Прикладная математика & Физика, 2023, том 55, № 4. С. 289–298.
Applied Mathematics & Physics, 2023, Volume 55, No 4. P. 289–298.

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.9
MSC 34G20, 35R11, 34A08
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-289-298

Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера

Федоров В. Е., Скорынин А. С.
(*Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым*)

Челябинский государственный университет,
Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
kar@csu.ru, skorynin@csu.ru

Аннотация. Исследованы вопросы разрешимости задачи типа Коши для линейных и квазилинейных уравнений с дробными производными Хилфера, разрешенные относительно производной старшего порядка. Линейный оператор при неизвестной функции в уравнении предполагается ограниченным. Доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения. С помощью полученной при этом формулы решения задача типа Коши для квазилинейного дифференциального уравнения редуцирована к интегро-дифференциальному уравнению вида $y = G(y)$. При условии локальной липшицевости нелинейного оператора в уравнении доказана сжимаемость оператора G в выбранном подходящим образом метрическом пространстве функций на достаточно малом отрезке. Тем самым доказана теорема о существовании единственного локального решения задачи типа Коши для квазилинейного уравнения. Результат об однозначной глобальной разрешимости этой задачи получен путем доказательства сжимаемости достаточно большой степени оператора G в специальном пространстве функций на изначально заданном отрезке при выполнении условия Липшица на нелинейный оператор в уравнении. Общие результаты использованы для исследования задач типа Коши для квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: производная Хилфера, задача типа Коши, функция Миттаг – Леффлера, квазилинейное уравнение, теорема о сжимающем отображении, локальная разрешимость, глобальная разрешимость

Благодарности: Работа выполнена при финансировании за счет средств гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

Для цитирования: Федоров В. Е., Скорынин А. С. 2023. Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 289–298. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-289-298

Original Research

A Class of Quasilinear Equations with Hilfer Derivatives

Vladimir E. Fedorov, Anton S. Skorynin
(*Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev*)

Chelyabinsk State University,
129 Bratyev Kashirinykh st., Chelyabinsk, 454001, Russia
kar@csu.ru, skorynin@csu.ru

Abstract. We investigate the solvability issues of the Cauchy type problem for linear and quasilinear equations with Hilfer fractional derivatives resolved with respect to the higher-order derivative. The linear operator at the unknown function in the equation is assumed to be bounded. The unique solvability of the Cauchy type problem for a linear inhomogeneous equation is proved. Using the resulting solution formula, we reduce the Cauchy type problem for the quasilinear differential equation to an integro-differential equation of the form $y = G(y)$. Under the local Lipschitz condition of the nonlinear operator in the equation, the contraction of the operator G in a suitably chosen metric space of functions on a sufficiently small segment is proved. Thus, we prove the theorem on the existence of a unique local solution to a Cauchy type problem for the quasilinear equation. The result on the unique global solvability of this problem is obtained by proving the contraction of a sufficiently large degree of the operator G in a special space of functions on an initially given segment when the Lipschitz condition on a nonlinear operator in the equation is fulfilled. We use the general results to study Cauchy type problems for a quasilinear system of ordinary differential equations and for a quasilinear system of integro-differential equations.

Keywords: Hilfer Derivative, Cauchy Type Problem, Mittag – Leffler Function, Quasilinear Equation, Contraction Mapping Theorem, Local Solvability, Global Solvability

Acknowledgements: The work was funded by the grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools, project number NSH-2708.2022.1.1.

For citation: Fedorov V. E., Skorynin A. S. 2023. A Class of Quasilinear Equations with Hilfer Derivatives. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 289–298. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-289-298

1. Введение. В последнее десятилетие интерес к исследованию математических моделей различных процессов, базирующихся на дробном интегро-дифференциальном исчислении, неизменно растет [1, 2, 3, 4, 5]. Помимо наиболее часто используемых дробных производных Римана – Лиувилля и Герасимова – Капуто [6, 7, 8, 9] все большую значимость в последние годы приобретает двупараметрическая производная Хилфера [10], являющаяся обобщением упомянутых производных и представляющая интерес с точки зрения математического моделирования [3, 10]. Уравнения с дробной производной Хилфера исследовались в работах многих авторов, см., например, [11, 12, 13].

В данной работе исследуются квазилинейные уравнения в банаховом пространстве с дробными производными Хилфера, разрешенные относительно производной старшего порядка. Линейный оператор при неизвестной функции в уравнении предполагается ограниченным. В §2 доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{1}$$

для линейного неоднородного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T],$$

при этом решение выражается через оператор-функции Миттаг – Леффлера. Здесь $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство. В §3 с помощью формулы решения задача типа Коши для квазилинейного дифференциального уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)) \tag{2}$$

редуцирована к интегро-дифференциальному уравнению вида $y = G(y)$. Здесь же показана полнота специально построенного пространства функций $C_{\alpha,\beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$. При условии локальной липшицевости нелинейного оператора B доказана сжимаемость оператора G в выбранном подходящим образом метрическом пространстве функций из $C_{\alpha,\beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ при достаточно малом $t_1 - t_0 > 0$. Тем самым доказана теорема о существовании единственного локального решения задачи типа Коши. Аналогичный результат о глобальной разрешимости задачи (1), (2) получен в §4. Для этого доказана сжимаемость достаточно большой степени оператора G в банаховом пространстве $C_{\alpha,\beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$ при выполнении условия Липшица на оператор B. Абстрактные результаты приложены к исследованию задачи типа Коши для квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений.

2. Производная Хилфера и линейное уравнение. Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$. Для $\delta > 0$, $t > t_0$ определим функции $g_\delta(t) := (t-t_0)^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$, где $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция. Дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $\alpha > 0$ определим следующим образом:

$$J^\alpha f(t) := \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds, \quad J^0 f(t) := f(t) \quad t > t_0.$$

Множество операторов дробного дифференцирования обладает полугрупповым свойством

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t).$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, задается равенством

$${}^R D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t),$$

где $D^m = \dfrac{d^m}{dt^m}$ — обычная производная целого порядка. Будем также использовать обозначение ${}^R D^{-\alpha} f(t) := J^\alpha f(t)$ при $\alpha \geq 0$.

Как известно, имеет место равенство при $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$

$$J^{m-\alpha} D^m f(t) = D^m J^{m-\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D^k f(t_0) \right) \tag{3}$$

при условии, что выражения в обеих частях этого равенства имеет смысл. Это позволяет определить производную Герасимова – Капуто ${}^C D^\alpha f(t)$ правой частью равенства (3), которая имеет смысл для более широкого класса функций, чем его левая часть.

Производная Хилфера обычно определяется как $D^{\alpha,\beta}f(t) := J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t)$, где $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{Z}$, $0 \le \beta \le 1$. Для $\alpha \le 0$ имеем $m \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$, тогда

$$D^{\alpha,\beta}f(t) := J^{\beta(m-\alpha)}J^{-m}J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t) = J^{-\alpha}.$$

В случае же $\alpha > 0$, рассуждая по аналогии с предыдущем абзацем, определим

$$D^{\alpha,\beta}f(t) := D^{m-\beta(m-\alpha)}\left(J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}f(t_0)\right) \tag{4}$$

и далее будем понимать производную Хилфера в смысле равенства (4).

Замечание 2.1. Производная $J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t)$ является производной Джрбашяна–Нерсесяна [14], ассоциированной с набором показателей $\alpha_0 = 1-(1-\beta)(m-\alpha)$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\ldots$, $\alpha_{m-1} = 1$, $\alpha_m = 1-\beta(m-\alpha))$.

Преобразование Лапласа от функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ обозначим $\mathfrak{L}[f]$.

Лемма 2.1. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{Z}$, $0 \le \beta \le 1$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ имеет производную Хилфера и преобразование Лапласа. Тогда*

$$\mathfrak{L}[D^{\alpha,\beta}f](\lambda) = \lambda^{\alpha}\mathfrak{L}[f](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{m-1-k-\beta(m-\alpha)}D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}f(0).$$

Доказательство. По условию леммы $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z})$, поэтому по формуле Пеано

$$g(t) := J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}f(0) = o(t^{m-1}), \quad t \to 0+.$$

Следовательно, $D^{l-\beta(m-\alpha)}g(0) = 0$ при $l = 0,1,\ldots,m-1$. Поэтому по формуле (1.22) из [15]

$$\mathfrak{L}\left[D^{m-\beta(m-\alpha)}\left(J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}f(0)\right)\right] =$$

$$= \lambda^{m-\beta(m-\alpha)}\mathfrak{L}\left[J^{(1-\beta)(m-\alpha)}f(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}f(0)\right] - \sum_{l=0}^{m-1}D^{l-\beta(m-\alpha)}g(0)\lambda^{m-1-l} =$$

$$= \lambda^{m-\beta(m-\alpha)}\left(\lambda^{-(1-\beta)(m-\alpha)}\mathfrak{L}[f] - \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^{-k-1}D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}f(0)\right).$$

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta \le 1$. Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x(t_0) = x_k \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{5}$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t > t_0. \tag{6}$$

Решением задачи (5), (6) будем называть функцию $x \in C((t_0,T];\mathcal{Z})$, для которой $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x \in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, существует $D^{\alpha,\beta}x \in C((t_0,T];\mathcal{Z})$, выполняются условия (5) и равенство (6).

Далее будем использовать функцию Миттаг – Леффлера

$$E_{\gamma,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\gamma k+\delta)}, \quad \gamma,\delta > 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $f \in C([t_0,T];\mathcal{Z})$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta \le 1$. Тогда при любых $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, существует единственное решение задачи* (5), (6), *при этом оно имеет вид*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^{\alpha}A)x_k + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}A)f(s)ds.$$

Доказательство. Имеем при $l,k = 0,1,\ldots,m-1$, $l \le k$

$$D^{l-(1-\beta)(m-\alpha)}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^{\alpha}A) = (t-t_0)^{k-l}E_{\alpha,k-l+1}((t-t_0)^{\alpha}A),$$

при $l > k$

$$D^{l-(1-\beta)(m-\alpha)}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A)=(t-t_0)^{k-l+\alpha}AE_{\alpha,k-l+\alpha+1}((t-t_0)^\alpha A).$$

Поэтому функция $y(t) := \sum\limits_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k$ удовлетворяет условиям (5), при этом

$$D^{\alpha,\beta}y(t)=D^{m-\beta(m-\alpha)}\left(\sum_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^kE_{\alpha,k+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}x_k\right)=$$

$$=D^{m-\beta(m-\alpha)}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{\alpha n+k}A^n}{\Gamma(\alpha n+k+1)}x_k=A\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^{\alpha n+k-(1-\beta)(m-\alpha)}A^n}{\Gamma(\alpha n+k-(1-\beta)(m-\alpha)+1)}x_k=Ay(t).$$

Рассмотрим $z(t) := \int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)f(s)ds$. При $l=0,1,\ldots,m-1$

$$D^{l-(1-\beta)(m-\alpha)}z(t)=\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1-l+(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,\alpha-l+(1-\beta)(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)f(s)ds|_{t=t_0}=0,$$

$$D^{\alpha,\beta}z(t)=D^{m-\beta(m-\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1+(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,\alpha+(1-\beta)(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)f(s)ds=$$

$$=D^m\int_{t_0}^{t}(t-s)^{m-1}E_{\alpha,m}((t-s)^\alpha A)f(s)ds=D^1\int_{t_0}^{t}E_{\alpha,1}((t-s)^\alpha A)f(s)ds=f(t)+Az(t).$$

Поэтому $x(t)=y(t)+z(t)$ является решением задачи (5), (6).

Замечание 2.2. Получение вида решения с помощью преобразования Лапласа осуществлено в статье [11].

Замечание 2.3. Можно заметить, что производная $J^{\beta(m-\alpha)}D^mJ^{(1-\beta)(m-\alpha)}z(t)$ в случае недифференцируемой функции f не определена, но производная Хилфера для функции z из доказательства теоремы 2.1 существует в смысле равенства (4).

3. Локальная разрешимость квазилинейного уравнения. Пусть $A\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $r\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m+r}$, $B:U\to\mathcal{Z}$, $m-1<\alpha\le m$, $\beta\in[0,1]$, $x_k\in\mathcal{Z}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, $t_0\in\mathbb{R}$. Решением начальной задачи

$$D^{\alpha,\beta}x(t)=Ax(t)+B(t,D^{\alpha-m-r,\beta}x(t),D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t),\ldots,D^{\alpha-1,\beta}x(t)), \tag{7}$$

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x(t_0)=x_k \quad k=0,1,\ldots,m-1, \tag{8}$$

на отрезке $[t_0,t_1]$ будем называть такую функцию $x\in C((t_0,t_1];\mathcal{Z})\cap L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, для которой $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x\in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{Z})$, существует $D^{\alpha,\beta}x\in C((t_0,T];\mathcal{Z})$, выполняются условия (8), справедливо включение $(t,D^{\alpha-m-r,\beta}x(t),D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t),\ldots,D^{\alpha-1,\beta}x(t))\in U$ при $t\in[t_0,t_1]$ и равенство (7) при $t\in(t_0,t_1]$.

Заметим, что $D^{\alpha-m-l,\beta}x(t):=J^{m-\alpha+l}x(t)$ при $l=0,1,\ldots,r$.

Лемма 3.1. *Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $0\le\beta\le1$. Тогда линейное пространство*

$$C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z}):=\{x\in L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z}):J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}:=\|x\|_{L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z})}+\|J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ является банаховым.

Доказательство. Все аксиомы нормы проверяются непосредственно. В частности, если выполняется равенство $\|x\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}=0$, то $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x(t)\equiv0$, $x(t)\equiv D^{(1-\beta)(m-\alpha)}J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x(t)\equiv0$, поскольку $C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})\subset L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z})$.

Пусть последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, тогда существуют пределы $x:=\lim\limits_{k\to\infty}x_k\in L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $y:=\lim\limits_{k\to\infty}J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x_k\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. Так как $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}\in\mathcal{L}(L_1(t_0,t_1;\mathcal{Z}))$, имеем $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x=y$, поэтому $x\in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$ в $C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$. Таким образом, $C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ является банаховым пространством.

Замечание 3.1. Для $\alpha>0$, $\beta\in[0,1]$, $x\in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ имеем $D^{\alpha-l,\beta}x\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$ при любом $l\in\mathbb{N}$. Действительно, в таком случае $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x\in C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, поэтому при $l=1,2,\ldots,m-1$ $D^{\alpha-l,\beta}x=$

$J^{\beta(m-\alpha)}D^{m-l}J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, так как $J^{\beta(m-\alpha)} \in \mathcal{L}(C([t_0,t_1];\mathcal{Z}))$. Если же $l = m, m+1, \dots$, то $D^{\alpha-l,\beta}x = J^{\beta(m-\alpha)}J^{l-m}J^{(1-\beta)(m-\alpha)}x \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, так как $J^{\beta(m-\alpha)}J^{l-m} = J^{l-m+\beta(m-\alpha)} \in \mathcal{L}(C([t_0,t_1];\mathcal{Z}))$.

Замечание 3.2. По определению решение задачи (7), (8) лежит в $C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$.

Используя начальные данные $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ из (8), определим

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x_k}{\Gamma(k-(1-\beta)(m-\alpha)+1)}, \quad \tilde{x}_l = D^{\alpha-l,\beta}\tilde{x}(t_0),\ \ l = 1,2,\dots,m+r.$$

Заметим, что при $\alpha < m$, $\beta > 0$ справедливо равенство $\tilde{x}_k = 0$ для всех $k = 0,1,\dots,m-1$; при $\alpha = m$ или $\beta = 0$ имеем $\tilde{x}_k = x_k$, $k = 0,1,\dots,m-1$.

Лемма 3.2. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta \le 1$, U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^m$, $B \in C(U;\mathcal{Z})$, $(t_0, \tilde{x}_{m+r}, \tilde{x}_{m+r-1}, \dots, \tilde{x}_1) \in U$. Тогда функция x является решением задачи* (7), (8) *на отрезке $[t_0,t_1]$ в том и только в том случае, когда $x \in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, при всех $t \in [t_0,t_1]$ выполняется включение*

$$(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)) \in U \tag{9}$$

и равенство

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k +$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B(s, D^{\alpha-m-r,\beta}x(s), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(s), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(s))ds. \tag{10}$$

Доказательство. Если x является решением задачи (7), (8) на отрезке $[t_0,t_1]$, то $x \in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$ согласно замечанию 3.2, а в силу замечания 3.1 $D^{\alpha-l,\beta}x \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,m+r$, и выполняется включение (9) при всех $t \in [t_0,t_1]$. В этом случае отображение

$$t \to B(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)) \tag{11}$$

непрерывно действует из $[t_0,t_1]$ в пространство $\mathcal{Z}$. По теореме 2.1 выполняется равенство (10).

Пусть $x \in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$, при всех $t \in [t_0,t_1]$ выполняется включение (9) и равенство (10). Тогда $D^{\alpha-l,\beta}x \in C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$, $l = 1,2,\dots,m+r$, поэтому отображение (11) принадлежит классу $C([t_0,t_1];\mathcal{Z})$. Как при доказательстве теоремы 2.1 можно показать, что правая часть равенства (10) является решением задачи (7), (8).

Обозначим $\overline{z} := (z_1, z_2, \dots, z_{m+r}) \in \mathcal{Z}^{m+r}$, $S_\delta(\overline{z}) = \{\overline{y} \in \mathcal{Z}^{m+r} : \|y_l - z_l\|_{\mathcal{Z}} \le \delta,\ l = 1,2,\dots,m+r\}$. Отображение $B : U \to \mathcal{Z}$ называется локально липшицевым по $\overline{z}$, если при любом $(t,\overline{z}) \in U$ существуют такие $\delta > 0$, $q > 0$, что $[t-\delta, t+\delta]\times S_\delta(\overline{z}) \subset U$ и при всех $(s,\overline{y}), (s,\overline{v}) \in [t-\delta,t+\delta]\times S_\delta(\overline{z})$ выполняется неравенство

$$\|B(s,\overline{y}) - B(s,\overline{v})\|_{\mathcal{Z}} \le q\sum_{l=1}^{m+r}\|y_l - v_l\|_{\mathcal{Z}}. \tag{12}$$

Теорема 3.1. *Пусть $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta < 1$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0,1,\dots,m-1$, U — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m+r}$, отображение $B \in C(U;\mathcal{Z})$ локально липшицево по $\overline{z}$, выполняется включение $(t_0, \tilde{x}_{m+r}, \tilde{x}_{m+r-1}, \dots, \tilde{x}_1) \in U$. Тогда при некотором $t_1 > t_0$ задача* (7), (8) *имеет единственное решение на отрезке $[t_0,t_1]$.*

Доказательство. В силу леммы 3.2 достаточно доказать, что интегро-дифференциальное уравнение (10) при некотором $t_1 > t_0$ имеет единственное решение $x \in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_1;\mathcal{Z})$.

Выберем такие $\tau > 0$ и $\delta > 0$, что $[t_0,t_0+\tau]\times S_\delta(\overline{\tilde{x}}) \subset U$, где $\overline{\tilde{x}} = (\tilde{x}_{m+r}, \tilde{x}_{m+r-1}, \dots, \tilde{x}_1)$, и для некоторого $q > 0$ и для всех $(s,\bar{y}), (s,\bar{v}) \in [t_0,t_0+\tau]\times S_\delta(\overline{\tilde{x}})$ выполняется неравенство (12). Обозначим через $\mathcal{S}$ множество таких функций $x \in C_{\alpha,\beta}(t_0,t_0+\tau;\mathcal{Z})$, что $\|D^{\alpha-l,\beta}x(t) - \tilde{x}_l\|_{\mathcal{Z}} \le \delta$ при $t_0 \le t \le t_0+\tau$, $l = 1,2,\dots,m+r$. Определим метрику на $\mathcal{S}$ $d(y,z) := \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t_0+\tau;\mathcal{Z})}$, тогда в силу леммы 3.1 $\mathcal{S}$ — полное метрическое пространство. Заметим, что $\tilde{x} \in \mathcal{S}$ при достаточно малом $\tau > 0$. Для $l = m, m+1, \dots, m+r$ имеем

$$\|D^{\alpha-l,\beta}(y-z)\|_{C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z})} \le \|J^{l-m+\beta(m-\alpha)}\|_{\mathcal{L}(C([t_0,t_0+\tau];\mathcal{Z}))}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t_0+\tau;\mathcal{Z})} = Cd(y,z). \tag{13}$$

При $y \in \mathcal{S}$ определим оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B^y(s)ds,$$

где $B^y(s) := B(s, D^{\alpha-m-r,\beta}y(s), D^{\alpha-m-r+1,\beta}y(s), \dots, D^{\alpha-1,\beta}y(s))$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.1, получим, что $G(y) \in C((t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_0+\tau; \mathcal{Z})$, при этом

$$J^{(1-\beta)(m-\alpha)}G(y)(t) = \sum_{k=0}^{m-1}(t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k +$$

$$+\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1+(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,\alpha+(1-\beta)(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)B^y(s)ds \in C^{m-1}([t_0, t_0+\tau]; \mathcal{Z}),$$

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}[G(y)](t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad D^{\alpha-l,\beta}[G(y)](t_0) = \tilde{x}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m+r.$$

Следовательно, при $t \in [t_0, t_0+\tau]$ имеем $\|D^{\alpha-l,\beta}[G(y)](t) - \tilde{x}_l\|_{\mathcal{Z}} \le \delta$ в случае малого $\tau > 0$, поэтому $G : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.

При $y, z \in \mathcal{S}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, учитывая вид метрики в $\mathcal{S}$ и неравенство (13), получим

$$\|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)}[G(y) - G(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t}(t-s)^{m-l-\beta(m-\alpha)-1}E_{\alpha,m-l-\beta(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)[B^y(s) - B^z(s)]ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_1(t-t_0)^{m-l-\beta(m-\alpha)} q \sum_{l=1}^{m+r} \sup_{t\in[t_0,t_0+\tau]} \|D^{\alpha-l,\beta}(y(t) - z(t))\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_2\tau^{m-l-\beta(m-\alpha)}\|y - z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t_0+\tau;\mathcal{Z})} \le \frac{d(y,z)}{2(m+1)}$$

при достаточно малом τ, не зависящем от y, z. Кроме того,

$$\|G(y) - G(z)\|_{L_1(t_0,t_0+\tau;\mathcal{Z})} \le \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{s}^{t_0+\tau}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}}dtds \le$$

$$\le \tau^{\alpha+1}E_{\alpha,\alpha+2}(\tau^\alpha\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})\|y - z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t_0+\tau;\mathcal{Z})} \le C_3\tau^{\alpha+1}d(y,z) \le \frac{d(y,z)}{2(m+1)}.$$

Следовательно, при малом τ, не зависящем от y, z, выполняется неравенство $d(G(y), G(z)) \le \frac{1}{2}d(y,z)$ и оператор G имеет единственную неподвижную точку z в метрическом пространстве $\mathcal{S}$. Она является решением уравнения (10), а значит, и задачи Коши (7), (8) на отрезке $[t_0, t_0+\tau]$.

4. Нелокальная разрешимость квазилинейного уравнения. При $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$, $r \in \mathbb{N}_0$, $t_0 < T$, $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r} \to \mathcal{Z}$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{14}$$

для квазилинейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)) \tag{15}$$

на заданном отрезке $[t_0, T]$.

Отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r} \to \mathcal{Z}$ называется липшицевым по $\overline{z}$, если существует такое $q > 0$, что при всех $(s, \overline{y}), (s, \overline{z}) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r}$ выполняется неравенство

$$\|B(s, \overline{y}) - B(s, \overline{z})\|_{\mathcal{Z}} \le q\sum_{l=1}^{m+r}\|y_l - z_l\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta \le 1$, $x_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r}; \mathcal{Z})$ липшицево по $\overline{z}$. Тогда задача* (14), (15) *имеет единственное решение на отрезке* $[t_0, T]$.

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, нетрудно показать, что оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=0}^{m-1}t^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k + \int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B^y(s)ds,$$

где $B^y(s) := B(s, D^{\alpha-m-r,\beta}y(s), \dots, D^{\alpha-1,\beta}y(s))$ действует из пространства $C_{\alpha,\beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$ в него же. При этом для $y, z \in C_{\alpha,\beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$, $l = 0, 1, \dots, m-1$ (в случае $T - t_0 \le 1$ заменим в дальнейших оценках $T - t_0$ на 1)

$$\|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)}[G(y) - G(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} =$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} (t-s)^{m-l-\beta(m-\alpha)-1} E_{\alpha,m-l-\beta(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)[B^y(s) - B^z(s)]ds \right\|_{\mathcal{Z}} \le$$

$$\le C_1 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \le$$

$$\le C_1 q (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \sum_{l=1}^{m+r} \sup_{\tau \in [t_0, s]} \|D^{\alpha-l,\beta}(y(\tau) - z(\tau))\|_{\mathcal{Z}} ds \le$$

$$\le C_2 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;\mathcal{Z})} ds \le \frac{C_2 (T-t_0)^{m-1}}{1-\beta(m-\alpha)} (t-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G(y) - G(z)\|_{L_1(t_0,t;\mathcal{Z})} \le C_1 \int_{t_0}^{t} (t-s)^\alpha \|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \le$$

$$\le C_2 \int_{t_0}^{t} (t-s)^\alpha \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;\mathcal{Z})} ds \le \frac{C_2 (t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \le$$

$$\le \frac{C_2 (T-t_0)^{\alpha+\beta(m-\alpha)}}{\alpha+1} (t-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Следовательно,

$$\|G(y) - G(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \le \frac{(m+1) C_2 (T-t_0)^{m-1+\alpha+\beta(m-\alpha)}}{1-\beta(m-\alpha)} (t-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})}.$$

Далее

$$\|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)}[G^2(y) - G^2(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} \le C_1 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \left\|B^{G(y)}(s) - B^{G(z)}(s)\right\|_{\mathcal{Z}} ds \le$$

$$\le C_2 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|G(y) - G(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;\mathcal{Z})} ds \le$$

$$\le \frac{(m+1) C_2^2 (T-t_0)^{2(m-1)+\alpha+\beta(m-\alpha)}}{1-\beta(m-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} (s-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} ds \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} =$$

$$= \frac{(m+1) C_2^2 (T-t_0)^{2(m-1)+\alpha+\beta(m-\alpha)} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^2(y) - G^2(z)\|_{L_1(t_0,t;\mathcal{Z})} \le C_2 \int_{t_0}^{t} (t-s)^\alpha \|G(y) - G(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;\mathcal{Z})} ds \le$$

$$\le \frac{(m+1) C_2^2 (T-t_0)^{m-1+\alpha+\beta(m-\alpha)} \Gamma(1-\beta(m-\alpha)) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(3-\beta(m-\alpha)+\alpha)} (t-t_0)^{2-\beta(m-\alpha)+\alpha} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \le$$

$$\le \frac{(m+1) C_2^2 (T-t_0)^{m-1+2(\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^2(y) - G^2(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \le$$

$$\leq \frac{(m+1)^2 C_2^2 (T-t_0)^{2(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))}(t-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)}[G^3(y)-G^3(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_2 (T-t_0)^{m-1}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\beta(m-\alpha)}\|G^2(y)-G^2(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;\mathcal{Z})}ds \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{3(m-1)+2(\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-\beta(m-\alpha)}(s-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))}ds\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} =$$

$$= \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{3(m-1)+2(\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^3}{\Gamma(4-3\beta(m-\alpha))}(t-t_0)^{3(1-\beta(m-\alpha))}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^3(y)-G^3(z)\|_{L_1(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq C_2\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha}\|G^2(y)-G^2(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;\mathcal{Z})}ds \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{2(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(4-2\beta(m-\alpha)+\alpha)}(t-t_0)^{3-2\beta(m-\alpha)+\alpha}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{2(m-1)+3(\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^3}{\Gamma(4-3\beta(m-\alpha))}(t-t_0)^{3(1-\beta(m-\alpha))}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},$$

$$\|G^3(y)-G^3(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^3 C_2^3 (T-t_0)^{3(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^3}{\Gamma(4-3\beta(m-\alpha))}(t-t_0)^{3(1-\beta(m-\alpha))}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})},\ \ldots,$$

$$\|G^p(y)-G^p(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})} \leq$$

$$\leq \frac{(m+1)^p C_2^p (T-t_0)^{p(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))}\Gamma(1-\beta(m-\alpha))^p}{\Gamma(1+p(1-\beta(m-\alpha)))}(t-t_0)^{p(1-\beta(m-\alpha))}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;\mathcal{Z})}$$

при всех $p \in \mathbb{N}$. Таким образом, при достаточно большом p

$$\|G^p(y)-G^p(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,T;\mathcal{Z})} \leq \frac{1}{2}\|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,T;\mathcal{Z})}$$

и оператор G^p, а значит и оператор G имеет единственную неподвижную точку z в пространстве $C_{\alpha,\beta}(t_0,T;\mathcal{Z})$. По лемме 3.2 она является единственным решением задачи (14), (15) на отрезке $[t_0,T]$.

5. Приложение к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}v_l(0) = v_{lk}, \quad l = 1,2,\ldots,n, \quad k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{16}$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\beta}v_1(t) &= \sum_{p=1}^{n} a_{1p}v_p(t) + f_1(t, D^{\alpha-m-r,\beta}v_1(t), D^{\alpha-m-r,\beta}v_2(t),\ldots,D^{\alpha-1,\beta}v_n(t)),\\ D^{\alpha,\beta}v_2(t) &= \sum_{p=1}^{n} a_{2p}v_p(t) + f_2(t, D^{\alpha-m-r,\beta}v_1(t), D^{\alpha-m-r,\beta}v_2(t),\ldots,D^{\alpha-1,\beta}v_n(t)),\\ &\ldots,\\ D^{\alpha,\beta}v_n(t) &= \sum_{p=1}^{n} a_{np}v_p(t) + f_n(t, D^{\alpha-m-r,\beta}v_1(t), D^{\alpha-m-r,\beta}v_2(t),\ldots,D^{\alpha-1,\beta}v_n(t)), \end{aligned} \tag{17}$$

где $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $0\leq\beta\leq 1$, $r\in\mathbb{N}_0$, D^{γ} — дробные производные Римана — Лиувилля, $D^{\gamma,\beta}$ — дробные производные Хилфера, $a_{lp}\in\mathbb{C}$, $l,p=1,2,\ldots,n$, $f_1,f_2,\ldots,f_n : [0,T]\times\mathbb{R}^{(m+r)n}\to\mathbb{R}$. Возьмём $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^n$, действие оператора $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ задается матрицей $A=\|a_{lp}\|_{l,p=1}^{n}$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $0\leq\beta\leq 1$, $v_{lk}\in\mathbb{R}$, $k=0,1,\ldots,m-1$, $a_{lp}\in\mathbb{C}$, $l,p=1,2,\ldots,n$, функции $f_1,f_2,\ldots,f_n\in C^1([0,T]\times\mathbb{R}^{(m+r)n};\mathbb{R})$ имеют ограниченные частные производные первого порядка. Тогда задача* (16), (17) *имеет единственное решение на* $[0,T]$.

Доказательство. Представим задачу (16), (17) в виде (14), (15) при $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $x_k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Нелинейный оператор имеет вид

$$B(t, z_1, z_2, \ldots, z_{(m+r)n}) = (f_1(t, z_1, z_2, \ldots, z_{(m+r)n}), \ldots, f_n(t, z_1, z_2, \ldots, z_{(m+r)n})).$$

В силу ограниченности производных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ оператор B липшицев. По теореме 4.1 получаем требуемое.

6. Приложение к исследованию интегро-дифференциальной системы уравнений. Пусть Ω — измеримое множество из $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} v_l(\xi, 0) = v_{lk}(\xi), \quad l = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{18}$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha,\beta} v_1(\xi, t) &= \sum_{p=1}^{n} \int_\Omega k_{1p}(\xi, \eta) v_p(\eta, t) d\eta + f_1(t, \xi, D_t^{\alpha-m-r,\beta} v_1(\xi, t), \ldots, D_t^{\alpha-1,\beta} v_n(\xi, t)), \\ D_t^{\alpha,\beta} v_2(\xi, t) &= \sum_{p=1}^{n} \int_\Omega k_{2p}(\xi, \eta) v_p(\eta, t) d\eta + f_2(t, \xi, D_t^{\alpha-m-r,\beta} v_1(\xi, t), \ldots, D_t^{\alpha-1,\beta} v_n(\xi, t)), \\ &\ldots, \\ D_t^{\alpha,\beta} v_n(\xi, t) &= \sum_{p=1}^{n} \int_\Omega k_{np}(\xi, \eta) v_p(\eta, t) d\eta + f_n(t, \xi, D_t^{\alpha-m-r,\beta} v_1(\xi, t), \ldots, D_t^{\alpha-1,\beta} v_n(\xi, t)), \end{aligned} \tag{19}$$

где $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta \le 1$, $r \in \mathbb{N}_0$, D_t^γ — производные Римана — Лиувилля по переменной t, $D_t^{\gamma,\beta}$ — производные Хилфера по t, $k_{lp} \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $l, p = 1, 2, \ldots, n$, $f_1, f_2, \ldots, f_n : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^{(m+r)n} \to \mathbb{R}$. Возьмём $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)^n$, действие оператора $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)^n)$ задается операторной матрицей $A = \|K_{lp}\|_{l,p=1}^n$, где

$$K_{lp} u(\xi) := \int_\Omega k_{lp}(\xi, \eta) u(\eta) d\eta.$$

Теорема 5.1. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 \le \beta \le 1$, $v_{l,k} \in L_2(\Omega)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $k_{l,r} \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $l, r = 1, 2, \ldots, n$, функции $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^{mn}; \mathbb{R})$ ограничены и имеют ограниченные частные производные первого порядка. Тогда задача* (18), (19) *имеет единственное решение на* $[0, T] \times \Omega$.

Доказательство. Задача (18), (19) имеет вид (14), (15) при $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)^n$, $x_k = (v_{1k}, v_{2k}, \ldots, v_{nk})$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Нелинейный оператор

$$B(t, \cdot, z_1, z_2, \ldots, z_{(m+r)n}) = (f_1(t, \cdot, z_1, z_2, \ldots, z_{(m+r)n}), \ldots, f_n(t, \cdot, z_1, z_2, \ldots, z_{(m+r)n}))$$

действует из $L_2(\Omega)^n$ в $L_2(\Omega)$ в силу ограниченности функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и удовлетворяют условиям Липшица, так как ограничены все их первые частные производные. По теореме 4.1 существует единственное решение на $[0, T] \times \Omega$.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит; 2003. 272 с.
2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок; 2008. 512 с.
3. Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials. *Chemical Physics.* 2002;284:399–408.
4. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: World Scientific; 2010. 368 p.
5. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin, Heidelberg: Springer; 2011. 505 p.
6. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука; 2005. 199 с.
7. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010. 247 p.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
9. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley & Sons; 1993. 384 p.
10. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific; 2000. 463 p.
11. Волкова А.Р., Федоров В.Е., Гордиевских Д.М. О разрешимости некоторых классов уравнений с производной Хилфера в банаховых пространствах. *Челяб. физ.-мат. журн.* 2022;7(1):11–19. DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17101

12. Furati K.M., Kassim M.D., Tatar N.-E. Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. *Computers and Mathematics with Applications.* 2012;64(6):1616–1626. DOI:10.1016/j.camwa.2012.01.009
13. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 2009;12:299–318.
14. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Изв. АН Армянской СССР. Математика.* 1968;3:3–28.
15. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.

References

1. Nakhushev AM. Fractional Calculus and its Applications. Moscow: Fizmatlit; 2003. 272 p. (in Russian)
2. Uchaykin VV. Method of Fractional Derivatives. Ul'yanovsk: Artishok; 2008. 512 p. (in Russian)
3. Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials. *Chemical Physics.* 2002;284:399–408.
4. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: World Scientific, 2010. 368 p.
5. Tarasov VE. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin, Heidelberg: Springer; 2011. 505 p.
6. Pskhu AV. Partial Differential Equations of Fractional Order. Moscow: Nauka; 2005. 199 p. (in Russian)
7. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010. 247 p.
8. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
9. Miller KS, Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley & Sons; 1993. 384 p.
10. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific; 2000. 463 p.
11. Volkova AR, Fedorov VE, Gordievskikh DM. On solvability of some classes of equations with Hilfer derivative in Banach spaces. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal.* 2022;7(1):11–19. (in Russian) DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17101
12. Furati KM, Kassim MD, Tatar N-E. Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. *Computers and Mathematics with Applications.* 2012;64(6):1616–1626. DOI:10.1016/j.camwa.2012.01.009
13. Hilfer R, Luchko Y, Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 2009;12:299–318.
14. Dzhrbashyan MM, Nersesyan AB. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order. *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoy SSR. Matematika.* 1968;3:3–28. (in Russian)
15. Bajlekova EG. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.08.2023
Поступила после рецензирования 25.09.2023
Принята к публикации 30.09.2023

Received August 10, 2023
Revised September 25, 2023
Accepted September 30, 2023

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Скорынин Антон Сергеевич – заведующий учебно-вычислительной лабораторией математического факультета, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir E. Fedorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

Anton S. Skorynin – Head of Educational and Computational Laboratory of Mathematics Faculty, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia