

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ COMPUTER SIMULATION HISTORY

УДК 621.397

DOI 10.18413/2411-3808-2018-45-4-698-708

АППРОКСИМАЦИЯ ДОЛЕЙ ЭНЕРГИИ ФРАГМЕНТА ЗВУКОВОГО СИГНАЛА СМЕСЬЮ РАДИАЛЬНО-БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

APPROXIMATION OF FRACTIONAL OF ENERGY FOR SOUND SIGNAL FRAGMENT BY MIXTURE OF RADIAL-BASIS FUNCTIONS

С.В. Уманец

S.V. Umanets

Белгородский филиал ПАО «Ростелеком»,
Россия, 308000, Белгород, пр. Б. Хмельницкого, 81

Belgorod branch of Public Stock Company «Rostelekom»,
81 B. Khmelnitskogo Av., Belgorod, 308000, Russia

E-mail: 286084@bsu.edu.ru

Аннотация

Рассмотрен алгоритм обработки цифрового речевого сигнала. Отрезок речевого сигнала в частотной области представляется в виде долей энергии. Доли энергии рассматриваются как функция от номера частотного интервала в качестве аргумента. Формулируется задача подобрать для функции долей энергии эквивалент в виде взвешенной суммы радиально-базисных функций. Для оценки меры близости между исходной функцией и подбираемой смесью составлен функционал в виде суммы квадратов разностей. На весовые коэффициенты накладывается дополнительное ограничение, учитывающее физическую реализуемость. Параметры радиально-базисных функций и весовые коэффициенты подбирались методом сопряжённых градиентов. Выявлено, что точность аппроксимации сильно зависит от начальных значений подбираемых параметров. Предложен алгоритм для задания начального приближения, который повысил точность.

Abstract

The algorithm of digital speech signal processing is considered. The segment of the speech signal in the frequency domain is represented as fractions of energy. The fractions of energy are considered as a function from of frequency interval numbers as an argument. The problem of choosing an equivalent for function of the fractions of energy in the form of a weighted sum of radial basis functions is formulated. To estimate the measure of proximity between the initial function and the selected mixture, a functional in the form of a sum of squared differences is composed. The weight coefficients are subject to an additional restriction, taking into account the physical feasibility. Parameters of radial basis functions and weight coefficients were selected by the method of conjugate gradients. It was found that the accuracy of the approximation strongly depends on the initial values of the selected parameters. An algorithm for specifying the initial approximation, which increased the accuracy, is proposed.

Ключевые слова: доли энергии, метод сопряжённых градиентов, смесь радиально-базисных функций, смесь Гауссовых функций.

Keywords: fraction of energy, the method of conjugate gradients, a mixture of radial-basis functions, a mixture of Gaussian functions.

Введение

Одной из востребованных задач по распознаванию является построение систем голосового управления. Для успешного распознавания необходим набор признаков. Выбор признаков для описания объектов является одной из центральных задач распознавания образов. При удачном выборе исходного описания, то есть пространства признаков, задача распознавания может оказаться тривиальной, а если неудачно выбрать признаки, то дальнейшая переработка информации может оказаться очень сложной или вообще может отсутствовать решение. Ориентируясь на модели строения слухового аппарата человека [Вологдин, 2004; Алдошина, 2010], необходимо анализировать энергию звука в зависимости от частотного интервала. Речевой сигнал является нестационарным, поэтому анализ отрезков сигнала даёт большую изменчивость частотных характеристик от отрезка к отрезку. Один из способов идеализировать измерения – это сопоставить результаты наблюдения функции из определённого класса с точностью до некоторого параметра [Шлезингер, Главач, 2003]. Оценка параметров позволит судить о наблюдаемых данных. Для энергетических характеристик звука представляется целесообразным применить в качестве обобщающей функции смесь радиально-базисных функций или Гауссовых функций. В данной работе будет рассмотрена аппроксимация долей энергии фрагмента сигнала [Болдышев, Фирсова, 2011] набором нормированных радиально-базисных функций с дополнительной компонентой в виде равномерного распределения.

Постановка задачи

Фрагмент речевого сигнала $x(t)$ после оцифровки [Солонина, Улахович, 2006] представляет собой вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ (здесь T – знак транспонирования), состоящий из значений сигнала (функция времени), которые соответствуют значениям аргумента $n\Delta t$, т. е.

$$x_n = x(n\Delta t), \quad n = 1, \dots, N, \tag{1}$$

где Δt – интервал дискретизации по времени.

Для этого вектора трансформанта Фурье представляет собой функцию

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^N x_n e^{-j(n-1)\omega}, \quad j = \sqrt{-1}. \tag{2}$$

Областью определения этой функции является нормированная частота

$$-\pi \leq \omega \leq \pi. \tag{3}$$

Имеет место и обратное преобразование

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j(n-1)\omega} d\omega. \tag{4}$$

Отсюда можно получить равенство Парсеваля [Ильин, Садовничий, Сендов, 1985]

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{n=1}^N x_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = \sum_{r=1}^R S_r(x), \tag{5}$$

где величина

$$S_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega \in \Omega_r} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{6}$$

представляет собой часть энергии отрезка сигнала, содержащейся в r -ом частотном интервале:

$$\Omega_r = [-\omega_{2,r}, -\omega_{1,r}) \cup [\omega_{1,r}, \omega_{2,r}). \tag{7}$$

Общее количество частотных интервалов равно R .

Разбиение на интервалы должно удовлетворять условию:

$$\omega_{2,r} = \omega_{1,r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, R, \quad \omega_{1,1} = 0, \quad \Omega_R = \bigcup_{r=1}^R \Omega_r = [-\pi, \pi]. \quad (8)$$

Отношение частот энергии отрезка сигнала к полной энергии отрезка сигнала определяет функцию долей энергии сигнала [Жиляков, 2007]:

$$P_r(x) = \frac{S_r(x)}{S_R(x)}, \quad S_R(x) = \sum_{r=1}^R S_r(x). \quad (9)$$

В рассматриваемой задаче функция долей энергии рассматривается как функция от номера частотного интервала при неизменном отрезке сигнала, поэтому аргумент x будет игнорироваться:

$$P_r = P(r). \quad (10)$$

Задача состоит в том, чтобы из K радиально-базисных функций вида

$$B_{r,k} = \frac{e^{-\frac{(r-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sum_{s=1}^R e^{-\frac{(s-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}}; \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad (11)$$

с параметрами

$$1 \leq \mu_k \leq R, \quad 0 < \sigma_k < \infty \quad (12)$$

и свойствами

$$B_{r,k} \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, R; \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad \sum_{r=1}^R B_{r,k} = 1, \quad (13)$$

и равномерно-распределённой составляющей, представленной константой

$$C = \frac{1}{R}, \quad (14)$$

составить новую функцию Q_r от аргумента r как взвешенную сумму

$$Q_r = \sum_{k=1}^K \alpha_k B_{r,k} + \alpha_{K+1} C; \quad (15)$$

где K – это заданное количество компонент, α_k – весовые коэффициенты.

Функция Q_r должна быть близка к функции P_r . Мера близости определяется функционалом

$$F = \sum_{r=1}^R (Q_r - P_r)^2, \quad (16)$$

представляющим собой сумму квадратов разностей между значениями функций P_r и Q_r .

На весовые коэффициенты из (14) накладываются ограничения

$$\alpha_k \geq 0, \quad \alpha_{K+1} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{K+1} \alpha_k = 1. \quad (17)$$

Таким образом, задачей является поиск набора числовых параметров

$$\{\alpha_k^*, \mu_k^*, \sigma_k^*\} = \arg \min_{\{\alpha_k, \mu_k, \sigma_k\}} (F). \quad (18)$$

Чтобы учесть ограничения на весовые коэффициенты (17), есть смысл выразить их через отношения между собой через вспомогательные параметры $\beta_k, k \in [1, K+1]$

$$\alpha_k = \frac{e^{\beta_k}}{1 + \sum_{s=1}^K e^{\beta_s}}; \quad \alpha_{K+1} = \frac{1}{1 + \sum_{s=1}^K e^{\beta_s}}; \quad \beta_{K+1} = 0. \quad (19)$$

В этом случае коэффициенты α_k будут гарантированно удовлетворять ограничениям (17).

Сформулированная задача (18) относится к классу нелинейной оптимизации. Для её решения широко применяются градиентные методы [Fletcher, 1987]. Чтобы составить градиент по параметрам, надо найти частные производные функционала (16) по этим параметрам.

Частные производные имеют вид:

для весовых коэффициентов

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 2 \sum_{r=1}^R (Q_r - P_r) B_{r,k} \tag{20}$$

а для соответствующих вспомогательных параметров

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_k} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \beta_k} = 2 \sum_{r=1}^R (Q_r - P_r) B_{r,k} \left(\frac{e^{\beta_k}}{1 + \sum_{s=1}^K e^{\beta_s}} - \frac{e^{\beta_k}}{\left(1 + \sum_{s=1}^K e^{\beta_s}\right)^2} e^{\beta_k} \right), \tag{21}$$

после упрощения

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_k} = 2 \sum_{r=1}^R (Q_r - P_r) B_{r,k} (\alpha_k - \alpha_k^2); \tag{22}$$

для параметров μ_k, σ_k радиально-базисных функций

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_k} = 2 \sum_{r=1}^R (Q_r - P_r) \alpha_k B_{r,k} \left(\frac{r - \mu_k}{\sigma_k^2} - \frac{\sum_{s=1}^R \frac{s - \mu_k}{\sigma_k^2} e^{-\frac{(s - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sum_{s=1}^R e^{-\frac{(s - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}} \right), \tag{23}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k} = 2 \sum_{r=1}^R (Q_r - P_r) \alpha_k B_{r,k} \left(\frac{(r - \mu_k)^2}{\sigma_k^3} - \frac{\sum_{s=1}^R \frac{(s - \mu_k)^2}{\sigma_k^3} e^{-\frac{(s - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}}{\sum_{s=1}^R e^{-\frac{(s - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}} \right). \tag{24}$$

По методу сопряжённых градиентов [Scales, 1985] параметры подбираются итерационно:

$$\{\alpha_k, \mu_k, \sigma_k\}_{i+1} = \{\alpha_k, \mu_k, \sigma_k\}_i + c \Delta_{i+1}, \tag{25}$$

здесь i – номер итерации, c – постоянная положительная величина, подбираемая эмпирически [Fletcher, 1987], Δ – величина коррекции.

Значения параметров корректируются на величину Δ , умноженную на постоянный множитель. Величина коррекции Δ не постоянна и вычисляется на каждой итерации в зависимости от значения градиента и своего предыдущего значения

$$\Delta_{i+1} = -G_{i+1} + Z \Delta_i; \quad G_{i+1} = \left. \frac{\partial F}{\partial \{\alpha_k, \mu_k, \sigma_k\}} \right|_{i+1}, \tag{26}$$

где G_{i+1} – это значение градиента, Z – это множитель, зависящий от предыдущего значения градиента

$$Z = \frac{(G_{i+1} - G_i) \cdot (G_{i+1})^T}{\|G_{i+1}\|}; \quad \|G_{i+1}\| = (G_{i+1}) \cdot (G_{i+1})^T, \tag{27}$$

здесь T – это знак транспонирования. Если оказывается, что $\|G_{i+1}\| = 0$, то принимается $Z=0$.

Итерации совершаются, пока не выполнится условие останова $i = i_{\max}$ или $(F_{i+1} - F_i) < \varepsilon$, где ε – значение задающее точность.

Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента был взят отрезок речевого сигнала звука «А», произнесенного мужским голосом. Длина отрезка $N=130$, частота дискретизации 8000 Гц , $\Delta t=0.125 \text{ мкс}$. Затем было получено его спектральное представление для $R=100$, используя аппарат субполосных матриц [Жиляков, Белов, Прохоренко, 2007]. После нормирования была получена функция P_r . Для аппроксимации было взято $K=3$, с учётом рекомендаций [Хайкин, 2006]. Константа в алгоритме сопряжённых градиентов (25) взята $c=2$. На рис. 1 результаты вычислений. График $Q_r(0)$ – это начальное приближение, итерация $i=0$. Алгоритм был остановлен через $i=1000$ итераций и результат – это график $Q_r(1000)$. Значения параметров для начального приближения – в табл. 1, значения параметров через $i=1000$ итераций – в табл. 2, точность до второго знака после запятой.

Таблица 1
Table 1

Значения параметров для начального приближения
Value of parameters for initial approach

Параметр	k=1	k=2	k=3	k=K+1
μ_k	10	20	30	
σ_k	3	3	3	
β_k	0.33	0.33	0.33	0
α_k	0.26	0.26	0.26	0.19

Таблица 2
Table 2

Значения параметров через $i=1000$ итераций
Value of parameters after $i=1000$ iterations

Параметр	k=1	k=2	k=3	k=K+1
μ_k	14.86	18.48	29.57	
σ_k	0.61	4.51	2.64	
β_k	1.77	0.77	0.5	0
α_k	0.54	0.2	0.15	0.09

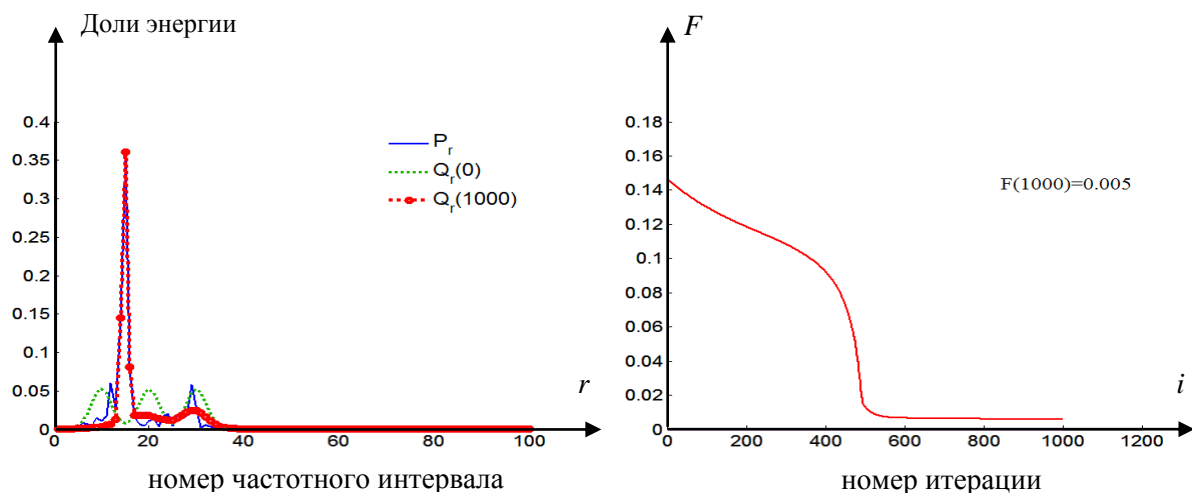


Рис. 1. Графики наблюдаемых долей энергии и их аппроксимации (слева), а также график изменения значения функционала (справа)
 Fig. 1. Plots of the observed fraction of energy and approximates of them (left) and a plot of value behavior of functional (right)

Результат эксперимента выглядит вполне удовлетворительно, однако, как выяснилось из следующего эксперимента, результат сильно зависит от начального приближения. На рис. 2 неудовлетворительные результаты эксперимента. Значения параметров для начального приближения – в табл. 3, значения параметров через $i=1900$ итераций – в табл. 4, точность до второго знака после запятой.

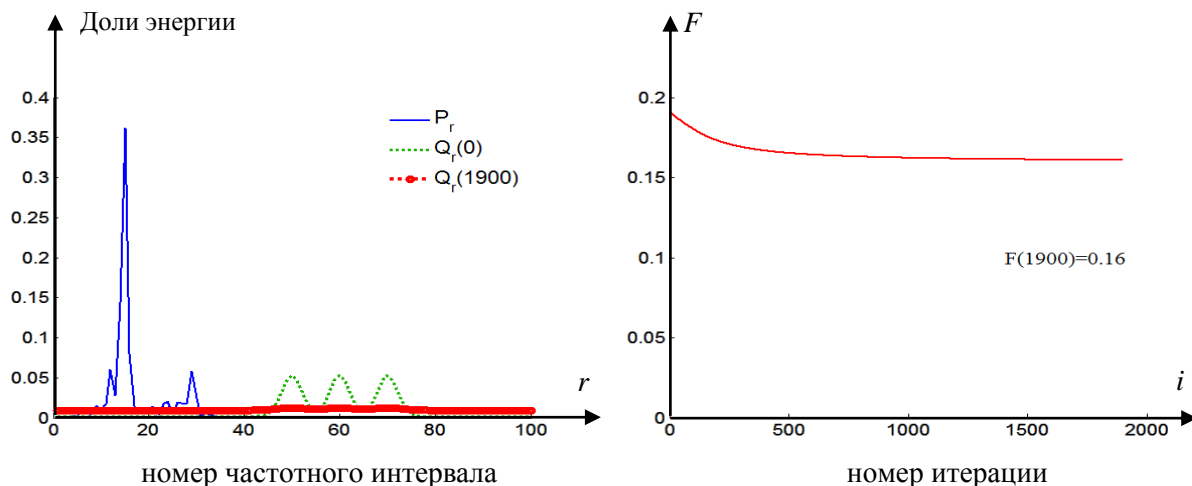


Рис. 2. Неудовлетворительные результаты. Графики наблюдаемых долей энергии и их аппроксимации (слева), а также график изменения значения функционала (справа)
 Fig. 2. Unsuccessful results. Plots of the observed fraction of energy and approximates of them (left) and a plot of value behavior of functional (right)

Таблица 3
 Table 3

Значения параметров для неудачного начального приближения
 Value of parameters for unsuccessful initial approach

Параметр	k=1	k=2	k=3	k=K+1
μ_k	50	60	70	
σ_k	3	3	3	
β_k	0.33	0.33	0.33	0
α_k	0.26	0.26	0.26	0.19

Таблица 4
 Table 4

Значения параметров через $i=1900$ итераций от неудачного начального приближения
 Value of parameters after $i=1900$ iterations from unsuccessful initial approach

Параметр	k=1	k=2	k=3	k=K+1
μ_k	49.89	60	70.1	
σ_k	3.3	3.15	3.3	
β_k	-3.65	-3.68	-3.66	0
α_k	0.02	0.02	0.02	0.92

Если начальное приближение задано неудачно, то алгоритм застревает в локальном минимуме и результат оказывается неадекватным.

Чтобы задать начальное приближение, был применен следующий алгоритм. Сначала у аппроксимируемой кривой долей энергии значения, меньшие $1/R$, заменяются нулями

$$P_r^* = \begin{cases} P_r, & P_r > \frac{1}{R} \\ 0, & P_r \leq \frac{1}{R} \end{cases} \quad (28)$$

Ось частотных интервалов r , разделяется на необходимое количество отрезков $\Omega_k, k \in [1, K]$, а затем на каждом отрезке вычисляется начальное приближение параметров

$$\mu_k|_{i=0} = \frac{\sum_{r \in \Omega_k} r P_r^*}{\sum_{r \in \Omega_k} P_r^*}, \quad \sigma_k|_{i=0} = \sqrt{\frac{\sum_{r \in \Omega_k} (r - \mu_k)^2 P_r^*}{\sum_{r \in \Omega_k} P_r^*}} \quad (29)$$

Деление на отрезки производится в соответствии с разделением значений кумулятивной функции долей энергии на K равных уровней. Кумулятивная функция D_r вычисляется по формуле

$$D_r = \sum_{s=1}^r P_s^*, \quad r = 1, 2, \dots, R. \quad (30)$$

На рис. 3 показано деление частотной оси на отрезки для $K=3$ равных уровней. Горизонтальные линии показывают разделение значения кумулятивной функции на равно-великие уровни. В местах пересечения этих линий с графиком кумулятивной функции на частотную ось опускаются вертикальные линии. Границы Ω_k выбираются как целые числа, ближайшие к опущенным вертикальным линиям, т.к. значения r дискретны.

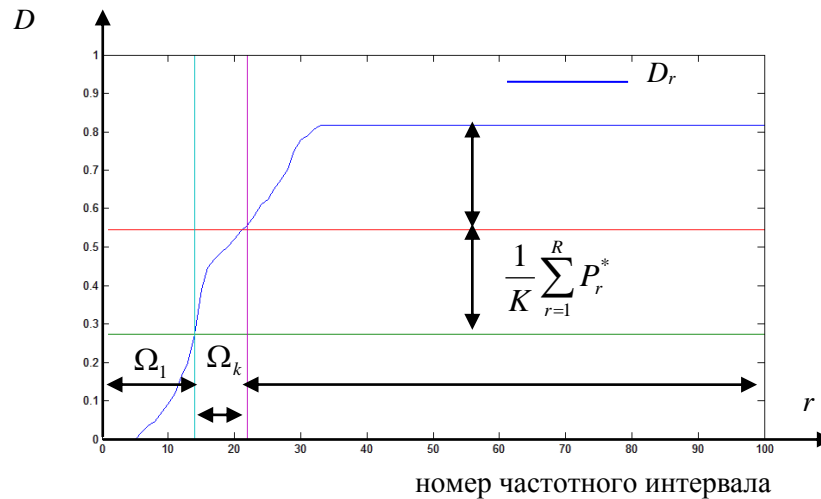


Рис. 3. Деление частотной оси на отрезки для задания начального приближения

Fig. 3. Division frequency axes on parts to set initial approach

Начальные приближения для весовых коэффициентов получены из решения задачи на лучшее соответствие отдельной компоненты смеси и аппроксимируемой функции. Значения α_k получаются из метода наименьших квадратов.

$$F_k = \sum_{r=1}^R (\alpha_k B_{r,k} - P_r)^2, \quad \hat{\alpha}_k = \arg \min_{\alpha_k} (F_k), \quad (31)$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_k} = 2 \sum_{r=1}^R (\alpha_k B_{r,k} - P_r) B_{r,k} = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}_k = \frac{\sum_{r=1}^R P_r B_{r,k}}{\sum_{r=1}^R B_{r,k} B_{r,k}} \quad (32)$$

После нормирования, с учётом $\hat{\alpha}_{K+1} = 1$, так как $\beta_{K+1} = 0$

$$\alpha_k|_{i=0} = \frac{\hat{\alpha}_k}{1 + \sum_{s=1}^K \hat{\alpha}_s}, \tag{33}$$

и решения системы линейных уравнений

$$\frac{e^{\beta_k}}{1 + \sum_{s=1}^K e^{\beta_s}} = \hat{\alpha}_k \xrightarrow{y_k=e^{\beta_k}} \begin{cases} \frac{y_1}{1 + y_1 + \dots + y_K} = \alpha_1|_{i=0} \\ \frac{y_2}{1 + y_1 + \dots + y_K} = \alpha_2|_{i=0} \\ \dots \\ \frac{y_K}{1 + y_1 + \dots + y_K} = \alpha_K|_{i=0} \end{cases}, \tag{34}$$

получаются начальные приближения для коэффициентов β_k .

После задания начального приближения методом сопряжённых градиентов проводился подбор параметров. Результат улучшился. На рис. 4 удовлетворительные результаты предыдущего эксперимента. Значения параметров для начального приближения – в табл. 5, значения параметров через $i=1000$ итераций – в табл. 6, точность до второго знака после запятой.

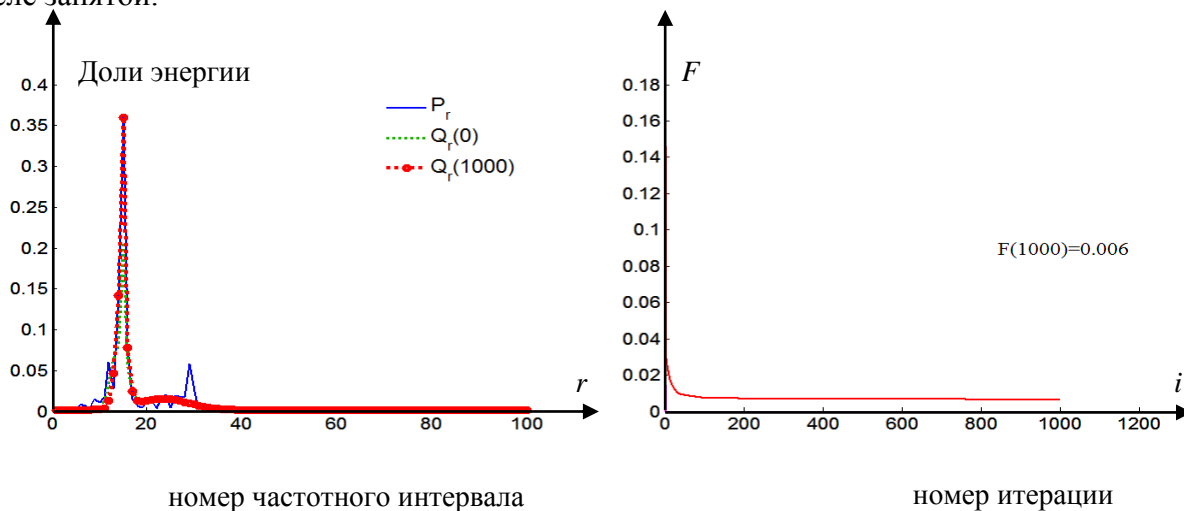


Рис. 4. Графики наблюдаемых долей энергии и их аппроксимации (слева), а также график изменения значения функционала (справа). Начальное приближение задано отдельным алгоритмом
 Fig. 4. Plots of the observed fraction of energy and approximates of them (left) and a plot of value behavior of functional (right). Initial approach is set by special algorithm

Таблица 5
 Table 5

Значения параметров для начального приближения, вычисленные отдельным алгоритмом
 Value of parameters for initial approach, calculated by special algorithm

Параметр	k=1	k=2	k=3	k=K+1
μ_k	14.06	15.18	23.16	
σ_k	1.45	0.39	5.46	
β_k	-0.31	-0.88	-0.63	0
α_k	0.27	0.15	0.2	0.37

Таблица 6

Table 6

Значения параметров через $i=1000$ итераций от задания начального приближения
Value of parameters after $i=1000$ iterations from setting initial approach

Параметр	k=1	k=2	k=3	k=K+1
μ_k	14.62	14.88	23.31	
σ_k	1.2	0.46	5.59	
β_k	0.58	0.58	0.09	0
α_k	0.31	0.31	0.19	0.17

Работа алгоритма была проверена и для других форм кривой долей энергии. На рис. 5–7 удовлетворительные результаты других экспериментов: фрагмент звука «С», фрагмент перехода звука «Ы» в «Х» и фрагмент шума. Алгоритм поиска начального приближения заметно способствует в получении решения задачи аппроксимации.

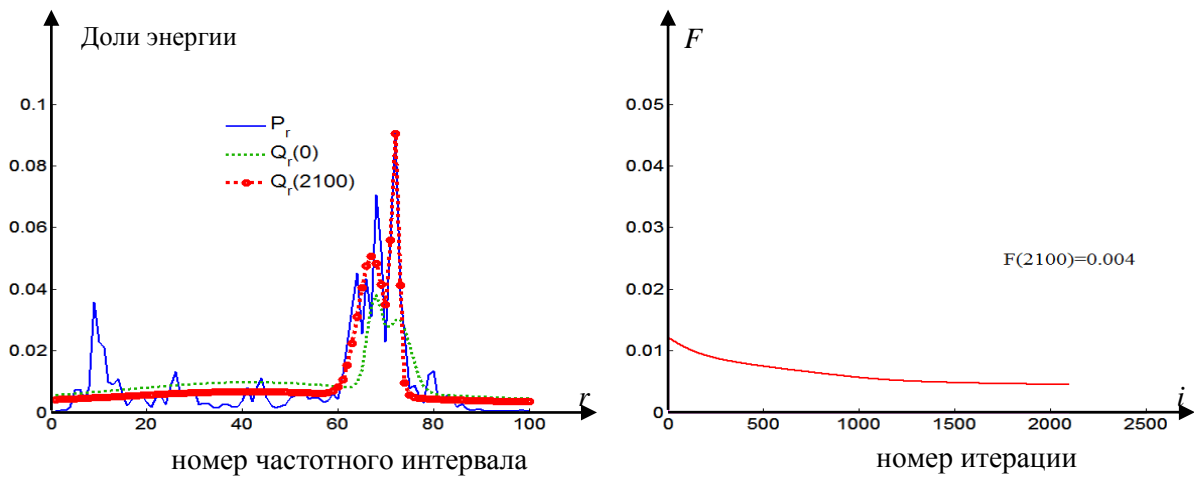


Рис. 5. Графики наблюдаемых долей энергии и их аппроксимации (слева), а также график изменения значения функционала (справа). Эксперимент № 2
Fig. 5. Plots of the observed fraction of energy and approximates of them (left) and a plot of value behavior of functional (right). Experiment № 2

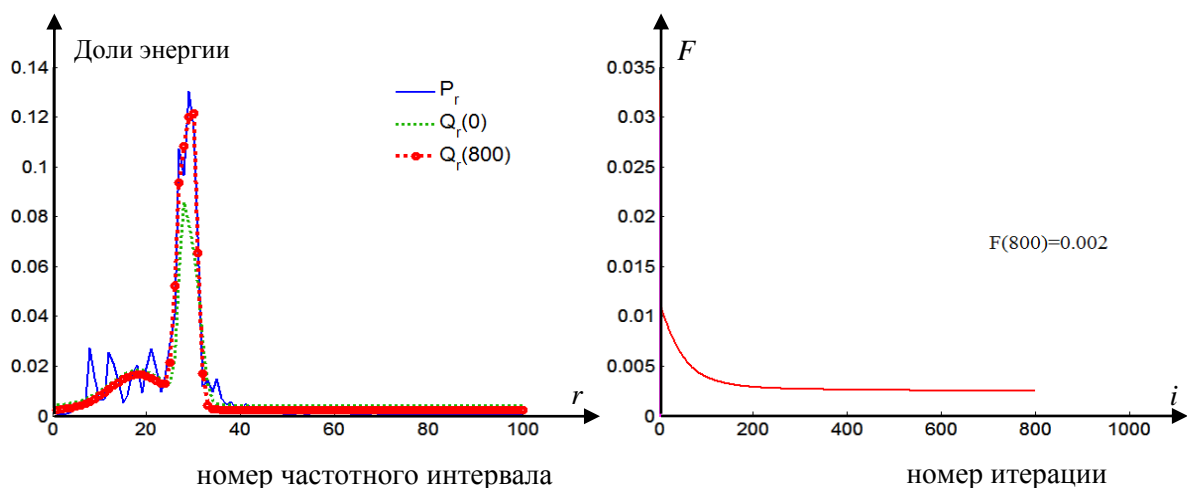


Рис. 6. Графики наблюдаемых долей энергии и их аппроксимации (слева), а также график изменения значения функционала (справа). Эксперимент № 3
Fig. 6. Plots of the observed fraction of energy and approximates of them (left) and a plot of value behavior of functional (right). Experiment № 3

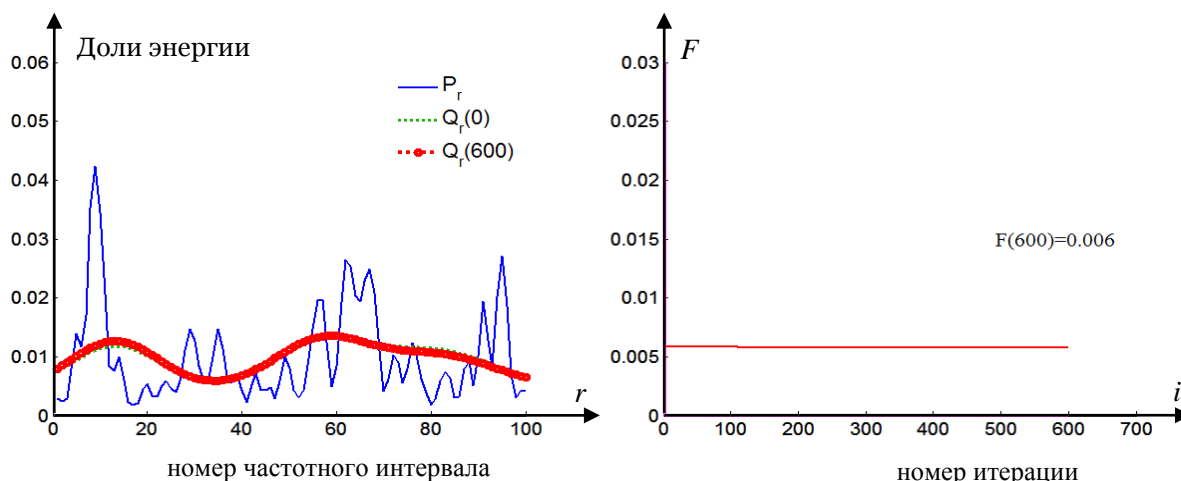


Рис. 7. Графики наблюдаемых долей энергии и их аппроксимации (слева), а также график изменения значения функционала (справа). Эксперимент № 4
 Fig. 7. Plots of the observed fraction of energy and approximates of them (left) and a plot of value behavior of functional (right). Experiment № 4

Заклучение

Параметры, получаемые при аппроксимации, планируется проверить на пригодность для идентификации отрезков речевого сигнала. Ожидается, что для одинаковых звуков речи наборы параметров будут мало отличаться друг от друга, а для разных звуков речи будут давать существенную разницу.

Список литературы References

1. Алдошина И. Основы психоакустики. Подборка статей. Available at: <http://www.625-net.ru> (11 февраля 2010).
 Aldoshina I. Osnovy psihoakustiki. Podborka statej. Available at: <http://www.625-net.ru> (11 February 2010). (in Russian)
2. Вологдин Э.И. 2004. Слух и восприятие звука: Учеб. пособие. СТ «Факультет ДВО», СПб.
 Vologdin Je.I. 2004. Sluh i vosprijatie zvuka: Ucheb. posobie. ST«Fakul'tet DVO», SPb. (in Russian)
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. 1985. Математический анализ. Продолжение курса. М., Изд. МГУ. 358.
 Il'in V.A., Sadovnichij V.A., Sendov Bl.Kh. 1985. Matematicheskij analiz. Prodolgenije kursa. M.: Izd. MGU. 358. (in Russian)
4. Жилияков Е.Г. 2007. Вариационные методы анализа и построения функций по эмпирическим данным: моногр. Белгород: Изд. БелГУ. 160.
 Zhiljakov E.G. 2007. Variacionnye metody analiza i postroenija funkcij po jempiricheskim dannym: monogr. Belgorod: Izd. BelGU. 160. (in Russian)
5. Жилияков Е.Г., Белов С.П., Прохоренко Е.И. 2007. Методы обработки речевых данных в информационно-телекоммуникационных системах на основе частотных представлений. Белгород: Изд. БелГУ. 136.
 Zhiljakov E.G., Belov S.P., Prohorenko E.I. 2007. Metody obrabotki rechevyh dannyh v informacionno-telekommunikacionnyh sistemah na osnove chastotnyh predstavlenij. Belgorod: Izd. BelGU. 136. (in Russian)
6. Жилияков Е.Г., Прохоренко Е.И., Болдышев А.В., Фирсова А.А., Фатова М.В. 2011. Сегментация речевых сигналов на основе анализа распределения энергии по частотным интервалам. Научные Ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. 7(102): 187–196.

Zhiljakov E.G., Prokhorenko E.I., Boldyshev A.V., Firsova A.A., Fatova M.V. 2011. Segmentatsija rechevyh signalov na osnove analiza raspredelenija energii po chastotnym intervalam. Nauchnyje Vedomosti BelGU. Ser. Ekonomika. Informatika. 7(102): 187–196. (in Russian)

7. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., 2013. Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений. Информационные системы и технологии. 1(75): 5–11.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2013. Optimal separation of image subband components. Informacionnye sistemy i tehnologii [Information systems and technologies] 1(75): 5–11. (in Russian)

8. Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В. 2015. Оценивание производных дискретных функций. Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. 21(216): 96–100.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V. 2015. Ocenivanie proizvodnyh diskretnyh funkciy. Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Jekonomika. Informatika. 21(216): 96–100. (in Russian)

9. Загоруйко Н.Г. 1981. Методы обнаружения закономерностей. М.: Знание. 64.

Zagorujko N.G. 1981. Metody obnaruzheniya zakonomernostej. M.: Znanie. 64. (in Russian)

10. Орлов А.И. 1980. Задачи оптимизации и нечёткие переменные. М.: Знание. 64.

Orlov A.I. 1980. Zadachi optimizatsii i nechetkie peremennye. M.: Znanie. 64. (in Russian)

11. Протасов В.Ю., 2005. Максимумы и минимумы в геометрии. М.: МЦНМО. 56.

Protasov V.Yu., 2005. Maksimumy i minimumy v geometrii. M.: MCNMO. 56. (in Russian)

12. Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьева Е.Б. 2006. Основы ЦОС: Учеб. пособие. Государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 747.

Solonina A.I., Ulahovich D.A., Arbuzov S.M., Solov'eva E.B. 2006. Osnovy COS: Ucheb. posobie. Gosudarstvennyj universitet telekommunikacij im. prof. M.A. Bonch-Bruevicha, 747. (in Russian)

13. Хайкин Саймон, 2006. Нейронные сети: полный курс, 2е издание. Пер. с англ. М. Издательский дом «Вильямс». 1104.

Hajkin Sajmon, 2006. Nejronnye seti: polnyj kurs, 2e izdanie. Per. s angl. M. Izdatel'skij dom «Vil'jams». 1104. (in Russian)

14. Черноморец А.А., Болгова Е.В., Черноморец Д.А. 2015. Обобщенный субполосный анализ на основе унитарных преобразований. Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. 7(204): 97–104.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Chernomorets D.A. 2015. Obobshhennyj subpolosnyj analiz na osnove unitarnyh preobrazovanij. Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Jekonomika. Informatika. 7(204): 97–104. (in Russian)

15. Черноморец А.А., Коваленко А.Н., Петина М.А. 2017. О применении нейронных сетей для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика. 9(258): 103–110.

Chernomorets A.A., Kovalenko A.N., Petina M.A. 2017. O primenenii nejronnykh setej dlja htshenija differentsialnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh. Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Jekonomika. Informatika. 9(258): 103–110. (in Russian)

16. Шлезингер М.А., Главач Вацлав, 2003. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию образов. Киев, Национальная Академия наук. 554.

Schlesinger M.A., Glavach Vatslav, 2003. Desjat lektsyj po statisticheskomu i strukturnomu raspoznavaniju obrazov. Kiev, Nacionalnaja Akademija nauk. 554. (in Russian)

17. Fletcher R., 1987. Practical Methods of Optimization. John Wiley and Sons.

18. Nelder J.A., Mead R. 1965. A Simplex Method for Function Minimization. Computer J. 7: 308–313.

19. Scales L.E., 1985. Introduction to NonLinear Optimization, New York, Springer Verlag.

20. Shanno D.F. 1970. Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization. Mathematics of Computing, 24: 647–656.