УДК 517.95
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-405-410

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE STRING EQUATION

В.П. Бурский
V.P. Burskii

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Россия, Московская область, 141701, г. Долгопрудный, Институтский пр., 9

Moscow institute of physics and technology,
9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russian Federation

E-mail: bvp30@mail.ru

Аннотация
В работе рассмотрены решения уравнения колебания струны в пространстве обобщенных функций, в пространстве квадратично суммируемых функций, а также в шкале соболевских пространств, и на такие решения распространяется представление Даламбера.

Abstract
In this paper we consider solutions of the string oscillation equation in the space of generalized functions, in the space of quadratically summable functions, and also in the scale of Sobolev spaces, and the D'Alembert representation is extended onto such solutions.

Ключевые слова: Уравнение колебания струны, представление Даламбера, обобщенные решения.
Keywords: String equation, D'Alembert representation, generalized solutions.

В различных исследованиях процессов, описываемых гиперболическими уравнениями, при рассмотрении решений иногда возникает потребность в привлечении обобщенных функций и их свойств, этому препятствует обычное в стандартной теории предположение о принадлежности решений пространствам достаточно гладких функций. В частности, при построении общей теории граничных задач на идеях Вишика и Хермандера (см. [1],[5]) необходимо рассматривать решения из пространства квадратично суммируемых функций. В настоящей работе будут рассмотрены решения уравнения колебания струны в пространстве обобщенных функций над областью, в пространстве $L_2(\Omega)$, а также в шкале соболевских пространств, и на такие решения мы распространим представление Даламбера. В работах [6–15] построены теории и приложения таких функций.

Пусть в ограниченной области на плоскости $\mathbf{R}^2$ переменных x_1, x_2 нам дано уравнение

$$Lu = 0 \tag{1}$$

где L – дифференциальный оператор с постоянными вещественными коэффициентами, порожденный дифференциальной операцией

$$a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \text{где } \mathrm{a, b, c} \in\in \mathbf{R},\ \mathrm{b}^2 - 4ac > 0.$$

Наши рассмотрения носят общий характер, но для определенности будем считать, что рассматриваемая область является открытым кругом K единичного радиуса.

Запишем символ оператора L в виде

$$l(\xi)=(a^1,\xi)(a^2,\xi)=(a_1^1\xi_1+a_2^1\xi_2)(a_1^2\xi_1+a_2^2\xi_2) \quad \xi\in\mathbf{R}^2$$

с вещественными векторами $a^1, a^2, |a^1|=1, |a^2|=1.$ В координатах $y=A^{-1}x,$ где $A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix},$ уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2}=0. \tag{2}$$

Пусть $\Delta=\det A, \varphi_0-$ угол между характеристиками: $\sin\varphi_0=\Delta.$ Матрица $A^{-1},$ очевидно, имеет вид $A=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_2^2 & -a_1^2 \\ a_2^1 & a_1^1 \end{pmatrix}.$ Обозначим $\tilde{a}^1=(-a_2^1,a_1^1), \tilde{a}^2=(-a_2^2,a_1^2).$ Тогда $y_1=-\frac{(\tilde{a}^2,x)}{\Delta}, y_2=\frac{(\tilde{a}^1,x)}{\Delta}.$ Ясно, что $(a^1,\tilde{a}^1)=(a^2,\tilde{a}^2)=0,$ так что $\tilde{a}^1,\tilde{a}^2-$ векторы, ортогональные характеристикам. Тогда в точках $a^1,-a^1, a^2,-a^2$ семейство характеристик будет касаться окружности $\partial K.$ После преобразования $x\to y$ векторы a^1,a^2 перейдут в единичные орты координатных осей, векторы $\tilde{a}^1,\tilde{a}^2-$ соответственно в $(-\cos\varphi_0;1)/\Delta,$ $(-1;\cos\varphi_0)/\Delta,$ круг K перейдет в эллипс $\tilde{K}$, причём в силу аффинности преобразования A^{-1} параллельные прямые переходят в параллельные прямые, поэтому наиболее удалённые от начала координат точки проекции замыкания эллипса $\tilde{K}$ на координатные оси y_1 и y_2 будут являться именно проекциями соответственно векторов $A^{-1}\tilde{a}^2,-A^{-1}\tilde{a}^2$ и векторов $A^{-1}\tilde{a}^1,-A^{-1}\tilde{a}^1.$ Таким образом, эллипс $\tilde{K}$ имеет проекцией на любую из координатных осей интервал $I_\alpha=[-\alpha;\alpha],$ где $\alpha=\operatorname{cosec}\varphi_0.$ Пусть $I=[-1;1].$

Обозначим через $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$ вес в пространстве $L_{p,\rho}(I)$ с нормой $\|u\|^2=\int_I\rho(t)\,|u(t)|^2\,dt.$ Обозначим через $\tilde{K}_0$ квадрат в плоскости переменных y с центром в начале координат: $\tilde{K}_0=[-\varsigma,\varsigma]\times[-\varsigma,\varsigma]$ с некоторым $\varsigma>\alpha$, а через K_0 обозначим образ $\tilde{K}_0$ после отображения $A.$. Пусть $\theta_0(x)=1$ при $x\in K_0,$ $\theta_0(x)=1$ при $x\notin K_0.$ Очевидно, что $\theta_0(x)=\theta_1((a^1,x))\,\theta_1((a^2,x)),$ где характеристическая функция интервала I: $\theta_1(x)=1, x\in I;$ $\theta_1(x)=0, x\notin I.$ Если $x\in\partial K$, а τ обозначает угловую координату, то $x(\tau)=(\cos\tau;\sin\tau);$ $(\tilde{a}^1,x)'_\tau=(a^1,x)'_\tau;$ $(a^1,x)'_\tau=-(\tilde{a}^1,x);$ $(\tilde{a}^2,x)'_\tau=(a^2,x)'_\tau;$ $(a^2,x)'_\tau=-(\tilde{a}^2,x).$

Утверждение 1. Если $u\in D'(K)-$ решение уравнения (1), то $\exists u_1\in D'(I),$ $\exists u_2\in D'(I),$ $u=i_1^*u_1+i_2^*u_2,$ где $i_1^*,i_2^*:D'(I)\to D'(K)-$ непрерывные вложения, действующие по правилу

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(I), <i_j^*u_j,\bar{\varphi}>=\lim_{n\to\infty}\int_K u_j^n((\tilde{a}^j,x))\,\varphi(x)\,dx,$$

$$u_j^n\in C_0^\infty(I),\ u_j^n\xrightarrow[n\to\infty]{D'(I)}u_j,\ j=1,2.$$

Доказательство. Пусть $y\in\tilde{K}-$ любая точка, $Y=(y_1-h_1;y_1+h_1)\times(y_2-h_2;y_2+h_2)-$ открытая прямоугольная окрестность точки y, с замыканием лежащая в $\tilde{K}$. Ограничение

$u_0 = u|_Y \in D'(Y)$ удовлетворяет уравнению (2). Производная $u'_{02} = \partial u_0 / \partial y_2$ принадлежит $D'(Y)$ и удовлетворяет уравнению $\partial u'_{02} / \partial y_1 = 0,$ поэтому функция u'_{02} от y_1 не зависит ([2], стр. 60) и $u'_{02} \in D'((y_2 - h_2; y_2 + h_2)).$ Поскольку в D' существует первообразная для любой функции, то мы имеем частное решение уравнения $u'_{02} = \partial u_0 / \partial y_2$, которое мы обозначим. Функция u_0 отличается от v_2 на функцию v_1 с нулевой производной $\partial v_1 / \partial y_2 = 0,$ поэтому $v_1 = v_1(y)$ не зависит от y_2 . Таким образом, $u_0 = v_1(y_1) + v_2(y_2),$ и локально мы получили искомое представление. Далее, если $(z_1 - \tilde{h}_1; z_1 + \tilde{h}_1) -$ интервал, имеющий непустое пересечение с $(y_1 - h_1; y_1 + h_1)$ такой, что прямоугольник $(z_1 - \tilde{h}_1; z_1 + \tilde{h}_1) \times (z_2 - \tilde{h}_2; z_2 + \tilde{h}_2)$ с замыканием лежит в $\tilde{K}$, то функция $\tilde{v}_1(y)$ из разложения $u_0 = v_1(y_1) + v_2(y_2),$ в последнем прямоугольнике в пересечении интервалов совпадает с $v_1(y_1)$ с точностью до аддитивной постоянной. Это следует из того, что в любом прямоугольнике из пересечения выполнено равенство $\tilde{v}_1(y_1) + \tilde{v}_2(y_2) = v_1(y_1) + v_2(y_2),$ которое можно дифференцировать. Вычитая из $\tilde{v}_1(y_1)$ постоянную, можно продолжить функцию u_1 с помощью новой функции $\tilde{v}_1$ на весь интервал $(z_1 - \tilde{h}_1; z_1 + \tilde{h}_1)$, пользуясь теоремой о склеивании ([2], стр. 27). Таким образом, мы получим функцию $v_1(y_1)$, заданную на I_α . То же мы можем проделать и с функцией $v_2(y_2)$.. Осталось заметить, что функция $v_1(y_1)$, рассматриваемая как функция из $D'(\mathbf{R})$, действует по правилу

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(K), < v_1, \hat{\varphi} >= \lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{K}} v_1^n(y_1)) \varphi(y)\, dy,$$

где $v_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{D'(I_\alpha)} v_1 \in D'(I_\alpha), v_1^n \in C_0^\infty(I_\alpha) -$ любая регуляризующая последовательность основных функций. Возвращаясь к координатам x (обозначая функцию $v_1(-y_1 / \Delta)$ как $u_2(y_1)$, а функцию $v_2(y_2 / \Delta)$ как $u_1(y_2),$ получим требуемое представление.

Утверждение 2. Функция $u \in L_p(K), 1 < \mathrm{p} < \infty$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $\exists u_1, \exists u_2 \in L_{p,\rho}(I),\ u(x) = u_1((\tilde{a}^1, x)) + u_2((\tilde{a}^2, x)),\ \rho = \sqrt{1 - t^2}.$

Доказательство. Как и при доказательстве утверждения 1 рассмотрим малый прямоугольник $Y = I_1 \times I_2 = (y_1 - h_1; y_1 + h_1) \times (y_2 - h_2; y_2 + h_2).$ Докажем сначала локальную принадлежность слагаемых пространству $u \in L_p.$ Нам дано, что сумма распределений $v_1(y_1) + v_2(y_2)$ лежит в $u \in L_p(K),$ а значит и ограничение на Y лежит в $u \in L_p(Y).$

Пусть $1/p + 1/q = 1,$ функции $\chi \in C_0^\infty(I_2), \psi \in C_0^\infty(I_1) -$ любые функции и $\phi = \psi'.$ Тогда

$$< u_1, \phi >_{I_1} < 1, \chi >_{I_2} = < u_1 \otimes 1, \phi(y_1) \chi(y_2) >_Y =$$

$$= - < u'_1, \psi(y_1) \chi(y_2) >_Y = - < \frac{\partial u}{\partial y_1}, \psi(y_1) \chi(y_2) >_Y = < u, \phi' \chi >_Y .$$

поэтому выполнено

$$| < u_1, \psi >_{I_1} | \le \|u\|_{L_p(Y)} \|\psi\|_{L_q(I_1)} | < 1, \chi > |^{-1} \|\chi\|_{L_q(I_2)} = C \|\psi\|_{L_q(I_1)} .$$

В силу произвольности ψ на любом заранее выбранном подинтервале и в силу плотности C_0^∞ в $L_q(I_1)$ получим, что $u_1 \in L_p(I_1)$. Аналогично для u_2. Доказана локальная суммируемость со степенью p.

Рассмотрим поведение функции $u_1(t)$ в окрестности $(1-\delta;1)$ конца $t=1$ интервала I, где $\delta > 0$ достаточно мало. Пусть v означает сегментную окрестность в круге K точки $\tilde{a}^1$ высоты δ. Можно выбрать δ так, чтобы v, если мы будем проектировать на ось вектора $\tilde{a}^2$ вдоль прямых, параллельных вектору $\tilde{a}^1$, проектировалось вовнутрь отрезка характеристики, порожденной вектором $\tilde{a}^2$, заключённого в круге. Поэтому функция $u_2((\tilde{a}^2,x))$ интегрируема со степенью p по множеству v. Поскольку по v интегрируема со степенью p сумма $u_1((\tilde{a}^1,x))+u_2((\tilde{a}^2,x))$, то интегрируема со степенью p и функция $u_1((\tilde{a}^1,x))$. Таким образом, конечен интеграл

$$\int_v |u_1((\tilde{a}^1,x))|^p\,dx = \int_{1-\delta}^{1} dt \int_{-\rho(t)}^{\rho(t)} |u_1(t)|^p\,dz = 2\int_{1-\delta}^{1} \rho(t)\,|u_1(t)|^p\,dt,$$

где $\mathrm{t}=(\tilde{a}^1,x)),\ z=(\tilde{a}^2,x)$.

Мы получили, что $u_1 \in L_{p,\rho}(I)$. Точно так же $u_2 \in L_{p,\rho}(I)$. Обращая доказательство, получим достаточность в этом утверждении. Доказательство закончено.

Определим соболевское пространство $H_\rho^m(I)$ как обычно ([3]), только интегрирование проводится с весом ρ.

Утверждение 3. Пусть $u \in H^m(K)-$ решение уравнения (1).

1). Если $m \in \mathbf{Z}$, тогда функции u_1,u_2 из утверждения 2 принадлежат пространству $H_\rho^m(I)$; наоборот, принадлежность $u_1,u_2 \in\in H_\rho^m(I)$ влечёт $u \in H^m(K)$.

2). Если $m \in \mathbf{R}, m>0$, то функции u_1,u_2 принадлежат $H_\rho^{m-0}(I)$ (определение через интерполяцию, см., напр.,[4]); наоборот, если $u_1,u_2 \in\in H_\rho^m(I)$, то $u \in H_\rho^{m-0}(K)$.

Доказательство. 1). Пусть $D^\alpha -$ любая производная порядка $|\alpha| \le m$. Тогда функция $D^\alpha u$ также является решением уравнения (1). В пространстве $D'(K)$ имеет место равенство

$$D^\alpha u = (\tilde{a}^1)^\alpha D^{|\alpha|} u_1((\tilde{a}^1,x)) + (\tilde{a}^2)^\alpha D^\alpha u_2((\tilde{a}^2,x)) = v_1((\tilde{a}^1,x)) + v_2((\tilde{a}^2,x)),$$

где $v_1,v_2 -$ функции из разложения Даламбера решения $D^\alpha u$. Выбирая $x=a^2t$, получим равенство $v_1=(\tilde{a}^1)^\alpha D^{|\alpha|}u_1$ с точностью до постоянной, поэтому из принадлежности $v_1 \in L_{2,\rho}(I)$ получим $u_1 \in H_\rho^m(I)$. . Аналогично для $u_2 : x=a^1t$. Обращая доказательство, получим достаточность.

2). Пусть $m \in (0;1)$. Тогда $H^m(K) \subset L_p(K)$ с $p<2/(1-m)$. Поэтому предположение, что $u \in H^m(K)-$ решение, влечёт принадлежность $u_1,u_2 \in\in L_{p,\rho}(I)$, что вместе с $u \in H^m(K)$ даёт $u_1,u_2 \in\in H_\rho^{m-\varepsilon}(I), \forall \varepsilon>0$. Наоборот, последние включения по теореме вложения дают $u_1,u_2 \in\in L_{p,\rho}(I),\ p<2/(1-\mathrm{m}+\varepsilon)$, по утверждению 2 это значит, что и $u \in L_p(K)$, а это вместе с гладкостью u_1,u_2 влечёт, что и $u \in H^{m-2\varepsilon}(K)$. Поскольку $\varepsilon>0-$ любое, то утверждение доказано.

Список литературы
References

1. Вишик М.И. 1952. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. Труды Московского математического общества, 1:187–246.

Vishik M.I. 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations. Trudy of the Moscow mathematical society, 1:187–246.

2. Владимиров В.С. 1979. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука.

Vladimirov V.S. 1979. Generalized functions in mathematical physics, Moscow: Nauka.

3. Лионс Ж.-М., Мадженес Э. 1971. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир.

Lions J.-M., Madjenis E. 1971. Non-homogeneous boundary-value problems and its applications, Moscow: Mir.

4. Трибель Х. 1980. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир.

Tribel H. 1980. Interpolation theory, functional spaces, differential operators. Moscow: Mir.

5. Хёрмандер Л. 1959. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М., ИЛ.

Hormander L. 1959. A theory of general partial differential operators. Moscow: IL.

6. Бабаян А.О. 2003. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге . Известия НАН Армении, Математика. 38(6): 39–48.

Babaian A.O. 2003. Zadacha Dirikhle dlia pravil`no e`llipticheskikh uravnenii` v edinichnom kruge . Izvestiia NAN Armenii, Matematika. 38(6): 39–48.

7. Бицадзе А.В. 1948. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. Успехи матем. наук, 3(6): 211–212.

Bitcadze A.V. 1948. O edinstvennosti resheniia zadachi Dirikhle dlia e`llipticheskikh uravnenii` s chastny`mi proizvodny`mi. Uspehi matem. nauk, 3(6): 211–212.

8. Бицадзе А.В. 1981. Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Наука.

Bitcadze A.V. 1981. Nekotory`e classy` differentcial`ny`kh uravnenii` s chastny`mi proizvodny`mi. M.: Nauka.

9. Бурский В.П. 1993. О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов. Укр. мат. журнал. 45 (11) : 1476–1483.

Burskii` V.P. 1993. O kraevy`kh zadachakh dlia e`llipticheskogo uravneniia s kompleksny`mi koe`ffitcientami i odnoi` probleme momentov. Ukr. mat. zhurnal. 45 (11) : 1476–1483.

10. Егоров Ю.В., Шубин М.А. 1987. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30. 1–264.

Egorov Iu.V., Shubin M.A. 1987. Leenei`ny`e differentcial`ny`e uravneniia s chastny`mi proizvodny`mi. Osnovy` classicheskoi` teorii. Sovremenny`e problemy` matematiki. Fundamental`ny`e napravleniia. T. 30. 1–264.

11. Лопатинский Я.Б. 1953. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. журнал, 5(2): 123–151.

Lopatinskii` Ia.B. 1953. Ob odnom sposobe privedeniia granichny`kh zadach dlia sistem differentcial`ny`kh uravnenii` e`llipticheskogo tipa k reguliarny`m integral`ny`m uravneniiam. Ukr. mat. zhurnal, 5(2): 123–151.

12. Панеях Б.П. 1981. К теории разрешимости задачи с косой производной. Мат. сборник, 114 (156): 226–268.

Paneiakh B.P. 1981. K teorii razreshimosti zadachi s kosoi` proizvodnoi`. Mat. sbornik, 114 (156): 226–268.

13. Товмасян Н.Е. 1968. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Известия Академии Наук Армянской ССР, 3(6): 497–521.

Tovmasian N.E. 1968. Novy`e postanovki i issledovaniia pervoi`, vtoroi` i tret`ei` kraevy`kh zadach dlia sil`no sviazanny`kh e`llipticheskikh sistem dvukh differentcial`ny`kh uravnenii` vtorogo poriadka s postoianny`mi koe`ffitcientami. Izvestiia Akademii Nauk Armianskoi` SSR, 3(6): 497–521.

14. Товмасян Н.Е. 1969. Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом. Дифференциальные уравнения. 5(1): 60–71.

Tovmasian N.E. 1969. E`ffektivny`e metody` resheniia zadachi Dirikhle dlia e`llipticheskikh sistem differentcial`ny`kh uravnenii` vtorogo poriadka s postoianny`mi koe`ffitcientami v oblastiakh, ogranichenny`kh e`llipsom. Differentcial`ny`e uravneniia. 5(1): 60-71.

15. Хёрмандер Л. 1967. Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи. В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир: 166–297.

KHyormander L. 1967. Psevdodifferentcial`ny`e operatory` i nee`llipticheskie kraevy`e zadachi. V kn.: Psevdodifferentcial`ny`e operatory`. M.: Mir: 166–297.