рассмотрен один из самых типичных вариантов выбора $F(u)$. При этом обычно считают, что $a > 0$.

В данной работе ограничимся изучением уравнения (1), если $x \in [0,l], l > 0$. После перенормировок пространственной переменной $x$ без нарушения общности можно считать, что уравнение (1) рассматривается, если $x \in [0,\pi], (l = \pi)$.

В большинстве работ уравнение (1) изучалось вместе с одним из видов краевых условий [Alikatos, 1991, с. 112; Pego, 1989, с. 270; Temam, 1997, с. 312]

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0 \tag{2}$$

или

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = u_{xxx}(t,0) = u_{xxx}(t,\pi) = 0. \tag{3}$$

Естественно, что возможен и иной выбор краевых условий, отличных от краевых условий (2) или (3). Достаточно часто краевые условия (2) называют краевыми условиями Дирихле (однородными краевыми условиями Дирихле), а краевые условия (3) – краевыми условиями Неймана (однородными краевыми условиями Неймана). Сразу отметим, что краевая задача (КЗ) (1), (3) имеют однопараметрическое семейство однородных состояний равновесия $u(t,x) = const$ при любых значениях параметра $a$. В то же время у КЗ (1), (2) есть лишь одно пространственно однородное состояние равновесия $u(t,x) = 0$.

В работе основное внимание будет уделено изучению локальных бифуркаций пространственно неоднородных состояний равновесия КЗ (1), (2) и (1), (3), т.е. таких решений $u(t,x) = v(x)$, для которых $v'(x) \not\equiv 0$. Будет также изучен вопрос об устойчивости таких решений в смысле определения А.М. Ляпунова в естественной норме для решений соответствующих КЗ. Добавим, что для устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия И. Пригожиным был, в свое время, предложен термин диссипативные структуры [Nicolis, 1977, с. 156].

## 2. Краевая задача Дирихле

В этом разделе анализу будет подлежать КЗ (1), (2). Если ее дополнить начальным условием

$$\mathrm{u(0,x) = f(x)}, \tag{4}$$

где $f(x) \in W_{2,0}^4[0,\pi]$, то начально-краевая (смешанная) задача (1), (2), (4) локально корректно разрешима, т.е. данная КЗ имеет единственное решение $u(t,x)$ при $t \in (0,T_f)$ и $u(t,x)$ как функция x принадлежит $W_2^4[0,\pi]$ и удовлетворяет краевым условиям. Отметим, что $f(x) \in W_{2,0}^4[0,\pi]$, если данная функция имеет обобщенные производные в смысле определения Соболева до четвертого порядка включительно, принадлежащие $L_2(0,\pi)$ и удовлетворяющие условиям $f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0$. При этом, в силу теорем вложения [Функциональный анализ, 1972] $f(x) \in C^3[0,\pi]$.

Используя определенные результаты и технику [Temam, 1997; Nicolaenko, 1985] можно показать, что при $a < 1$ справедливо предельное равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t) = 0$, где $\rho(t) = \|u(t,x)\|_{L_2(0,\pi)} = \sqrt{\int_0^\pi u^2(t,x)dx}$. Это равенство справедливо для всех решений КЗ (1), (2) (всех $f(x) \in W_2^4[0,\pi]$). Поэтому при $a < 1$ КЗ (1), (2) не может иметь нетривиальных диссипативных структур и далее будем предполагать, что $a \geq 1$.

Рассмотрим сначала линеаризованный вариант КЗ (1), (2), т.е. КЗ

$$u_t = Au,\ Au = -u_{xxxx} - a u_{xx}, \tag{5}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0. \tag{6}$$

Линейный дифференциальный оператор (ЛДО) $A = A(a)$ имеет счетный набор собственных значений (СЗ)

$$\lambda_n = \lambda_n(a) = -n^4 + an^2, n = 1,2,3,\ldots,$$

которым соответствуют собственные функции (СФ) $h_n(x) = \sin nx$, образующие на $[0,\pi]$ полную ортогональную систему функций. Добавим, что при $a = k^2, k = 1,2,\ldots$ ЛДО $A(k^2) = A_k$ имеет простое нулевое СЗ ($\lambda_k = 0$). При таком выборе параметра a справедливы неравенства $\lambda_k > 0$, если $n < k$ и, напротив, $\lambda_k < 0$, если $n > k$. Напомним также, что уравнение

$$A_k v(x) = g(x),\ g(x) \in L_2(0,\pi) \tag{7}$$

имеет решение $v(x) \in W_{2,0}^4[0,\pi]$, если $M_k(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin kx dx = 0$ (условие разрешимости). При выполнении последнего условия решение уравнения (7) не единственно. Если $v_0(x)$ – решение, то и $v_0(x) + \alpha \sin kx$ также решение. Условие $M_k(v) = 0$ выделяет одно подходящее решение.

Положим $a = k^2 + \varepsilon$, где $k = 1,2,\ldots$, а $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 \ll 1$. КЗ (1), (2) в §1 будет изучаться при таких вариантах выбора параметра $a$. Итак, рассмотрим КЗ

$$u_t = A_k(\varepsilon)u + (u^3)_{xx}, \tag{8}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0. \tag{9}$$

Здесь $A_k(\varepsilon)u = -u_{xxxx} - (k^2 + \varepsilon)u_{xx}$.

КЗ (8), (9) при достаточно малых ε имеет в некоторой окрестности нулевого решения гладкое одномерное локально инвариантное многообразие $M_k(\varepsilon)$ [Куликов,1976; Marsden, 1976; Kolesov, 2003; Kolesov, 2003; Куликов, 1991], которое принято называть центральным [Marsden, 1976]. Это многообразие притягивающее (локальный аттрактор), если $k = 1$, а при остальных k оно седловое.

На нем анализ решений КЗ (8), (9) при каждом $k \in N$ сводится к анализу нормальной формы (НФ) – обыкновенного скалярного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon F(y, \varepsilon), y = y(t).$$

При анализе НФ в ситуации общего положения определяющую роль играет «главная» часть этого дифференциального уравнения

$$\dot{y} = \varepsilon F_0(y), \tag{10}$$

где $F_0(y) = F(y, 0)$, т.е. $F(y, \varepsilon) = F_0(y) + O(\varepsilon)$.

Для нахождения $F_0(y)$ используем одну из модификаций известного алгоритма Крылова-Боголюбова, модифицированного для анализа бесконечномерных динамических систем [Kulikov, 2012, 2014, 2015, 2016, 2017]. При реализации такой модификации решения КЗ (8), (9), принадлежащие одномерному локально инвариантному многообразию $M_k(\varepsilon)$, следует искать в виде суммы

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t, x) + \varepsilon u_2(t, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x) + o(\varepsilon^{3/2}). \tag{11}$$

Здесь $u_1(t, x) = y(t)\sin kx$, а $y(t)$ – решение НФ (10). Наконец, для функций $u_2(t, x)$, $u_3(t, x)$ справедливы следующие свойства:

1) при всех рассматриваемых t справедливо включение

$$u(t, x) \in W_{2,0}^4[0, \pi] \text{ (как функция переменного x)};$$

2) $M_k[u_j] = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_j(t, x)\sin kx\, dx = 0$, где $j = 2, 3, \cdots, k \in N$.

**Замечание 1.** Формулу (11) можно «уточнить» и рассмотреть в ней большее число слагаемых, но в ситуации общего положения и, в частности, при анализе КЗ (8), (9) это излишне. Привлечение большего числа слагаемых уточняет асимптотические формулы, которые будут получены далее.

Для определения функций $u_2(t, x), u_3(t, x)$ получаем линейные КЗ

$$u_{2t} = A_k u_2, \quad u_2(t, 0) = u_2(t, \pi) = u_{2xx}(t, 0) = u_{2xx}(t, \pi) = 0, \tag{12}$$

$$u_{3t} = A_k u_3 + G(x, y), \quad u_3(t, 0) = u_3(t, \pi) = u_{3xx}(t, 0) = u_{3xx}(t, \pi) = 0, \tag{13}$$

где $G(x, y) = (u_1^3)_{xx} - u_{1xx} - F_0(y)\sin kx$, а $u_1 = y(t)\sin kx$.

Однородная КЗ (12) имеет единственно решение $u_2 = 0$ из подходящего класса функций. Неоднородная КЗ (13) имеет единственное, с точностью до величин, имеющих порядок $O(\varepsilon)$, решение

$$u_3(x, y(t)) = \frac{1}{32k^2} y^3(t)\sin 3kx,$$

если выполнено условие разрешимости и $y(t)$ – решение уравнения (10), т.е. «укороченной» НФ. Подчеркнем, что $F_0(y) = k^2 y - \frac{3}{4}k^2 y^3$.

Перейдем теперь к анализу НФ (10), т.е. скалярного дифференциального уравнения

$$\acute{y} = \varepsilon k^2 \left[y - \frac{3}{4} y^3\right].$$

Оно имеет три состояния равновесия

$$S_0: y = 0, \quad S_{\pm}: y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Оба ненулевых состояния равновесия $S_{\pm}$ асимптотически устойчивы как решения вспомогательного дифференциального уравнения (10), а $S_0$ – неустойчиво.

Доказательство последнего утверждения стандартно. Из результатов работ Куликова и других авторов [Куликов, 1976, 1991; Marsden, 1976; Kolesov, 2003] вытекает, что справедливо утверждение:

**Теорема 1.** *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (8), (9) имеет два пространственно неоднородных состояния равновесия*

$$S_{\pm} = S_{\pm}(k): v(x, \varepsilon) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon^{1/2} sinkx \pm \frac{\sqrt{3}}{36k^2}\varepsilon^{3/2} sin3kx + O(\varepsilon^2).$$

*При $k = 1$ они оба устойчивы и неустойчивы, если $k \geq 2$.*

Добавим, что нулевое решение КЗ асимптотически устойчиво и при $a = 1$. Это вытекает из отрицательности первой ляпуновской величины (она равна $-\frac{3}{4}k^2$).

## 3. Краевая задача Неймана

КЗ (1), (3) обычно рассматривают вместе с дополнительным условием [Alikatos, 1991, с. 112, Pego, 1989, с. 270, Temam, 1997, с. 312] $M_0(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(t, x)dx = 0$, т.е. КЗ

$$u_t = -u_{xxxx} - a u_{xx} + (u^3)_{xx}, \qquad (14)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0, M(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(t, x)dx = 0. \qquad (15)$$

Построения, аналогичные конструкциям §2 данной работы, позволяют заключить, что справедливы следующие утверждения.

Пусть $Av = A(a)v = -v^{(IV)} - a v''$ – ЛДО, определенный на достаточно гладких функциях $v(x)$, которые дополнительно удовлетворяют условиям:

$$v'(0) = v'(\pi) = v'''(0) = v'''(\pi) = 0 \text{ и } M_0(v) = 0.$$

Тогда этот оператор имеет дискретный спектр $\lambda_n(a) = -n^4 - an^2$. СЗ $\lambda_n(a)$ – простые и им отвечают СФ $\cos nx$. Выше $n = 1,2,3, \ldots$. Семейство функций $\{\cos nx\}$ в пространстве $L_{2,0}(0, \pi)$ образует полную ортогональную систему ($f(x) \in L_{2,0}(0, \pi)$, если $f(x) \in L_2(0, \pi)$ и $M_0(f) = 0$).

В качестве фазового пространства решений КЗ (14), (15) можно и естественно выбрать функции $f(x) \in \widetilde{W_{2.0}^4}[0, \pi]$, т.е. такие функции $f(x) \in W_2^4[0, \pi]$, для которых одновременно выполнены краевые условия $f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0$, а также $M_0(v) = 0$.

КЗ (14), (15) имеет нулевое состояние равновесия, асимптотически устойчивое при $a \leq 1$ и неустойчивое при $a > 1$.

Пусть $a = k^2 + \varepsilon$ ($k \in N$), $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0$ – малая положительная постоянная. Как и в §2, при таком выборе параметра $a$ справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.

**Теорема 2.** *Существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$,* что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(k))$ *КЗ (14), (15) имеет кроме нулевого состояния равновесия еще два пространственно неоднородных $E_{\pm}(k)$, для которых справедлива асимптотическая формула*

$$u_{\pm}(x,k,\varepsilon) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon^{1/2}coskx \mp \frac{\sqrt{3}}{36k^2}\varepsilon^{3/2}cos3kx + o(\varepsilon^{3/2}).$$

*Состояния равновесия $E_{\pm}(k)$ асимптотически устойчивы, если $k = 1$ и седловые (неустойчивы), если $k = 2,3,\cdots$ Нулевое состояние равновесия в данной ситуации неустойчиво.*

Подчеркнем еще раз, что анализ КЗ (1), (3) с дополнительным условием $M_0(u) = 0$ приводит к аналогичным результатам, полученным при анализе КЗ (1), (2) в §2. Добавим, что бифурцирующие из нулевого состояния равновесия неоднородные состояния равновесия $E_{\pm}(k)$ устойчивы только при бифуркациях на первой моде (при $k = 1$). Мы говорим о бифуркации на моде k, если первое слагаемое в асимптотической формуле для функций, задающих неоднородное состояние равновесия, содержится в качестве первого слагаемого $\cos kx$ (это не исключает, что остальные слагаемые асимптотической формулы содержат $\cos mx$ при $m \neq k$).

Иная ситуация возникает при анализе КЗ (1), (3), если не привлекать дополнительное условие $M_0(u) = 0$, т.е. вместо КЗ (14), (15) рассмотреть более общий вариант

$$u_t = -u_{xxxx} - a u_{xx} + (u^3)_{xx}, \tag{16}$$

$$u_x(t,0) = u_{xxx}(t,0) = u_x(t,\pi) = u_{xxx}(t,\pi) = 0. \tag{17}$$

Отметим два свойства КЗ (16), (17). Во-первых, она имеет кроме нулевого состояния равновесия семейство однородных состояний равновесия $u(t,x) = \alpha, \alpha \in R$. Во-вторых, если $M_0(u(0,x)) = \alpha$, то $M_0(u(t,x)) = \alpha$ при всех рассматриваемых $t > 0$.

Действительно, пусть $u(t,x)$ – какое-либо решение КЗ (16), (17). Данную функцию двух переменных можно представить в виде ряда

$$u(t,x) = u_0(t) + v(t,x), v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos nx,$$

где $u_0(t) = M_0(u(t,x)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)dx, v_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\cos nx dx$. Сразу отметим, что $M_0(v) = 0$, а также, что $u_0(t) = \alpha, \alpha \in R$. Справедливость последнего замечания вытекает из справедливости тождества

$$\int_0^{\pi} \{-u_{xxxx} - a u_{xx} + (u^3)_{xx}\}dx = 0$$

для решений КЗ (16), (17). Следовательно, $\frac{du_0(t)}{dt}=0$, т.е. $u_0(t) = \alpha = const$.

Два последних замечания позволяют сделать замену

$$u(t,x) = \alpha + v(t,x), \tag{18}$$

где $\alpha = M_0(u)$ и, следовательно, постоянная $\alpha$ – произвольна. При этом, конечно, $M_0(v) = 0$. В результате замены (18) получаем вспомогательную КЗ

$$v_t = A(\alpha)v + F(v,\alpha), \tag{19}$$

$$v_x(t,0) = v_x(t,\pi) = v_{xxx}(t,0) = v_{xxx}(t,\pi) = 0, M_0(v) = 0, \tag{20}$$

где $\alpha \in R$ произвольно, а

$$A(\alpha)v = -v_{xxxx} - a(\alpha)v_{xx}, \quad a(\alpha) = a - 3\alpha^2, F(v,\alpha) = 3\alpha(v^2)_{xx} + (v^3)_{xx}.$$

Мы получили обобщенный вариант КЗ (14), (15). В частности, правая часть уравнения (19) зависит от параметра $\alpha$ и содержит уже квадратичные слагаемые. Отметим, что $a(0) = a, a(\alpha) \le a$, при всех значениях вспомогательного параметра $\alpha$. На первом этапе анализа КЗ (19), (20) считаем, что коэффициенты уравнения (19) фиксированы, т.е. величина $\alpha$ выбрана. Перенос результатов на КЗ (14), (15) будет осуществлен на втором этапе. Подчеркнем, что КЗ (19), (20) имеет пространственно однородное состояние равновесия $v = 0$. Для анализа его локальной устойчивости рассмотрим линеаризованную в нуле КЗ (19), (20), т.е. уравнение

$$v_t = A(\alpha)v, \tag{21}$$

дополненное условиями (20). СЗ ЛДО $A(\alpha)$

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha) = -n^4 + a(\alpha)n^2 \ (n = 1,2, \dots)$$

и соответствующие СФ – $\cos nx$. При этом, естественно, при $a(\alpha) < 1$ нулевое решение КЗ (19), (20) заведомо асимптотически устойчиво, а при $a(\alpha) > 1$ неустойчиво. При $a(\alpha) = 1$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения КЗ (19), (20) в смысле использования теоремы об устойчивости по линейному приближению. При этом ответ об устойчивости нулевого решения КЗ (19), (20) не столь однозначен, как при изучении КЗ (14), (15) при $a = 1$. Добавим, также, что при $a(\alpha) = k^2$ $(k = 2,3, \dots)$ ЛДО $A(\alpha)$ также имеет простое нулевое СЗ, а соответствующая ему СФ $e_k(x) = \cos kx$. При этом для собственных значений $\lambda_n$ при $n < k$ справедливы неравенства $\lambda_n > 0$, но $\lambda_m < 0$ при $m > n$.

Пусть теперь $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ $(\gamma \in R)$, то $\lambda_k(\varepsilon) = \gamma\varepsilon k^2$, и если $\varepsilon$ – достаточно малая положительная постоянная и $\lambda_n(\varepsilon) > \lambda_k(\varepsilon)$ при $n < k$ $(n \in N)$ и $\lambda_m(\varepsilon) < 0$, если $m > k$. При этом $\lambda_m(\varepsilon) \to -\infty$, если $m \to \infty$.

Как и в случае анализа КЗ (14), (15), при $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ КЗ имеет одномерное инвариантное многообразие $M_1(\alpha, k, \varepsilon)$. Оно притягивающее, если $k = 1$ и седловое при $k \in N$ и отличное от 1. Решения на нем восстанавливаются после анализа скалярного дифференциального уравнения (НФ)

$$\dot{y} = \varepsilon F(y, \alpha, k, \varepsilon). \tag{22}$$

Особую роль, как и ранее, играет укороченный вариант НФ (22)

$$\dot{y} = \varepsilon F_0(y, \alpha, k) = \varepsilon F(y, \alpha, k, 0). \tag{23}$$

Для восстановления структуры правой части НФ (23) можно и удобно использовать алгоритм, который был уже два раза применен ранее (в §2 и при анализе КЗ (14), (15)) при соответствующем выборе бифуркационного параметра. Ниже аналогичную роль играет уже не $a$, а $a(\alpha)$. Пусть

$$a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \gamma \in R.$$

Решения КЗ (19), (20) при таком выборе $a(\alpha)$, принадлежащие одномерному инвариан-тному многообразию $M_1(\alpha, k, \varepsilon)$, будем искать как и в предыдущих разделах в виде

$$v(t, x, \varepsilon, k) = \varepsilon^{1/2}v_1(t, x, k) + \varepsilon v_2(t, x, k) + \varepsilon^{3/2}v_3(t, x, k) + O(\varepsilon^2). \tag{24}$$

При этом, $v_1(t,x,k) = y(t)\cos kx, y(t) = y(t,\alpha,k)$ решение НФ (23). Наконец для достаточно гладких функций $v_2(t,x,k), v_3(t,x,k)$ выполнены следующие свойства:

1) при фиксированном t и выбранном k каждая из этих функций принадлежит прост-ранству $W_2^4[0,\pi]$;

2) удовлетворяет краевым условиям (20);

3) для них справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} v_j(t,x,k)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v_j(t,x,k)\cos kx\, dx = 0\ (j = 2,3).$$

Подстановка суммы (24) в КЗ (19), (20) при $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ и выделение слагаемых при $\varepsilon$ и $\varepsilon^{3/2}$ как и ранее приводит к двум линейным неоднородным КЗ для определения $v_j == v_j(t,x,k), j = 2,3$:

$$v_{2t} = A_k(\alpha)v_2 + 3\alpha(v_1)_{xx},$$

$$v_{2x}(t,0) = v_{2x}(t,\pi) = v_{2xxx}(t,0) = v_{2xxx}(t,\pi) = 0,$$

$$v_{3t} = A_k(\alpha)v_3 - F_0(y)\cos kx + \gamma y\cos kx + 6\alpha(v_1v_2)_{xx} - (v_1^3)_{xx},$$

$$v_{3x}(t,0) = v_{3x}(t,\pi) = v_{3xxx}(t,0) = v_{3xxx}(t,\pi) = 0,$$

Их анализ с привлечением условий разрешимости позволяют найти $F_0(y), v_2(t,x,k)$, $v_3(t,x,k)$. Оказалось, что

$$v_2(t,x,k) = \eta_2 y^2\cos 2kx, v_3(t,x,k) = \eta_3 y^3\cos 3kx,$$

$$F_0(y,k) = k^2 y\left[\gamma - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{k^2}\right)y^2\right], \eta_2 = -\frac{\alpha}{2k^2}, \eta_3 = \frac{1}{32k^2}\left(\frac{6\alpha^2}{k^2} - 1\right).$$

где $y = y(t,\alpha,k)$ – решение НФ (23).

**Замечание 2.** При анализе КЗ (14), (15) получали, что $u_2 = 0$, так как в ней отсутствуют квадратичные слагаемые. Естественно, что в нашем последнем случае это не так и поэтому при $\alpha \neq 0$ получаем $v_2 \neq 0$.

Приступим сначала к анализу НФ (23), т.е. к дифференциальному уравнению

$$\dot{y} = k^2 y[\gamma - dy^2], \quad (25)$$

где $d = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{k^2}\right)$.

**Лемма**. *Дифференциальное уравнение (25) имеет два ненулевых состояния равновесия* $S_{\pm}(k)$: $y = \pm\sqrt{\gamma/d}$, *если* $\gamma d > 0$. *Они оба асимптотически устойчивы, если* $d > 0$ $(\gamma > 0)$ *и неустойчивы при* $d < 0$ $(\gamma < 0)$.

Из этой леммы вытекает справедливость утверждения [Куликов, 1976, 1991; Marsden, 1976; Kolesov, 2003]:

**Теорема 3.** *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$ $(\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k,\alpha))$, *что при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *состояниям равновесия* $S_{\pm}(k)$ *соответствуют состояния равновесия* $E_{\pm}(k,\alpha)$ *КЗ (19), (20) при* $a(\alpha) = k^2 + \gamma\varepsilon$ $(\gamma \in R, \gamma \neq 0)$ *для которых справедлива асимптотическая формула*

$$v_{\pm}(x,\varepsilon,k) = \varepsilon^{1/2}\xi\,\eta_2 cos\,kx + \varepsilon\xi^2\,cos2\,kx + \varepsilon^{3/2}\xi^3\eta_3\,cos\,3kx + O(\varepsilon^2), \xi = \pm\sqrt{\gamma/d}.$$

*Данные состояния равновесия $E_{\pm}(k,\alpha)$ наследуют устойчивость состояний равновесия НФ (25), если $k = 1$. При остальных натуральных $k$ они заведомо седловые (неустойчивы).*

Наконец, при таких вариантах выбора параметра $a(\alpha)$ $(a(\alpha) > 1)$ нулевое решение КЗ (19), (20) неустойчиво.

**Замечание 3.** Все выводы получены при $\mathrm{d} \neq 0$. При $\mathrm{d} = 0$ необходим дополнительный анализ КЗ. Наконец, если $\gamma = 0$ и $\mathrm{d} > 0$, то нулевое решение НФ очевидно асимптотически устойчиво и напротив, оно неустойчиво при $\mathrm{d} < 0$, т.е. при $a(\alpha) = 1$ нулевое решение вспомогательной КЗ (19), (20) также асимптотически устойчиво, как и при $a(\alpha) < 1$. Добавим, что при $\gamma = 0$ и $\mathrm{d} < 0$ асимптотическая устойчивость нулевого решения элементарно проверяется простым интегрированием соответствующего скалярного дифференциального уравнения первого порядка.

Приступим теперь к перенесению полученных результатов для вспомогательной КЗ (19), (20) на основную КЗ (16), (17).

Пусть $a$ и $\alpha$ выбраны таким образом, что

$$a - 3\alpha^2 - \mathrm{k}^2 = \gamma\varepsilon$$

при некотором k. Тогда КЗ (16), (17) имеет два пространственно неоднородных решения $\mathrm{SE}_{\pm}(\alpha,\mathrm{k})$, соответствующих $\mathrm{E}_{\pm}(\alpha,\mathrm{k})$, если, конечно, $\varepsilon \in \big(0,\varepsilon_0(\mathrm{k})\big)$. Для решений, формирующих $\mathrm{SE}_{\pm}(\alpha,\mathrm{k})$, справедливы асимптотические формулы (см. теорему 3):

$$\mathrm{u}_{\pm}(\mathrm{x},\varepsilon,\alpha,\mathrm{k}) = \alpha + \mathrm{v}_{\pm}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{k}).$$

Эти два состояния равновесия устойчивы, если состояния равновесия $\mathrm{E}_{\pm}(\alpha,\mathrm{k})$ асимптотически устойчивы и неустойчивы в остальных случаях. Подчеркнем, что состояния равновесия $\mathrm{SE}_{\pm}(\alpha,\mathrm{k})$ в принципе не могут быть асимптотически устойчивы, так как в окрестности любого из них есть также состояние равновесия, соответствующее иному $\alpha$ $(\alpha = \alpha_1)$, если $|\alpha - \alpha_1| \ll 1$, т.е. $a - 3\alpha^2 = \mathrm{k}^2 + \gamma\varepsilon$, а $a - 3\alpha_1^2 = \mathrm{k}^2 + \gamma\varepsilon_1$, где $\varepsilon,\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$.

Отметим некоторые важные моменты результатов анализа КЗ (16), (17).

Пусть $a \in (\mathrm{m}^2,(\mathrm{m}+1)^2)$, где $\mathrm{m} \in \mathrm{N}$. Тогда КЗ (16), (17) имеет 2m однопараметрических семейств пространственно неоднородных решений. Действительно, выберем $\alpha$ таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$a - 3\alpha^2 = \mathrm{k}^2 + \gamma\varepsilon$$

при некотором $\mathrm{k} \leq \mathrm{m},\gamma,\varepsilon,\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Ясно, что выбор соответствующих $\alpha$ возможен:

$$\alpha = \alpha_{\pm}(\mathrm{k},\varepsilon) = \pm\sqrt{\frac{a-\mathrm{k}^2-\gamma\varepsilon}{3}}. \tag{26}$$

Как уже отмечалось ранее, в таком случае КЗ (16), (17) имеет состояния равновесия $\mathrm{SE}_{\pm}(\alpha(\mathrm{k},\varepsilon),\mathrm{k})$, определяемые формулой

$$\mathrm{u}_{\pm}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{k},\alpha) = \alpha + \mathrm{v}_{\pm}(\mathrm{x},\varepsilon,k),$$

где $\alpha$ выбрано по одной из версий формулы (26), т.е. $\alpha = \alpha(\mathrm{k},\varepsilon)$. Решения, формирующие такие семейства (инвариантные многообразия) состояний равновесия, как правило, неустойчивы. Они могут быть устойчивыми, если $\mathrm{k} = 1$ и дополнительно $\alpha(\mathrm{k},\varepsilon) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Анализ последнего включения показал, что оно возможно лишь при $a \in \left(1;\frac{5}{2}\right)$.

При $a < \frac{5}{2}$ справедливо неравенство $\mathrm{d} > 0$. В свою очередь, НФ (25) лишь при $d > 0$ может иметь асимптотически устойчивые ненулевые состояния равновесия, т.е. с необходимостью

$$\frac{1}{2} - \alpha^2 > 0$$

и, следовательно, $\frac{a-1}{3} < \frac{1}{2}$.

При $\mathrm{k} = 2,3,4, \ldots$ неустойчивость соответствующих состояний равновесия очевидна, так как ЛДО $A_k(\alpha)$ в таком случае имеет СЗ в правой полуплоскости комплексной плоскости.

## 4. Заключение

Рассмотрены две КЗ для традиционной версии уравнения Кана-Хиллиарда [Cahn, 1985; Temam, 1997]. В первой из них, задаче Дирихле, реализуются достаточно стандартные локальные бифуркации типа «вилка». При $a \approx k^2$ $(k = 1,2,\cdots)$ рождается пара пространственно неоднородных решений. В прикладной терминологии реализуется один из вариантов бифуркации Тьюринга-Пригожина. Иная ситуация возникает при анализе этого уравнения вместе с однородными краевыми условиями Неймана. В такой КЗ, которая наиболее типична для математических задач химической кинетики, бифурцируют уже однопараметрические семейства пространственно неоднородных решений. При этом такие бифуркации возможны при любом из значений $a \in (1, \infty)$, т.е. необязательно при $a \approx k^2$ как в задаче Дирихле.

Добавим, что при каждом $a \in (1, \frac{5}{2})$ появляются устойчивые пространственно неоднородные состояния равновесия, т.е. физически реализуемые диссипативные структуры.

Отметим, что полученный результат основан на использовании строгих математических методов теории бесконечномерных динамических систем без применения традиционных приемов изучения такого типа задач, как метод Галеркина (Фуэдо-Галеркина) или, конечно, разностных методов с последующим численным анализом. Более того, полученные результаты характерны скорее для бесконечномерных динамических систем и, по-видимому, не имеют аналогов, кроме, быть может, очень искусственных примеров, при изучении локальных бифуркаций для конечномерных динамических систем.

Отметим также, что в данной работе была изучена основная версия уравнения Кана-Хиллиарда, когда химический потенциал выбирался следующим образом:

$$F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + \frac{u^4}{4}.$$

В приложениях к гидродинамике [Пухначев, 1985, с.1224; Frolovskaya, 2013, с. 49; Frolovskaya, 2013, с. 330] было предложено выбрать $F(u)$ иначе:

$$F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + b\frac{u^3}{3}, a, b \in R.$$

Наконец, предложено считать [Mchedelov-Petrosyan, 2013, с. 90], что

$$F(u) = -\frac{a}{2}u^2 + b\frac{u^3}{3} + c\frac{u^4}{4}, a, b, c \in R.$$

Такие варианты выбора потенциала, конечно, заслуживают отдельного изучения, но большинство результатов с небольшими изменениями сохраняются.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.*

## Список литературы
## References

1. Куликов А.Н. 1976. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нели-нейных операторов в банаховом пространстве. Межвуз. темат. сборник "Исследование по устойчивости и теории колебаний": 114-129.

Kulikov A.N. 1976. O gladkich invariantnych mnogoobraziyach polugruppy nelineynich operatorov v banachovom prostranstve [On smooth invariant manifolds of a semigroup of nonlinear operators in a Banach space]. Research on stability and oscillation theory: 114-129. (in Russian).

2. Куликов А.Н. 1991. Инерциальные многообразия нелинейных автоколебаний дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Препринт № 85 института прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва, 22.

Kulikov A.N. 1991. Inertsialnye mnogoobraziya nelineynich avtokolebaniy differentsialnych uravneniy v gilbertovom prostranstve [Inertial manifolds of nonlinear self-oscillations of differential equations in a Hilbert space]. Preprint № 85 of institute of M. V. Keldysh applied mathematics, Moscow, 22. (in Russian)

3. Куликов А.Н., Куликов Д.А. 2014. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского. Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», 3(4): 408-415.

Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2014. Bifurkatsiyi prostranstvenno neodnorodnych recheniy v dvuch kraevich zadachach dlya obochennogo uravneniya Kuramoto-Sivashinskiy [Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions in Two Boundary Value Problems for the Generalized Kuramoto–Sivashinsky Equation]. Bulletin of the National Nuclear Research University «MIFI», 3(4): 408-415. (in Russian)

4. Пухначев В.В. 1985. Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной границей. Труды института теплофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Изд-во Сибирского отделения РАН: 119-127.

Pukhnachev V.V. 1985. Gidrodinamica i teploobmen techeniy gidkosti so svobodnoy granitsey [Hydrodynamics and heat transfer of fluid with a free boundary]. Institute proceedings of the Institute of Thermal Physics of the Siberian Branch RAN: 119-127.

5. Фунциональный анализ. 1972. Справочная библиотека. М., Наука, 544.

Funktsionalniy analis [Functional analysis. Reference library]. Moscow, Nauka, 544. (in Russian).

6. Alikatos N., Bates P.W., Fusco G. 1991. Slow Motion for the Cahn-Hilliard Equation in One Space Dimension . Journal of Differ. Equation, 90 (1): 81–135.

7. Cahn J.W., Hilliard J.E. 1958. Free energy of a Non-Uniform system. J. Chem. Phys., 28 (2): 258-267.

8. Frolovskaya O.A., Pukhnachev V.V. 2013. Stationary solutions of quadratic Cahn-Hilliard equation and their stability. AIP Conference Proceedings, 1561 (1): 47-52.

9. Frolovskaya O.A., Admaev O.V., Pukhnachev V.V. 2013. Special case of the Cahn-Hilliard equation. Siberian Electronic Mathematical Report, 10: 324-334.

10. Kolesov A. Yu, Kulikov A.N., N. Kh. Rozov. 2003. Invariant tori of a class of point mappings: the annulus principle. Differential equations, 39(5): 614-631.

11. Kolesov A. Yu, Kulikov A.N., N. Kh. Rozov. 2003. Invariant tori of a class of point transformations: preservation of an invariant torus under perturbations. Differential equations, 39(6): 775-790.

12. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2012. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 52(5): 930-945.

13. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2015. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics. Journal of Mathematical Sciences, 208 (2): 211-221.

14. Kulikov A., Kulikov D. 2015. Bifurcation in Kuramoto-Sivashinsky equation. Pliska Studia Mathematica, 25: 101-110.

15. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2016. Spatially inhomogeneous solutions for a modified Kuramoto-Sivashinsky equation. Journal of Mathematical Sciences, 219 (2): 173-183.

16. Kulikov A.N., Kulikov D.A. 2017. Local bifurcations in the periodic boundary value problem for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. Automation and Remote Control, 78 (11): 1955-1966.

17. Mchedlov-Petrosyan P.O., Kopiychenko D. Yu. 2013. Exact solutions for some modifications of the nonlinear Cahn-Hilliard equation. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 12: 88-93.

18. Marsden J.E., McCraken M. 1976. The Hopf Bifurcations and its Applications. Springer-Verlag, 331.

19. Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. 1985. Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors. Physica D, 16 (2): 155-183.

20. Nicolis G., Prigogine I. 1977. Self-organizaion in nonequilibrium systems from dissipative structures to order through fluctuations. John Wiley & Sons, 491.

21. Pego R.L. 1989. Front Migration in the Nonlinear Cahn-Hilliard equation. Proceedings of the Royal Society of London. A, 422: 261-278.

22. Temam R. 1997. Infinite - Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Second edition. N.-Y.,Springer-Verlag. 1997, 673.