



УДК 534.014.2

DOI 10.18413/2075-4639-2019-51-1-88-95

РАЗНОВИДНОСТИ РЕЗОНАНСОВ В МЕХАНИКЕ**VARIETY OF RESONANCES IN MECHANICS****И.П. Попов****I.P. Popov**

Курганский государственный университет,
Россия, 640020, г. Курган, ул. Советская, 63/4

Kurgan state university,
63/4 Sovetskaja St, Kurgan, 640020, Russia

E-mail: ip.popov@yandex.ru

Аннотация

Даны определения механических резонансов сил и скоростей. Определение 1. Резонанс сил – это механический резонанс, возникающий на частоте ω в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны. Определение 2. Резонанс скоростей – это механический резонанс, возникающий на частоте ω в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны. Доказаны две теоремы. Теорема 1. При выполнении условия $\omega < \omega_0$ в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера возникает резонанс сил. Теорема 2. При выполнении условия $\omega > \omega_0$ в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера возникает резонанс скоростей. Классический механический резонанс является резонансом сил.

Abstract

The definitions of mechanical resonances of forces and speeds are given. Definition 1. Mechanical resonance of forces is a mechanical resonance that occurs at a frequency ω in a mechanical system, including an inert body and an elastic element, at which the reactive forces developed by them are maximal and opposite. Definition 2. Mechanical speed resonance is a mechanical resonance that occurs at a frequency ω in a mechanical system, including an inert body and an elastic element, at which the speeds developed by them are maximum and opposite. Two theorems are proved. Theorem 1. When the condition $\omega < \omega_0$ is fulfilled in a mechanical system consisting of a parallel-connected inert body, an elastic element and a damper, a mechanical resonance of forces occurs. Theorem 2. When the condition $\omega > \omega_0$ is fulfilled in a mechanical system consisting of a series-connected inert body, an elastic element and a damper, a mechanical velocity resonance occurs. Classic mechanical resonance is a resonance of forces. It corresponds to a parallel connection of an inert body, an elastic element and a damper. When these elements are connected in series, a mechanical velocity resonance occurs. The resonance speeds mistaken for "antiresonance".

Ключевые слова: резонанс сил, скоростей, параллельное соединение, последовательное, источник силы, скорости.

Key words: resonance of forces, velocities, parallel connection, series, source of force, speed.

Введение

Широко известное дифференциальное уравнение [Архипов, 2011, с. 1383–1393; Аттаев, 2014, с. 17-19; Воронцов, 1988, с. 374-376; Геккиева, 2016, с. 32-35; Камке, 1965, с.



324; Олейник, 2010, с. 219; Разгулин, 1993, с. 69-80; Соболев, 1962, с. 117; Bernard, 2001, с. 233–256; Gil, 2011, с. 11–19; Lyons, 1998, с. 215–310; Selitskii, 2016, с. 85–91; Walther, 2003, с. 46–65]

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = a_\omega \sin \omega t \quad (1)$$

имеет решение $x = x_1 + x_2$, где

$$x_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (2)$$

– собственные затухающие колебания,

$$x_2 = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

– вынужденные колебания, a, α – постоянные интегрирования,

$$b = \frac{a_1}{2a_2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad h = \frac{b}{\omega_0}, \quad \delta_0 = \frac{a_\omega}{a_0}. \quad (5)$$

При подстановках

$$a_2 = m, \quad a_1 = r, \quad a_0 = k, \quad a_\omega = F \quad (6)$$

уравнение (1) превращается в классическое дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний [Канунникова, 2014, с. 192–193]:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t \quad \text{или} \quad m \frac{dv}{dt} + rv + k \int v dt = F \sin \omega t. \quad (7)$$

При

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

имеет место резонанс.

Теоретическая электротехника, объекты и процессы которой математически изоморфны механическим, различает два резонанса – резонанс напряжений и резонанс токов.

В 1873 г. Максвелл ввел первую (из двух) систему электро-механических аналогий, в соответствии с которой напряжение дуально силе, а ток – скорости. В этой связи возникает закономерный вопрос: резонанс применительно к уравнению (7) – это резонанс сил или скоростей? Ответ на этот и связанные с ним вопросы составляет предмет настоящего исследования.

Определение 1. Резонанс сил – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны.

Определение 2. Резонанс скоростей – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны.

Замечание. Сила F и скорость v – это векторные величины. Вместе с тем резонансные явления, как правило, рассматривают в одномерной системе координат, которая является вполне достаточной и для настоящего исследования. Поэтому далее векторная символика не применяется.

Резонанс сил

Уравнению (7) соответствует схема параллельного соединения (рис. 1), при котором инертное тело и изменения размеров упругого элемента и демпфера имеют единую скорость, а их реактивные силы складываются. При этом сумма реактивных сил потребителей механической мощности равна силе, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику напряжения в электротехнике можно назвать источником силы.

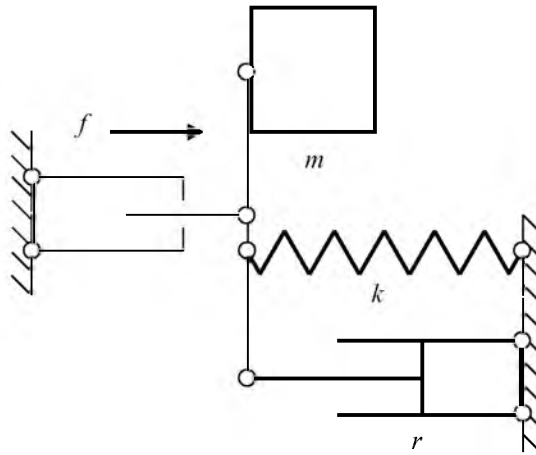


Рис. 1. Параллельное соединение

Fig. 1. Parallel connection

Справедлива

Теорема 1. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (7), возникает резонанс сил.

Доказательство. В соответствии с (4)–(6)

$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + 4\frac{r^2 m}{4m^2 k} \frac{m\omega^2}{k}}} = \frac{F}{k} \frac{1}{\omega/k \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}}.$$

В установившемся режиме

$$x = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$f_k = kx = \frac{kF}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

$$f_m = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m\omega^2 F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi).. \quad (10)$$

При выполнении условия (8)



$$f_k^* = \frac{kF}{\sqrt{k/m} \sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{\sqrt{mk}F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (11)$$

$$= \frac{\sqrt{k/m} \sqrt{mk}F}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{kF}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (12)$$

$$f_m^* = -\frac{m\sqrt{k/m}F}{\sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\sqrt{mk}F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (13)$$

$$= -\frac{\omega \sqrt{mk}F}{\sqrt{k/mr}} \sin(\omega t - \varphi) = -\frac{\omega mF}{r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (14)$$

Выражения (11) и (13) показывают, что f_k^* и f_m^* равны и противоположны. Выражения (9) и (12), (10) и (14) показывают, что f_k^* и f_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. В первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие – последовательное соединение потребителей электрической мощности при резонансе напряжений дуально параллельному соединению потребителей механической мощности при резонансе сил.

Следствие 1.2. При резонансе сил реактивная сила системы упругий элемент – инертное тело равна нулю, поскольку $f_k^* = -f_m^*$.

Величину \sqrt{mk} по аналогии с электротехникой можно назвать *волновым сопротивлением* (системы).

Следствие 1.3. Если $\sqrt{mk} > r$, то реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Пример 1. $F = 100$ Н, $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 40$ кг·с⁻², $r = 5$ кг·с⁻¹. Найти f_k^* и f_m^* .

В соответствии с (12) и (14)

$$f_k^* = \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 5} \sin(\omega t - \varphi) = 400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)},$$

$$f_m^* = -\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{5} \sin(\omega t - \varphi) = -400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)}.$$

Реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Последовательное соединение

Инертное тело, упругий элемент и демпфер можно соединять не только параллельно, но и последовательно (рис. 2).

При последовательном соединении к элементам системы приложена единая сила, а скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера складываются.

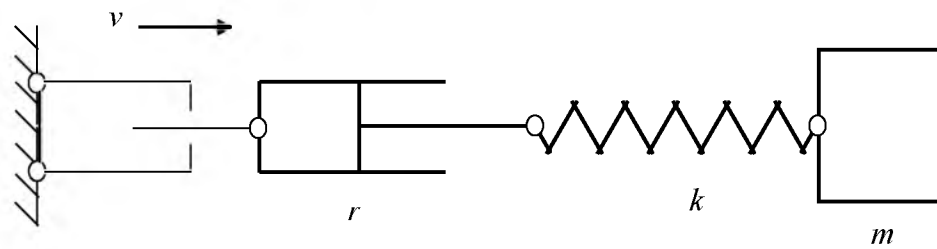


Рис. 2. Последовательное соединение

Fig. 2. Consecutive connection

При этом сумма скоростей потребителей механической мощности равна скорости, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику тока в электротехнике можно назвать источником скорости.

Скорости компонентов системы равны

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt, \quad v_k = -\frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}, \quad v_r = \frac{f}{r}, \quad v = -V \cos \omega t.$$

$$v_m + v_k + v_r = v,$$

$$\frac{1}{k} \frac{df}{dt} + \frac{f}{r} + \frac{1}{m} \int f dt = -V \cos \omega t \quad \text{или} \quad \frac{1}{k} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dt} + \frac{1}{m} f = V \omega \sin \omega t.$$

(15)

Последнее уравнение изоморфно (1). Собственные затухающие колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (2) определяются выражением

$$f_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) = ae^{-\frac{k}{2r}t} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k^2}{4r^2}}t + \alpha\right).$$

Вынужденные колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (3) определяются выражениями

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}} = \frac{V\omega m}{\sqrt{\left(1-\omega^2 \frac{m}{k}\right)^2 + 4\frac{k^2}{4r^2} \frac{m}{k} \omega^2 \frac{m}{k}}} = \frac{V\omega m}{\omega m \sqrt{\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2} = 2 \frac{k}{2r} \frac{\omega m}{k} \frac{1}{1-\omega^2 m/k} = \frac{\omega m}{r\omega m(1/\omega m - \omega/k)},$$

$$f_2 = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V}{\sqrt{\left[1/(\omega m) - \omega/k\right]^2 + 1/r^2}} \sin\left[\omega t - \operatorname{arctg} \frac{1}{r(1/\omega m - \omega/k)}\right].$$

Резонанс скоростей

Справедлива

Теорема 2. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (15), возникает резонанс скоростей.

Доказательство. В установившемся режиме

$$f = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$v_m^* = \frac{1}{m} \int f dt = -\frac{1}{\omega m} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (16)$$

$$v_k^* = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi). \quad (17)$$

При выполнении условия (8)

$$v_m^* = -\frac{1}{\sqrt{k/mm}} \frac{V}{\sqrt{[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m}/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (18)$$

$$= -\frac{\sqrt{k/m} Vr}{\omega \sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{Vr}{\omega m} \cos(\omega t - \varphi). \quad (19)$$

$$v_k^* = \frac{\sqrt{k/m}}{k} \frac{V}{\sqrt{[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m}/k]^2 + 1/r^2}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (20)$$

$$= \frac{\omega Vr}{\sqrt{k/m} \sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{\omega Vr}{k} \cos(\omega t - \varphi). \quad (21)$$

Выражения (18) и (20) показывают, что v_k^* и v_m^* равны и противоположны.

Выражения (16) и (19), (17) и (21) показывают, что v_k^* и v_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 2.1. В первую (максвелловскую) систему электро-механических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие: параллельное соединение потребителей электрической мощности при резонансе токов дуально последовательному соединению потребителей механической мощности при резонансе скоростей.

Следствие 2.2. При резонансе скоростей точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, поскольку $v_k^* = -v_m^*$.

Следствие 2.3. Если $\sqrt{mk} < r$, то скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Пример 2. $V = 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $r = 80 \text{ кг}\cdot\text{с}^{-1}$, остальные данные из примера 1. Найти v_k^* и v_m^* .

В соответствии с (19) и (21)

$$v_m^* = -\frac{10 \cdot 80}{2 \cdot 10} \cos(\omega t - \varphi) = -40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м}\cdot\text{с}^{-1}\text{)},$$

$$v_k^* = \frac{2 \cdot 10 \cdot 80}{40} \cos(\omega t - \varphi) = 40 \cos(\omega t - \varphi) \text{ (м}\cdot\text{с}^{-1}\text{)}.$$

Скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.



Артефакты

Существуют устройства, способные в удовлетворительном приближении выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания. В [Пановко, 1987, с. 236] описана механическая система из двух инертных тел и двух упругих элементов, для которой обнаружено «удивительное явление», при котором точка приложения гармонической силы остается неподвижной. Это явление, казалось бы, очевидным образом названо антирезонансом. Степень неудачности этого термина можно оценить, применив его к резонансу токов в электротехнике. В действительности упомянутая система представляет собой суперпозицию «элементарных» систем, рассмотренных выше. По этой причине процессы, происходящие в ней, являются суперпозицией соответствующих процессов, одним из которых и был резонанс скоростей, ошибочно принятый за «антирезонанс». При этом неподвижность точки приложения гармонической силы («удивительное явление») соответствует следствию 2.2.

Заключение

Описываемый в курсах теоретической механики механический резонанс является резонансом сил. Ему соответствует параллельное соединение инертного тела, упругого элемента и демпфера. При последовательном соединении этих элементов возникает резонанс скоростей, ошибочно принимаемый за «антирезонанс».

Существование двух механических резонансов естественным образом соответствует аналогиям между электрическими и механическими явлениями и объектами. Механическому резонансу сил соответствует резонанс напряжений в электротехнике, а резонансу скоростей – резонанс токов. Подобно тому, как оба электрических резонанса примерно в равной мере встречаются в электротехнике, отдать приоритет какому-либо из двух механических резонансов также затруднительно. При резонансе сил реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, могут значительно превышать приложенную силу. В то же время реактивные силы нейтрализуют друг друга, что может быть использовано в специальных устройствах самокомпенсации реактивной мощности, например, для повышения качества тока питающей сети. При резонансе скоростей скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, могут значительно превышать скорость штока источника воздействия. При этом точка приложения силы к системе упругий элемент – инертное тело неподвижна, что используется для разработки гасителей колебаний.

Список литературы References

1. Архипов В.П. 2011. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. Дифференц. уравнения, 47(10): 1383–1393.
Arkhipov V.P. 2011. Linejnye differencial'nye uravneniya vtorogo poryadka s vyrozhdajushchimsya koehfficientom pri staršej proizvodnoj [Linear Second-Order Differential Equations with Degenerating Coefficient of the Second Derivative]. Differential Equations, 47(10): 1383–1393 (in Russian).
2. Аттаев А.Х. 2014. Краевые задачи с внутреннекраевым смещением для уравнения колебания струны. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 16(2): 17-19.
Attaev A.Kh. 2014. Kraevye zadachi s vnutrennekravym smeshcheniem dlya uravneniya kolebaniya struny [A boundary value problems with inner shift for the string equation]. Reports Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 16(2): 17-19 (in Russian).



3. Воронцов М.А., Думаревский Ю.Д., Пруидзе Д.В., Шмальгаузен В.И. 1988. Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью. Изв. АН СССР. Физика, 52(2): 374-376.

Voroncov M.A., Dumarevskii Yu.D., Pruidze D.V. Shmalgauzen V.I. 1988. Avtovolnovyye processy v sistemah s opticheskoy obratnoy svyaz'yu [Avtovolnovyye processy v sistemah s opticheskoy obratnoy svyaz'yu]. Izv. AN SSSR. Fizika, 52(2): 374-376 (in Russian).

4. Геккиева С.Х. 2016. Смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика, № 6(227), вып. 42: 32-35.

Gekkieva S.Kh. 2016. Smeshannyye kraevyye zadachi dlya nagruzhennogo diffuzionno- volnovogo uravneniya [Mixed boundary value problems for the loaded diffusion-wave equation]. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, №6(227), Iss. 42: 32-35 (in Russian).

5. Камке Э. 1965. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука: 703.

Kamke E. 1965. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow: Nauka (in Russian).

6. Канунникова Е.А. 2014. Об одном подходе к решению внешних краевых задач для уравнений колебаний. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. № 19(190), выпуск 36: 192–193.

Kanunnikova E.A. 2014. Ob odnom podhode k resheniyu vneshnih kraevykh zadach dlya uravnenij kolebaniy [An approach to solution of the external boundary value problems of wave equation]. Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika [Scientific statements Belgorod State University. Mathematics. Physics]. № 19(190), 36: 192–193. (In Russian)

7. Олейник О.А., Радкевич Е.В. 2010. Уравнения с неотрицательной характеристической формой, МГУ, Москва, 624.

Oleinic O.A., Radkevich E.V. 2010. Uravneniya s neotricatel'noj harakteristicheskoy formoj [Equations with nonnegative characteristic form], Moscow State University, Moscow, 624 (in Russian).

8. Пановко Я.Г., Губанова И.И. 1987. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 352.

Panovko YA.G., Gubanova I.I. 1987. Ustojchivost' i kolebaniya uprugih sistem: Sovremennyye koncepcii, paradoksy i oshibki [Stability and oscillations of elastic systems: Modern concepts, paradoxes and errors]. Moscow. Nauka Publ., 352 (In Russian)

9. Разгулин А.В. 1993. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом. Журнал вычислительной математики и математической физики, 33(1): 69-80.

Razgulin A.V. 1993. Ob avtokolebaniyah v nelineinoi parabolicheskoi zadache s preobrazovannim argumentom [On self-oscillations in a nonlinear parabolic problem with a transformed argument]. Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 33(1): 69-80 (in Russian).

10. Соболев С.Л. 1962. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 255.

Sobolev S.L. 1962. Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of functional analysis in mathematical Physics], Novosibirsk: Izd-vo SA AN SSSR, 255. (in Russian).

11. Bernard S., Breilair J., Mackey M.C. 2001. Sufficient conditions for stability of linear differential equations with distributed delay. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 1, no. 2: 233–256.

12. Gil' M.I. 2011. Stability of functional differential equations with oscillating coefficients and distributed delays. Differential equations & applications, vol. 3, no. 1: 11–19.

13. Lyons T. 1998. Differential equations driven by rough signals. Revista Matematica Iberoamericana, 14(2): 215–310.

14. Selitskii A.M. 2016. On the solvability of parabolic functional differential equations in Banach spaces. Eurasian Math. J., 7(4): 85–91.

15. Walther H.-O. 2003. The solution manifold and C1-smoothness for differential equations with state-dependent delay. J. Differential Equations, vol. 195: 46–65.