



Консервативный полулагранжевый алгоритм численного решения уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках

¹Кучунова Е. В. , ^{1,2} Вяткин А. В. 
(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

¹ Сибирский федеральный университет,
Россия, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79
HKuchunova@sfu-kras.ru

² Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Россия, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44
E-mail: vyatkin@icm.krasn.ru

Аннотация. В работе представлен полулагранжевый алгоритм численного решения двумерного уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках. Алгоритмы из семейства полулагранжевых методов являются широкоизвестными численными методами решения уравнения неразрывности. Эти алгоритмы используются при численном моделировании широкого ряда физических процессов, включающих в себя адвекцию. Полулагранжевые методы позволяют выполнить условие Куранта – Фридрихса – Леви без использования ограничения на шаг по времени. Представленный метод основан на точном тождестве пространственных интегралов на соседних временных слоях. В описанном алгоритме численное решение основано на кусочно-постоянной интерполяции функций. Предложенный метод устойчив и вычисляет приближенное решение с первым порядком сходимости для гладких решений.



Ключевые слова: уравнение неразрывности, полулагранжевый метод, численное моделирование, треугольная сетка

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075–02–2023–912).

Для цитирования: Кучунова Е. В., Вяткин А. В. 2023. Консервативный полулагранжевый алгоритм численного решения уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 361–372. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-361-372

Original Research

Conservative Semi-Lagrangian Algorithm for Advection Problem on Unstructured Triangular Grids

¹Elena V. Kuchunova , ^{1,2} Alexander V. Vyatkin 
(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

¹ Siberian Federal University,
79, Svobodny Pr., Krasnoyarsk, 660041, Russia
HKuchunova@sfu-kras.ru

² Institute of Computational Modelling SB RAS,
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russia
E-mail: vyatkin@icm.krasn.ru

Abstract. We develop the semi-Lagrangian algorithm on triangular grids for two-dimensional advection problem. The semi-Lagrangian method is established numerical technique in atmospheric modeling and other physical processes. It allows to achieve the Courant-Friedrichs-Lewy condition without restriction for time step. The method is based on the exact identity of spatial integrals on adjacent time layers. Numerical solution is constructed as a piecewise constant function on neighborhood of each grid node. The proposed method has first order of convergence for smooth solutions.

Keywords: Advection Problem, Semi-Lagrangian Approximation, Numerical Modeling, Triangular Grids

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075–02–2023–912).

For citation: Kuchunova E. V., Vyatkin A. V. 2023. Conservative Semi-Lagrangian Algorithm for Advection Problem on Unstructured Triangular Grids. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 361–372. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-361-372

1. Введение. Идеи, которые легли в основу полулагранжевых методов, появились во второй половине XX века при разработке методов для численного решения задач моделирования крупномасштабных атмосферных потоков [1]. Особенностью этих методов является то, что они основаны на моделировании перемещения субстанции посредством вычисления траекторий движения. В противоположность этому подходу существуют так называемые эйлеровы подходы, которые используют фиксированную пространственную сетку. В настоящее время эйлеровы подходы, такие как TVD или WENO [2]–[4], хорошо развиты и имеют высокие порядки точности. Однако эти подходы имеют два существенных недостатка. Первый недостаток состоит в том, что из условия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви для этих методов вытекает ограничение на шаг по времени в зависимости от размеров шаблона разностной схемы и значений функций скорости. В двумерных и трехмерных задачах это ограничение приводит к большим вычислительным затратам. Вторым недостатком является то, что при поиске разрывных решений методы высоких порядков точности формируют искусственные осцилляции в численном решении рядом с точкой разрыва. В отличие от эйлеровых подходов в полулагранжевых методах условие устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви выполняется автоматически, что позволяет проводить расчеты с большими шагами по времени. В некоторых задачах переход от эйлеровых к полулагранжевым методам позволяет повысить эффективность моделирования в шесть раз [5]. Другим важным преимуществом полулагранжевых методов является возможность использовать разные пространственные сетки на разных слоях по времени [6]. Это преимущество привело к активному использованию адаптивных сеток [6, 7]. Подробное описание преимуществ полулагранжевого моделирования можно найти в обзорной статье [8], а также в [9] вместе с обширным обзором литературы.

Наличие существенных преимуществ привело к развитию целого семейства полулагранжевых методов для численного решения гиперболических уравнений в частных производных, описывающих процесс адвекции. Так, для оператора конвекции в одномерном случае построены два различных подхода (эйлеро-лагранжев и лагранжево-эйлеров) [10]. Причем для лагранжево-эйлерова подхода достигнут второй порядок сходимости для гладких решений и продемонстрировано отсутствие численной вязкости для разрывных решений. Для двумерного уравнения неразрывности в [11, 12] изложен вычислительный алгоритм, основанный на полулагранжевом подходе, на прямоугольных сетках. В работах обоснован дискретный закон сохранения для численного решения. Применение аналогичной технологии для трехмерного уравнения неразрывности на равномерной кубической сетке описано в [13].

Несмотря на то, что изначально полулагранжевый подход разрабатывался для гиперболических уравнений, в дальнейшем была разработана методология объединения его с методом конечных разностей и методом конечных элементов. Поэтому метод начал развиваться для решения более широкого класса задач, в которых адвекция присутствует в качестве одного из моделируемых процессов [14]–[16]. В [17]–[19] представлена полулагранжевая аппроксимация оператора переноса для задачи конвекции-диффузии. Полулагранжевая аппроксимация успешно применяется для различных законов сохранения. В [20, 21] применяется для аппроксимации одномерных уравнения переноса и параболических уравнений. Для параболических уравнений и уравнений переноса продемонстрированы принципы построения дискретных аналогов для трех различных законов сохранения оператора переноса (в нормах L_1 , L_2 и L_{inf}). В [22] демонстрируются различные способы использования полулагранжевых приближений в зависимости от выполнения законов сохранения. В качестве простых методических примеров взяты одномерное уравнение неразрывности и параболическое уравнений. Полулагранжевый метод также успешно используется в сочетании с методом конечных элементов для решения начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса [14, 23], например, для численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости [24, 25], сверхзвукового обтекания клина [26] и течения вязкого теплопроводного газа.

Полулагранжевые методы предоставляют возможность для аппроксимации дифференциальных уравнений на любых неструктурированных сетках, состоящих из геометрических фигур, которыми можно покрыть заданную область нестандартного вида. Наиболее простым случаем таких фигур является треугольник. В данной работе предлагается новый численный метод решения начально-краевой задачи для уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках на основе консервативного полулагранжевого метода.

2. Постановка задачи. В области $\bar{D}_T = \{(t, \mathbf{x}) \mid 0 \leq t \leq T, \mathbf{x} \in \bar{D}\}$, где $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим двумерное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = f(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \bar{D}_T. \quad (1)$$

Здесь $u(t, \mathbf{x})$, $v(t, \mathbf{x})$ известные достаточно гладкие функции вектора скорости $\mathbf{U} = (u, v)$, $f(t, \mathbf{x})$ функция источника известная в \bar{D}_T , $\rho(t, \mathbf{x})$ — искомая неотрицательная функция. Граница ∂D множества \bar{D} состоит из трех частей: участок втекания Γ_{in} , участок вытекания Γ_{out} и границы с твердой стеной Γ_{wall} :

$\partial D = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_{wall}$. На границе втекания Γ_{in} справедливо соотношение

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) < 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{in}, \tag{2}$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе ∂D , а выражение $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$ обозначает скалярное произведение двух векторов. На границе вытекания Γ_{out} выполняется ограничение

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) > 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{out}. \tag{3}$$

На границе Γ_{wall} выполняется условие прилипания

$$\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{wall}. \tag{4}$$

Искомая функция известна в начальный момент времени на множестве \bar{D} и на поверхности втекания $P_{in} = [0, T] \times \Gamma_{in}$

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_{init}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{D}, \tag{5}$$

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_{in}(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in P_{in}. \tag{6}$$

3. Численная схема. На отрезке $[0, T]$ построим равномерную сетку с шагом $\tau = T/K$ с узлами $t_k = k\tau$, где $k = 0, \dots, K$ ($K \geq 1$). В области \bar{D} введем сетку $\bar{D}_h = \{\mathbf{x}_s = (x_s, y_s), s = 1, \dots, N\}$, содержащую внутренние и граничные точки области \bar{D} . На \bar{D}_h построим треугольную триангуляцию $T(\bar{D}_h) = \{T_m = \Delta(\mathbf{x}_{i_m}, \mathbf{x}_{j_m}, \mathbf{x}_{l_m}), \mathbf{x}_{i_m}, \mathbf{x}_{j_m}, \mathbf{x}_{l_m} \in \bar{D}_h, m = 1, \dots, M\}$. Пусть $T(\bar{D}_h)$ содержит все узлы \bar{D}_h . Все треугольники T_m имеют ненулевую площадь и пересекаются не более, чем по образующим их вершинам или ребрам. Пусть h – максимальная длина ребер треугольников триангуляции $T(\bar{D}_h)$.

Для построения триангуляции существуют разные алгоритмы, которые позволяют покрывать заданную область треугольниками, удовлетворяющими определенным условиям [27]. Чем качественней триангуляция (чем ближе треугольники к равносторонним), тем более точным получается решение. На рис. 1 изображен пример вычислительной сетки, построенной с помощью стандартного пакета `pde001` в среде MATLAB. Характерными параметрами при построении триангуляции являются величины h и N .

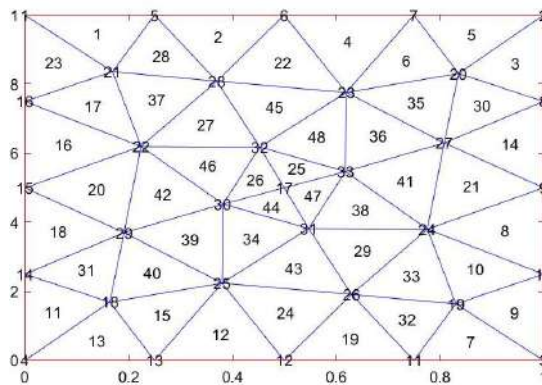


Рис. 1. Вычислительная треугольная сетка
Fig. 1. Computational triangular grid

Для каждого узла $\mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$ определим множество всех треугольников, вершинами которых он является $\{T_{(s,i)}, i = 1, \dots, n_s\}$, где n_s – количество смежных треугольников. В каждом из этих треугольников определим точку $P_{(s,i)}$ пересечения медиан (центр масс треугольников). Полученное множество $\{P_{(s,i)}, i = 1, \dots, n_s\}$ образует вершины многоугольника, который определим окрестностью узла ω_s . Несложно понять, что длина каждого ребра любого многоугольника ω_s меньше, чем $2h$. Границы окрестностей узлов, расположенных на ∂D , будут содержать в себе перпендикуляры, опущенные на ∂D из вершин границ соседних узлов. На рис. 2 изображены примеры окрестностей для узлов, расположенных: (а) на границе, (б) внутри области \bar{D} .

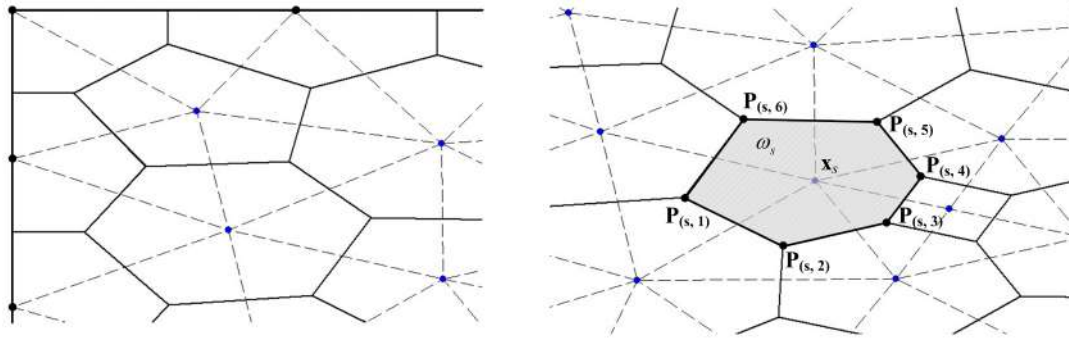


Рис. 2. Окрестности узлов сетки: (а) рядом с границей, (б) внутри области
 Fig. 2. Neighborhoods of grid nodes: (a) near the boundary, (b) inside the area

Для поиска численного решения $\rho^h(t, \mathbf{x})$ задачи (1) – (6) будем полагать, что функция $\rho^h(t, \mathbf{x})$ является константой в пределах каждой окрестности ω_s узла $\mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$

$$\rho^h(t_k, \mathbf{x}) = \rho^h(t_k, \mathbf{x}_s), \forall \mathbf{x} \in \omega_s. \quad (7)$$

Рассмотрим два соседних слоя по времени t_{k-1} и t_k ($1 \leq k \leq K$). Пусть Ω – многоугольник на слое t_k . Из каждой точки $\mathbf{A} = (t_k, A^x, A^y) \in \partial\Omega$ построим траекторию движения с верхнего слоя t_k на нижний слой t_{k-1} . Траектория движения является решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = u(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = v(t, \tilde{x}, \tilde{y}) \end{cases} \text{ при } t \in [t_{k-1}, t_k] \quad (8)$$

с начальными данными $\tilde{x}(t_k) = A^x$, $\tilde{y}(t_k) = A^y$. Множество траекторий, выпущенных из $\partial\Omega$ при пересечении с плоскостью $t = \text{const}$ образует множество $Q(t)$ с криволинейной границей (рис. 2(a)). Когда Ω расположен достаточно близко к границе втекания Γ_{in} , некоторое подмножество траекторий её достигает. В этом случае это подмножество траекторий образуют на поверхности втекания $P_{in} = [0, T] \times \Gamma_{in}$ область Q_{in} (рис. 2(б)).

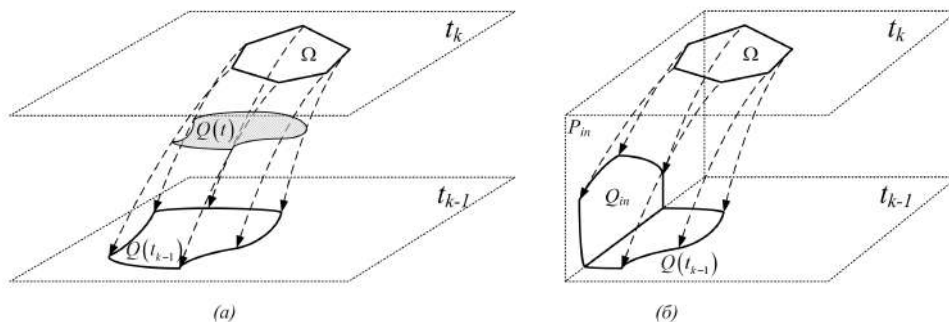


Рис. 3. (а) Множество $Q(t)$; (б) Касание траекториями поверхности втекания
 Fig. 3. (a) Neighborhood $Q(t)$ (b) Touching the inlet boundary

Теорема 1. Для решения задачи (1)–(6) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \rho(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{Q(t_{k-1})} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{Q(t)} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt + I(Q_{in}),$$

где Ω – область на слое t_k , $Q(t_{k-1})$ – область на слое t_{k-1} , $I(Q_{in}) = \int_{Q_{in}} |(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})| \rho_{in}(t, \mathbf{x}) dQ_{in}$ (если $Q_{in} \neq \emptyset$);

Q_{in} – область в $P_{in} = [0, T] \times \Gamma_{in}$.

Доказательство теоремы основано на формуле Гаусса – Остроградского и подробно описано в [11] для полулагранжевого алгоритма, построенного на квадратных сетках.

Для удобства введем обозначения $\rho_s^{h,k} = \rho^h(t_k, \mathbf{x}_s)$, $\rho^{h,k} = \rho^h(t_k, \mathbf{x})$. Будем считать, что при $t = t_{k-1}$ численное решение $\rho^{h,k-1}$ нам известно во всех узлах вычислительной сетки \bar{D}_h . Требуется вычислить

значение искомой функции $\rho^{h,k}$ на следующем слое по времени. Для этого рассмотрим окрестность ω_s произвольного узла x_s . В силу теоремы 1

$$\int_{\omega_s} \rho(t_k, x) dx = \int_{Q_s(t_{k-1})} \rho(t_{k-1}, x) dx + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{Q_s(t)} f(t, x) dx dt + I(Q_{in,s}^{k-1}), \quad (9)$$

где $Q_s(t)$ – множество, получаемое при пересечении траекторий, выпущенных из $\partial\omega_s$, с плоскостью $t = \text{const}$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $I(Q_{in,s}^{k-1})$ – интеграл по окрестности, получаемой в случае касания траекториями поверхности втекания P_{in} , вычисляемый следующий образом

$$I(Q_{in,s}^{k-1}) = \begin{cases} \int_{Q_{in,s}^{k-1}} |(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})| \rho_{in} dQ, & \text{если } Q_{in,s}^{k-1} \neq \emptyset; \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases}$$

В связи с (7) для левой части соотношения (9) используем приближение

$$\int_{\omega_s} \rho(t_k, x, y) dx \approx \text{meas}(\omega_s) \rho_s^{h,k}, \quad (10)$$

где $\text{meas}(\omega_s)$ – площадь окрестности ω_s .

Для вычисления правой части (9) необходимо аппроксимировать окрестность на нижнем слое $Q_s(t_{k-1})$. Обозначим вершины окрестности ω_s символами $A_i = (t_k, A_i^x, A_i^y)$, где $i = 1, \dots, n_s$, где n_s – количество вершин многоугольника ω_s . Для аппроксимации множества $Q_s(t_{k-1})$ рассмотрим задачи Коши (8) только для траекторий, выпущенных из вершин A_i , $i = 1, \dots, n_s$. Значение решения каждой задачи при $t = t_{k-1}$ найдем методом Эйлера в следующем виде

$$B_i^{h,x} = A_i^x - \tau u(t_k, A_i^x, A_i^y), \quad B_i^{h,y} = A_i^y - \tau v(t_k, A_i^x, A_i^y), \quad i = 1, \dots, n_s. \quad (11)$$

В результате получим точки $B_i^h = (B_i^{h,x}, B_i^{h,y})$. Несложно видеть, что такой способ решения задачи имеет погрешность $O(\tau^2)$

$$B_i^x = B_i^{h,x} + O(\tau^2), \quad B_i^y = B_i^{h,y} + O(\tau^2), \quad i = 1, \dots, n_s, \quad (12)$$

где $B_i = (B_i^x, B_i^y)$ – значение точного решения задачи Коши при $t = t_{k-1}$. Последовательно соединим точки B_i^h прямыми линиями и получим многоугольник $Q_s^{h,k-1}$, который аппроксимирует прямоугольник $Q_s(t_{k-1})$. Пример такой аппроксимации изображен на рис. 3. Пунктирными кривыми изображены точные траектории, выходящие из точек A_i , точное значение множества $Q_s(t_{k-1})$ заштриховано. Сплошными линиями изображены приближенные траектории, получаемые по формулам (11) и границы многоугольника $Q_s^{h,k-1}$.

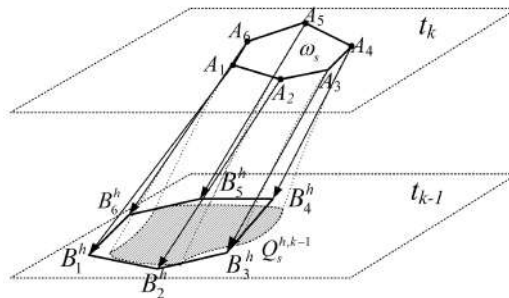


Рис. 4. Аппроксимация окрестности на нижнем слое по времени
 Fig. 4. Approximation of the neighborhood on the lower layer in time

Поскольку длина каждого ребра окрестности ω_s меньше $2h$, то несложно понять, что длина ребра многоугольника $Q_s^{h,k-1}$ меньше $2h + 2c_1 \tau$, где c_1 – некоторая константа, ограничивающая функции скорости u, v . Тогда, используя (12), можно показать, что

$$\text{meas}(Q_s^{h,k-1}) = \text{meas}Q_s(t_{k-1}) + \delta(Q_s), \quad \text{где } |\delta(Q_s)| \leq O((h + \tau) \tau^2). \quad (13)$$

В итоге, для вычисления интеграла на нижнем слое по времени, где решение $\rho^{h,k-1}$ известно в узлах сетки, применим следующую последовательность интерполяций. Вначале мы заменяем криволинейное

множество $Q_s(t_{k-1})$ многоугольником $Q_s^{h,k-1}$, а затем подынтегральную функцию заменяем на численное решение ρ^h известное на слое по времени $t = t_{k-1}$

$$\int_{Q_s(t_{k-1})} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \int_{Q_{h,s}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \int_{Q_{h,s}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Чтобы вычислить интеграл по многоугольнику $Q_{h,s}^{k-1}$, необходимо осуществить декомпозицию этого многоугольника на множества $\Xi = \{R_1, \dots, R_p\}$ непустых пересечений с окрестностями других узлов сетки \bar{D}_h , в каждой из которых значение подынтегральной функции постоянно

$$Q_s^{h,k-1} = \bigcup_{i=1}^p R_i, \quad \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) = \rho_i^{h,k-1} \quad \forall \mathbf{x} \in R_i = Q_s^{h,k-1} \cap \omega_i.$$

Алгоритм декомпозиции окрестности на нижнем слое по времени следующий.

1. Положим $i = s$. Таким образом, начинаем обход узлов сетки с узла \mathbf{x}_s .
2. Вычисляем пересечение окрестности $Q_s^{h,k-1}$ с окрестностью узла \mathbf{x}_i : $\xi_i = Q_s^{h,k-1} \cap \omega_i$.
3. Если пересечение $\xi_i \neq \emptyset$, то добавляем ξ_i в Ξ , отмечаем узел \mathbf{x}_i как задействованный.
4. Если узел \mathbf{x}_i задействованный, то осуществляем цикл по всем треугольникам $T_m = \Delta(\mathbf{x}_{i_m}, \mathbf{x}_{j_m}, \mathbf{x}_{l_m})$, у которых одной из вершин является узел \mathbf{x}_i .
 - (a) Если узел \mathbf{x}_{i_m} не отмечен проверенным, то переходим к п.2 для $i = i_m$.
 - (b) Если узел \mathbf{x}_{j_m} не отмечен проверенным, то переходим к п.2 для $i = j_m$.
 - (c) Если узел \mathbf{x}_{l_m} не отмечен проверенным, то переходим к п.2 для $i = l_m$.

Пример разбиения многоугольника $Q_s^{h,k-1}$ на части представлен на рис. 5 (слева). Пример пересечения двух множеств P и Q изображен на рис. 5 (справа). Чтобы вычислить пересечение многоугольников P и Q , мы определяем вершины многоугольника Q , лежащие внутри многоугольника P (на рис. 5 (справа) это A, B). Далее, определяем вершины многоугольника P , лежащие внутри многоугольника Q (на рис. 5 (справа) это E, D). Потом проверяем пересечение всех ребер многоугольника P со всеми ребрами многоугольника Q (на рис. 5 (справа) это C, F). Полученное множество точек упорядочиваем путем построения выпуклой оболочки, которая дает алгоритм Джарвиса. В итоге, после декомпозиции многоугольника $Q_s^{h,k-1}$ интеграл раскладывается на следующую сумму

$$\int_{Q_{h,s}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \int_{R_i} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \rho_i^{h,k-1} \text{meas}(R_i). \quad (14)$$

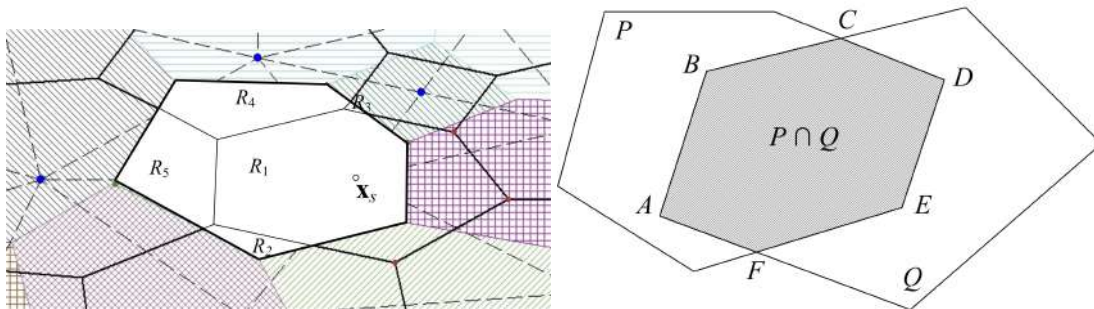


Рис. 5. Разбиение окрестности на нижнем слое по времени (слева); Пересечения двух многоугольников (справа)
Fig. 5. Polygon decomposition at the bottom time level (left); Two polygons intersection (right)

Для вычисления интеграла от $f(t, \mathbf{x})$ из (9) воспользуемся следующими аппроксимациями:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{Q_s(t)} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \approx \tau \int_{Q_s(t_k)} f(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \tau f(t_k, \mathbf{x}_s) \text{meas}(\omega_s). \quad (15)$$

Рассмотрим вычисление интеграла $I(Q_{in,s}^{k-1})$ на поверхности втекания. В случае если хотя бы одна траектория, выпущенная из вершины многоугольника ω_s , достигает поверхность втекания P_{in} , то

множество $Q_{in,s}^{k-1}$ является не пустым. Для дальнейших расчетов мы аппроксимируем его многоугольником с прямыми сторонами $Q_{in,s}^{h,k-1}$. Поскольку достигнуть поверхности втекания может несколько траекторий, то возможно различное число вершин в многоугольнике $Q_{in,s}^{k-1}$. Два возможных случая изображены на рис. 6.

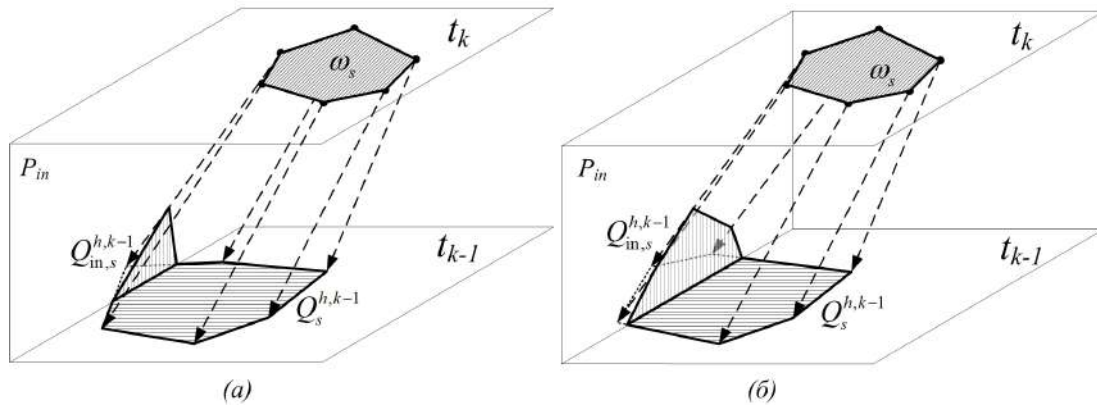


Рис. 6. Случай выхода одной (а) и трех (б) траекторий на границу втекания
Fig. 6. One (a) or three (b) trajectories achieve the inlet boundary

Пусть, для примера, границей втекания является граница $x = 0$, тогда на поверхности втекания P_{in} вычислительная сетка представляет собой прямоугольную сетку с узлами $(t_{k-1}, y_{in_i}), (t_k, y_{in_i})$, где y_{in_i} – координаты по оси OY узлов вычислительной сетки Ω_h , лежащих в Γ_{in} . Обозначим $h_i^y = y_{in_{i+1}} - y_{in_i}$. Для каждого узла (t_k, y_{in_i}) зададим прямоугольную окрестность

$$\omega_{in,i}^k = ([t_k - \tau/2, t_k + \tau/2] \cap [0, 1]) \times ([y_{in_i} - h_{i-1}^y/2, y_{in_i} + h_i^y/2] \cap [0, 1]),$$

в пределах которой значения функций $\rho(t, x)$ и $u(t, x)$ считаем постоянными. В этом случае вычисление интеграла по многоугольнику $Q_{in,s}^{h,k-1}$ сводится в разложению $Q_{in,s}^{h,k-1}$ на подмножества с помощью алгоритма, подобному ранее изложенному способу.

Таким образом, если ни один из прямых отрезков (A_i, B_i^h) не достигает плоскости втекания P_{in} , то интеграл $I(Q_{in,s}^{k-1}) = 0$. Если хотя бы одна траектория достигает границы втекания, то $Q_{in,s}^{h,k-1} \neq \emptyset$. В этом случае, выполняем декомпозицию окрестности $Q_{in,s}^{h,k-1}$ на множество непустых пересечений с окрестностями узлов, лежащих на плоскости втекания

$$Q_{in,s}^{h,k-1} = \bigcup_{j=k-1}^k \bigcup_{i=1}^r W_{i,j}, \quad W_{i,j} = Q_{in,s}^{h,k-1} \cap \omega_{in,i}^j.$$

Пример такой декомпозиции приведен на рис. 7.

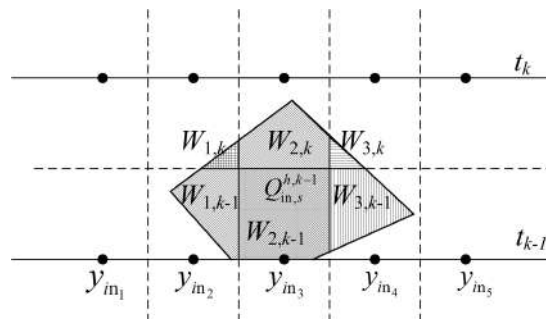


Рис. 7. Разбиение многоугольника на поверхности втекания
Fig. 7. Polygon decomposition on inlet surface

Интеграл на поверхности втекания раскладывается на следующую сумму

$$I(Q_{in,s}^{k-1}) = \int_{Q_{in,s}^{k-1}} \rho_{in} u dt dy \approx \int_{Q_{in,s}^{h,k-1}} \rho_{in} u dt dy \approx \sum_{j=k}^{k+1} \sum_{i=1}^r \rho_{in}(t_j, \mathbf{x}_{in_i}) u(t_j, \mathbf{x}_{in_i}) \text{meas}(W_{i,j}). \quad (16)$$

Подставляем в исходное уравнение (9) интегралы на верхнем (10) и на нижнем (14) слоях, интеграл от функции правой части (15), а также интеграл на поверхности втекания (16). В итоге получаем явное выражение для вычисления значения в узле сетки \mathbf{x}_s

$$\rho_s^{h,k} = \frac{1}{\text{meas}(\omega_s)} \left(\sum_{i=1}^p \rho_i^{h,k-1} \text{meas}(R_i) + I(Q_{\text{in},s}^{k-1}) \right) + \tau f(t_k, \mathbf{x}_s), \quad s = 0, \dots, N. \quad (17)$$

Разработанный вычислительный алгоритм численного решения задачи (1)-(6) можно представить в виде следующей последовательности шагов.

1. Шаг инициализации. Используя начальные данные (5), вычисляется $\rho_s^{h,0} = \rho_{\text{init}}(\mathbf{x}_s), \forall \mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$.
2. Цикл по времени. Для каждого шага по времени $k = 1, \dots, K$ выполняются следующие действия.
 - (a) Шаг вычисления решения. Для каждого узла сетки $\mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$ выполняются следующие действия.
 - I. Для определения координат вершин $Q_s^{h,k-1}$ четырехугольника решается система (11).
 - II. Если некоторые траектории достигают плоскость $P_i n$, то определяются координаты пересечения соответствующей траектории с этой плоскостью.
 - III. Вычисляется значение интеграла на нижнем слое по времени (14).
 - IV. Вычисляется значение интеграла по правой части (15).
 - V. Вычисляется значение интеграла по границе втекания (16).
 - VI. Вычисляется значение искомой функции $\rho_s^{h,k}$ по формуле (17).
 - (b) Шаг анализа решения. Вычисляются нормы решения и погрешности.

Алгоритм является явным по времени, т.е. для расчета ρ^h на каждом временном слое используются данные только с предыдущего временного слоя. Достоинством алгоритма с точки зрения параллельной реализации является отсутствие зависимости по данным в основных циклах по пространству, т.е. пункты выполняются независимо для каждого узла \mathbf{x}_s . В связи с этим возможно осуществление распараллеливания по данным. Для систем с общей памятью при использовании технологии OpenMP достаточно на каждом шаге по времени распараллелить основной цикл по пространству, используя директиву `#pragma omp parallel for`.

Отметим, что описанный метод является консервативным в норме пространства функций $L_1(\bar{D})$

$$\left\| \rho^h(t_k, \mathbf{x}) \right\|_{L_1(\bar{D})} = \int_{\bar{D}} |\rho^h(t_k, \mathbf{x})| dx.$$

Консервативность метода выражается в том, что при переходе с одного слоя по времени на следующий слой, численное решение сохраняет норму с учетом коррекции, сформированной от границ втекания и вытекания, а также от функции правой части $f(t, \mathbf{x})$. Чтобы в этом убедиться, умножим (17) на $\text{meas}(\omega_s)$, просуммируем по всем $s = 0, \dots, N$ и получим

$$\int_{\bar{D}} \rho^h(t_k, \mathbf{x}) dx = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^{p(s)} \rho_i^{h,k-1} \text{meas}(R_i) + \sum_{s=1}^N I(Q_{\text{in},s}^{k-1}) + \tau \sum_{s=1}^N f(t_k, \mathbf{x}_s) \text{meas}(\omega_s). \quad (18)$$

Двойная сумма в правой части (18) пробегает по всем множествам R_i , значения в которых используются для вычисления функции $\rho^h(t_k, \mathbf{x})$ на слое по времени $t = t_k$. Обозначим

$$D_{\text{used}} = \bigcup_{s=1}^N \bigcup_{i=1}^{p(s)} \text{meas}(R_i), \quad D_{\text{out}} = \bar{D} \setminus D_{\text{used}}.$$

Здесь множество D_{out} определяет, например, массу с плотностью $\rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x})$, которая вытечет через границу вытекания Γ_{out} за время $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Несложно видеть, что

$$\sum_s^N I(Q_{\text{in},s}^{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{\text{in}}} |([U]_h \cdot \mathbf{n})| [\rho_{\text{in}}]_h dQ dt, \quad \tau \sum_{s=0}^N f(t_k, \mathbf{x}_s) \text{meas}(\omega_s) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\bar{D}} [f]_h(t, \mathbf{x}_s) dx dt,$$

где обозначение $[f]_h$ означает кусочно-постоянную функцию такую, что $\forall \mathbf{x} \in \omega_s [f]_h(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}_s)$ и $\forall t \in [t_{k-1}, t_k] [f]_h(t, \mathbf{x}) = f(t_k, \mathbf{x})$. Тогда из (18) получим закон сохранения (балансовое соотношение),

учитывающий границы втекания и вытекания, а также функцию правой части

$$\begin{aligned} \|\rho^h(t_k, \mathbf{x})\|_{L_1(\bar{D})} &= \|\rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x})\|_{L_1(\bar{D})} - \int_{D_{out}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{in}} |([U]_h \cdot \mathbf{n})| [\rho_{in}]_h \, dQ \, dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\bar{D}} [f]_h(t, \mathbf{x}_s) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

4. Результаты вычислительных экспериментов. Разработанный алгоритм был реализован на языке C++ с использованием компилятора g++. Триангуляции расчётных областей были получены с помощью стандартного пакета `pdeool` в среде MATLAB. Алгоритм был протестирован на серии расчетов для подтверждения первого порядка сходимости и для проверки выполнения закона сохранения.

В первой тестовой задаче использовались известные гладкие функции для исследования сходимости численного решения к точному решению. В качестве точного (искомого) решения была выбрана функция $\rho(t, x, y) = 10 + \sin(txy)$, $t \in [0, 0.05]$. Также были использованы функции скоростей $u(t, x, y) = 0.5tx(1 + \cos(\pi y))$, $v(t, x, y) = tx \sin(\pi y)$, а функция правой части $f(t, x, y)$ вычислялась аналитически подставкой указанных функций $\rho(t, x, y)$, $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ в (1). Погрешность численного решения оценивалась в виде разности точного и численного решений $\delta\rho^{h,k} = \rho^{h,k} - \rho(t_k, x, y)$, взятых в узлах сетки \bar{D}_h . Для вычисления норм погрешности функции $\delta\rho^{h,k}$ была доопределена кусочно-постоянной на всем множестве \bar{D} так, что

$$\|\delta\rho^{h,k}\|_{L_1} = \sum_{s=0}^N \left| \rho_s^{h,k} - \rho(t_k, \mathbf{x}_s) \right| \text{meas}(\omega_s).$$

При проведении вычислительного эксперимента отношение шага по времени τ к величине h было зафиксировано в виде $\tau = 0.1h$. Для исследования сходимости метода расчеты были проведены на последовательности сгущающихся сеток с шагом $h = (\frac{1}{2})^n$, $n = 1, \dots, 8$. При построении серии сеток с помощью пакета `pdeool` задавались параметры h и N на самой грубой сетке, а по мере уменьшения h параметр N вычислялся автоматически так, что $N = O(h^{-1})$. Количество шагов по времени составляло 2^{n-1} . Для удобства через $\rho^{h,n}$ обозначили решение, полученное на последнем слое по времени и использовали обозначения $\varepsilon_n = \|\rho(T, \mathbf{x}) - \rho^{h,n}(T, \mathbf{x})\|_{L_1}$. В таблице 1 представлены ε_n и оценка порядка сходимости $K(n)$, вычисляемая по формуле $K(n) = \log_2(\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1})$.

Таблица 1
Table 1

Результаты вычислений для тестовой задачи №1
Data of the numerical experiment 1

Номер расчета n	Шаг сетки h	Количество шагов по времени M	Норма погрешности ε_n	$K(n)$
1	2^{-1}	1	$6.97 \cdot 10^{-1}$	—
2	2^{-2}	2	$2.72 \cdot 10^{-1}$	1.35
3	2^{-3}	4	$1.54 \cdot 10^{-1}$	0.82
4	2^{-4}	8	$7.47 \cdot 10^{-2}$	1.04
5	2^{-5}	16	$3.56 \cdot 10^{-2}$	1.07
6	2^{-6}	32	$1.74 \cdot 10^{-2}$	1.04
7	2^{-7}	64	$8.57 \cdot 10^{-3}$	1.02
8	2^{-8}	128	$4.25 \cdot 10^{-3}$	1.01

Таким образом, вычислительные эксперименты показали, что при фиксированном отношении τ и h наблюдается первый порядок сходимости численного решения к точному решению в норме пространства L_1 .

Задача следующего вычислительного эксперимента состояла в том, чтобы проверить выполнение закона сохранения для численного решения как при переходе с одного слоя по времени на следующий слой, так и за все время расчетов. Для этого в качестве начального решения использовалась разрывная функцию

$$\rho_{init}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq R^2; \\ 0, & \text{если } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| > R^2, \end{cases}$$

где $R = 0.1$, $\mathbf{x}_c = (0.2, 0.5)$, $t \in [0, 4]$. Функции скорости и правой части задавались в виде

$$u = \cos(\pi t) \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), \quad v = -\cos(\pi t) \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y), \quad f = 0.$$

Поскольку функции скорости на границе вычислительной области $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ равны нулю и $f(t, x) = 0$, то норма численного решения не должна меняться со временем. В серии расчетов мы сравнивали норму решения в начальный и в конечный моменты времени $I_0 = \|\rho^h(0, x)\|_{L_1}$, $I_1 = \|\rho^h(T, x)\|_{L_1}$

В таблице 2 приведены результаты расчетов, которые демонстрируют сохранение нормы решения, что подтверждает консервативность метода.

Таблица 2
Table 2

Результаты вычислений для тестовой задачи №2
Calculation results for test 2

Шаг сетки h	Количество временных шагов M	Начальная норма I_0	$ I_1 - I_0 $
0.1	40	3.00E-02	7.98E-17
0.05	80	2.75E-02	2.91E-16
0.025	160	2.94E-02	6.80E-16
0.0125	320	3.05E-02	1.16E-15

Из таблицы 2 видно, что нормы численных решений на первом и последнем слоях по времени различаются на величину $1.E - 15$, что примерно соответствует нулю в машинной арифметике для типа double на языке C++.

4. Заключение. Для двумерного уравнения неразрывности представлен алгоритм из семейства полулагранжевых методов, основанный на точном тождестве пространственных интегралов на соседних слоях по времени. Полулагранжевые методы обеспечивают выполнение условия Куранта – Фрадрикса – Леви без ограничения на шаг по времени, поэтому алгоритмы из этого семейства более гибки в адаптации временных шагов к требуемой точности. Описанный подход позволяет найти численное решение задачи на неструктурированной треугольной сетке и имеет первый порядок сходимости численного решения к точному решению для гладких решений. Отметим, что некоторые современные полулагранжевые алгоритмы имеют сходимость более высоких порядков. Однако такие методы, как известно, плохо себя показывают на разрывных решениях, так как рядом с точкой разрыва в численном решении появляются осцилляции. Недостатком метода первого порядка является искусственная вязкость, но ее можно уменьшить посредством сгущения сетки рядом с точкой или линией разрыва. Существенным преимуществом описанного подхода является выполнение закона сохранения (балансового соотношения) для численного решения. Предложенный в статье алгоритм может быть теоретически обобщен на трехмерный случай, где вместо треугольников используются тетраэдры. Однако на практике программная реализация алгоритма поиска пересечения двух трехмерных многогранников является вычислительно затратой. Поэтому результаты от использования такого подхода в трехмерном случае могут быть хуже при прочих равных вычислительных затратах, чем результаты расчетов на структурированных кубических сетках. Вместе с тем, исследования в этой области продолжаются, и мы надеемся, что в ближайшем будущем мы сможем улучшить алгоритмы из семейства полулагранжевых методов, так, чтобы использовать неструктурированные сетки в трехмерных задачах.

Список литературы

1. Wiin-Nielson A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting. *Tellus*. 1959; 11: 180–186.
2. Levy D., Puppo G., and G. Russo. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 1999; 33(3): 547–571.
3. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes. *Journal of Computational Physics*. 1988; 77: 439–471.
4. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*. 1998; 67 (221): 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2
5. Simmons A. Development of a high resolution, semi-Lagrangian version of the ecmwf forecast model. *In Seminar on Numerical Methods in Atmospheric Models. ECMWF*. 1991; 281-324.
6. Iske A., Käser M. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2004; 20: 388–411.
7. Terekhov K.M., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V. A semi-Lagrangian method on dynamically adapted octree meshes. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30 (6): 363–380. DOI: 10.1515/rnam-2015-0033
8. Staniforth A., Cote J. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models – A Review. *Monthly Weather Review*. 1991; 119: 2206-2223.
9. Falcone M., Ferretti R. Semi-Lagrangian Approximation Schemes for Linear and Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM*. 2013; 174 p.

10. Шайдуров В.В., Чередниченко О.М. Полулагранжевы аппроксимации оператора конвекции в симметричной форме. *Вычислительные технологии*. 2023; 28 (3): 101-116. doi: 10.25743/ICT.2023.28.3.007
11. Вяткин А.В., Кучунова Е.В., Шайдуров В.В. Полулагранжевый метод решения двумерного уравнения неразрывности с законом сохранения. *Вычислительные технологии*. 2017; 22 (5): 27-38.
12. Scroggs J.S., Semazzi F.H. A conservative semi-Lagrangian method for multi-dimensional fluid dynamics applications. *North Carolina State University. Center for Research in Scientific Computation*. 1993.
13. Shaydurov V., Vyatkin A., Kuchunova E. A Semi-Lagrangian Numerical Method for the Three-Dimensional Advection Problem with an Isoparametric Transformation of Subdomains. *Numerical analysis and its application*. 2017; 10187: 599-607. DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0.
14. Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *NumerischeMathematik*. 1982; 38(3): 309–332.
15. Carlini E., Falcone M., and Ferretti R. A time-adaptive semi-Lagrangian approximation to mean curvature motion. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. 2006; 732–739.
16. Losasso F., Fedkiw R., Osher S. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow. *Computational Fluids*. 2006; 35: 995-1010. DOI: 10.1016/j.compfluid.2005.01.006
17. Wang K. A uniformly optimal-order error estimate of an ELLAM scheme for unsteady-state advection-diffusion equations. *International journal of numerical analysis and modeling*. 2008; 5(2): 286-302.
18. Arbogas T., Wen-Hao Wang. Convergence of a fully conservative volume corrected characteristic method for transport problems. *SIAM Journal of numerical analysis*. 2010; 48(3): 797-823. DOI:10.1137/09077415X
19. Vyatkin A., Kuchunova E., Shaydurov V. The conservative semi-Lagrangian approximation for three-dimensional convection-diffusion problem. *AIP Conference Proceedings*. 2022; 2522: 1100010. DOI: 10.1063/5.0100835
20. Shaydurov V., Efremov A., Gileva L. Semi-Lagrangian difference approximations for distinct transfer operators. *AIP Conference Proceedings*. 2018; 2025: 020004. DOI: 10.1063/1.5064877
21. Xiong T., Russo G., Qiu J. Conservative multi-dimensional semi-Lagrangian finite difference scheme: stability and applications to the kinetic and fluid simulations. *Journal of scientific computing*. 2019; 79(2). DOI:10.1007/s10915-018-0892-6.
22. Shaidurov V.V., Vyatkin A.V., Kuchunova E.V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements. *Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling*. 2018; 33(2): 123-135. DOI: 10.1515/rnam-2018-0011
23. Lentine M., Gretaarsson J.T., Fedkiw R. An unconditionally stable fully conservative semi-Lagrangian method. *Journal of Computational Physics*. 2011; 230: 2857-2879.
24. Dementyeva E., Karepova E, Shaidurov V. The semi-Lagrangian method for the Navier-Stokes problem for an incompressible fluid. *AIP conference proceedings*. 2017; 1895: 110001. DOI: 10.1063/1.5007407
25. Celledonia E., Kometaa B. K., Verdiera O. High order semi-Lagrangian methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*. 2016; 91-115 DOI:10.1007/s10915-015-0015-6
26. Shaydurov V., Shchepanovskaya G., Yakubovich M., Liu T. A semi-Lagrangian approximation in the Navier-Stokes equations for the gas flow around a wedge. *AIP Conference Proceedings*. 2015; 1684: 090011. DOI: 10.1063/1.4934336
27. Jonathan R. Sh. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*. 2002; 22: 21-74.

References

1. Wiin-Nielson A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting. *Tellus*. 1959; 11: 180–186.
2. Levy D., Puppo G., and G. Russo. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 1999; 33(3): 547–571.
3. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes. *Journal of Computational Physics*. 1988; 77: 439–471.
4. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*. 1998; 67 (221): 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2
5. Simmons A. Development of a high resolution, semi-Lagrangian version of the ecmwf forecast model. *In Seminar on Numerical Methods in Atmospheric Models. ECMWF*. 1991; 281-324.
6. Iske A., Käser M. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2004; 20: 388–411.
7. Terekhov K.M., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V. A semi-Lagrangian method on dynamically adapted octree meshes. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30 (6): 363–380. DOI: 10.1515/rnam-2015-0033
8. Staniforth A., Cote J. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models — A Review. *Monthly Weather Review*. 1991; 119: 2206-2223.

9. Falcone M., Ferretti R. Semi-Lagrangian Approximation Schemes for Linear and Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM*. 2013; 174 p.
10. Shaydurov V.V., Cherednichenko O.M. Semi-Lagrangian approximations of the convection operator in symmetric form. *Computational Technologies*. 2023; 28 (3): 101-116. doi: 10.25743/ICT.2023.28.3.007 (in Russian).
11. Vyatkin A.V., Kuchunova E.V., Shaydurov V.V. Polulagranzhevyy metod resheniya dvumernogo uravneniya nerazryvnosti s zakonom sokhraneniya. [Semi-Lagrangian method for solving a two-dimensional advection problem with a conservation law] *Computational Technologies*. 2017; 22 (5): 27-38.
12. Scroggs J.S., Semazzi F.H. A conservative semi-Lagrangian method for multi-dimensional fluid dynamics applications. *North Carolina State University. Center for Research in Scientific Computation*. 1993.
13. Shaydurov V., Vyatkin A., Kuchunova E. A Semi-Lagrangian Numerical Method for the Three-Dimensional Advection Problem with an Isoparametric Transformation of Subdomains. *Numerical analysis and its application*. 2017; 10187: 599-607. DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0.
14. Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *NumerischeMathematik*. 1982; 38(3): 309-332.
15. Carlini E., Falcone M., and Ferretti R. A time-adaptive semi-Lagrangian approximation to mean curvature motion. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. 2006; 732-739.
16. Losasso F., Fedkiw R., Osher S. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow. *Computational Fluids*. 2006; 35: 995-1010. DOI: 10.1016/j.compfluid.2005.01.006
17. Wang K. A uniformly optimal-order error estimate of an ELLAM scheme for unsteady-state advection-diffusion equations. *International journal of numerical analysis and modeling*. 2008; 5(2): 286-302.
18. Arbogast T., Wen-Hao Wang. Convergence of a fully conservative volume corrected characteristic method for transport problems. *SIAM Journal of numerical analysis*. 2010; 48(3): 797-823. DOI:10.1137/09077415X
19. Vyatkin A., Kuchunova E., Shaydurov V. The conservative semi-Lagrangian approximation for three-dimensional convection-diffusion problem. *AIP Conference Proceedings*. 2022; 2522: 1100010. DOI: 10.1063/5.0100835
20. Shaydurov V., Efremov A., Gileva L. Semi-Lagrangian difference approximations for distinct transfer operators. *AIP Conference Proceedings*. 2018; 2025: 020004. DOI: 10.1063/1.5064877
21. Xiong T., Russo G., Qiu J. Conservative multi-dimensional semi-Lagrangian finite difference scheme: stability and applications to the kinetic and fluid simulations. *Journal of scientific computing*. 2019; 79(2). DOI:10.1007/s10915-018-0892-6.
22. Shaidurov V.V., Vyatkin A.V., Kuchunova E.V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements. *Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling*. 2018; 33(2): 123-135. DOI: 10.1515/rnam-2018-0011
23. Lentine M., Gretarsson J.T., Fedkiw R. An unconditionally stable fully conservative semi-Lagrangian method. *Journal of Computational Physics*. 2011; 230: 2857-2879.
24. Dementyeva E., Karepova E., Shaidurov V. The semi-Lagrangian method for the Navier-Stokes problem for an incompressible fluid. *AIP conference proceedings*. 2017; 1895: 110001. DOI: 10.1063/1.5007407
25. Celledonia E., Kometa B. K., Verdiera O. High order semi-Lagrangian methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*. 2016; 91-115 DOI:10.1007/s10915-015-0015-6
26. Shaydurov V., Shchepanovskaya G., Yakubovich M., Liu T. A semi-Lagrangian approximation in the Navier-Stokes equations for the gas flow around a wedge. *AIP Conference Proceedings*. 2015; 1684: 090011. DOI: 10.1063/1.4934336
27. Jonathan R. Sh. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*. 2002; 22: 21-74.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 16.10.2023

Received October 16, 2023

Поступила после рецензирования 28.11.2023

Revised November 28, 2023

Принята к публикации 02.12.2023

Accepted December 2, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кучунова Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент Базовой кафедры Вычислительных и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Вяткин Александр Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elena V. Kuchunova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computing and Information Technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Alexander V. Vyatkin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Researcher, Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia