УДК 517.9
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-4-384-397

# ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВ ИСЧЕЗАЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

# ALMOST PERIODIC AT INFINITY FUNCTIONS WITH RESPECT TO SUBSPACES OF VANISHING AT INFINITY FUNCTIONS

**И.И. Струкова**
**I.I. Strukova**

Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Voronezh State University, Russia,1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006

E-mail: sv.post.of.chaos@gmail.com, irina.k.post@yandex.ru

**Аннотация**
Статья посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа непрерывных почти периодических на бесконечности функций. Рассматриваются различные подпространства исчезающих на бесконечности функций. Вводятся понятия медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций относительно введенных подпространств. Для почти периодических на бесконечности функций (относительно подпространства) приводятся четыре различных определения и доказывается их эквивалентность, вводится понятие ряда Фурье, изучаются свойства коэффициентов Фурье. Получена теорема о суммируемости рядов Фурье методом Бохнера-Фейера. Результаты статьи получены с существенным использованием теории банаховых модулей и изометрических представлений.

**Abstract**
The article under consideration is devoted to some problems of harmonic analysis of almost periodic at infinity functions. We consider different subspaces of functions vanishing at infinity and introduce the notions of slowly varying and almost periodic at infinity functions with respect to those subspaces. For periodic at infinity functions of this type we formulate four definitions and prove them to be equivalent. We also introduce the concept of a Fourier series with coefficients slowly varying at infinity (with respect to the chosen subspace) and study their properties. We prove the summability of Fourier series by the method of Bochner-Fejer. The results were received with essential use of isometric representations and Banach modules theories.

**Ключевые слова:** почти периодическая на бесконечности функция, банахово пространство, ряд Фурье, суммирование Бохнера-Фейера, спектр Берлинга, банахов модуль.
**Keywords:** almost periodic at infinity function, Banach space, Fourier series, Bochner-Fejer summability, Beurling spectrum, Banach module.

## Подпространства исчезающих на бесконечности функций

Пусть $X$ – комплексное банахово пространство, $End\, X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $X$. Пусть $\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

Рассматривается банахово пространство $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций со значениями в $X$ и нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t)\|$ ,

$C_{b,u} = C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из $C_b(\mathrm{J}, X)$, $C_0(\mathrm{J}, X) = \{x \in C_b(\mathrm{J}, X) : \lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t)\| = 0\}$ – подпространство исчезающих на бесконечности функций из $C_b(\mathrm{J}, X)$.

В банаховом пространстве $C_b(\mathrm{J}, X)$ рассмотрим (полу-)группу $S : \mathrm{J} \to End\, C_b(\mathrm{J}, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t+\tau),\ t, \tau \in \mathrm{J}. \qquad (1)$$

В статье систематически используется следующее понятие исчезающей на бесконечности в среднем функции:

**Определение 1.1** Функция $x \in C_b(\mathrm{R}, X)$ называется исчезающей на бесконечности в среднем, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \left\| \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha x(s+t)ds \right\| = 0$ равномерно относительно $t \in \mathrm{R}$;

2) $f * x \in C_0(\mathrm{R}, X)$ для любой функции $f$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$.

Множество функций из $C_b(\mathrm{R}, X)$, исчезающих на бесконечности в среднем, обозначим символом $(L^1C)_0 = (L^1C)_0(\mathrm{R}, X)$.

**Лемма 1.2** Оба условия из определения (1) эквивалентны.

**Доказательство.** Рассмотрим множество функций $(f_\alpha, \alpha > 0)$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$ вида

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & t \in [0, \alpha], \\ 0, & t \in [0, \alpha], \end{cases}$$

каждая из которых имеет преобразование Фурье вида

$$\hat{f}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{i\lambda\alpha}(1 - e^{-i\lambda\alpha}),\ \lambda \in \mathrm{R}.$$

Первое условие определения (1) можно записать в виде $f_\alpha * x \in C_0(\mathrm{R}, X)$ для любого $\alpha \in \mathrm{R}$.

Отметим, что преобразования Фурье $\hat{f}_\alpha$ функций $f_\alpha$, $\alpha > 0$, разделяют точки из $\mathrm{R}$, и потому по теореме Винера их линейные комбинации плотны в алгебре $L^1(\mathrm{R})$. Следовательно, условие 2) определения 1 выполнено для любой функции $f$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$. Из отмеченного следует, что условие 1) выполнено для любого $\alpha > 0$.

Если выполнено свойство 2), то $f_\alpha * x \in C_0(\mathrm{R}, X)$ для любой направленности $(f_\alpha, \alpha > 0)$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$, т. е. выполнено свойство 1).

Непосредственно из определения следует, что множество функций $(L^1C)_0(\mathrm{R}, X)$ образует замкнутый подмодуль из $C_b(\mathrm{R}, X)$.

**Определение 2.3** Функция $x \in C_b(\mathrm{R}_+, X)$ называется исчезающей на бесконечности в среднем, если существует ее продолжение $y \in C_b(\mathrm{R}, X)$ со следующими свойствами:

1) $y(t) = x(t)$ для всех $t \in \mathrm{R}_+$;

2) $\|y\| \le C\|x\|, C > 0$;

3) $y \in C_0(\mathbb{R}_-, X)$;

4) $S(t)x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ для всех $t \geq 0$, $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$;

5) для любого другого продолжения $z \in C_b(\mathbb{R}, X)$, обладающего свойствами 1)–4), выполняется условие $y - z \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

**Пример 1.4** Следующие функции принадлежат пространству $(L^1C)_0(\mathbb{J}, \mathbb{C})$:

1) $x_1 : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ вида $x_1(t) = e^{it^2}$, $t \in \mathbb{J}$;

2) $x_2 : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ вида $x_2(t) = \sin at^2$, $t \in \mathbb{J}$, $a > 0$;

3) $x_3 : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ вида $x_3(t) = \cos at^2$, $t \in \mathbb{J}$, $a > 0$.

**Определение 3.5** Далее символом $\mathsf{C}_0 = \mathsf{C}_0(\mathbb{J}, X)$ обозначим замкнутое (с нормой из $C_{b,u}$) подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, обладающих свойствами:

1) $S(t)x \in \mathsf{C}_0$ для любого $t \in \mathbb{J}$ и любой функции $x \in \mathsf{C}_0$;

2) $C_0(\mathbb{J}, X) \subset \mathsf{C}_0(\mathbb{J}, X) \subset (L^1C)_0(\mathbb{J}, X)$;

3) $e_\lambda x \in \mathsf{C}_0$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$. Каждое такое подпространство будем называть подпространством исчезающих на бесконечности функций.

Примерами таких подпространств являются определенные ниже подпространства $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ и $C_{0,p}(\mathbb{J}, X)$, $p \in [1, \infty)$.

Функцию $x$ из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ назовем *интегрально исчезающей на бесконечности*, если

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int_0^\alpha \|x(t+s)\| ds = 0.$$

Множество интегрально исчезающих на бесконечности функций будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$. Отметим, что $C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ является замкнутым подпространством из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. В [Баскаков и др., 2018] были введены почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathbb{J}, X)$, удовлетворяющего условию $C_0(\mathbb{J}, X) \subset \mathsf{C}_0(\mathbb{J}, X) \subset C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$.

Рассмотрим также семейство замкнутых в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ подпространств

$$C_{0,p} = C_{0,p}(\mathbb{J}, X) = \{x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X) : \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{J}} \int_0^\alpha \|x(s+t)\|^p ds = 0\},$$

где $p \in [1, \infty)$. Таким образом, $C_{0,1}(\mathbb{J}, X) = C_{0,int}(\mathbb{J}, X)$ – подпространство интегрально исчезающих на бесконечности функций.

Во всех рассматриваемых подпространствах из $C_b(\mathbb{J}, X)$ символ $X$ опускается, если $X = \mathbb{C}$ (например, $\mathsf{C}_0(\mathbb{J}, \mathbb{C}) = \mathsf{C}_0(\mathbb{J})$).

**Определение 4.6** Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется медленно меняющейся на бесконечности относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathbb{J}, X)$, если $S(\alpha)x - x \in \mathsf{C}_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $\alpha \in \mathbb{J}$.

Отметим, что в работах [Баскаков, 2013; Струкова, 2015; Струкова, 2016a; Baskakov, Strukova, 2016] изучались непрерывные медленно меняющиеся, периодические и почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$. В [Струкова, 2014] рассматривались медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции нескольких переменных, а в [Струков, Струкова, 2018] – периодические на бесконечности функции ограниченной вариации.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ обозначим символом $\mathsf{C}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X; \mathsf{C}_0)$.

Непосредственно из определения следует

**Лемма 2.** Любое пространство $\mathsf{C}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X; \mathsf{C}_0) \subset C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ медленно меняющихся на бесконечности относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ функций является замкнутым подпространством в $C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$.

Например, функция $x : \mathsf{J} \to X$ вида $x(t) = c + x_0(t)$, $t \in \mathsf{J}$, $c \in X$, $x_0 \in \mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$, принадлежит пространству $\mathsf{C}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X; \mathsf{C}_0)$.

При $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}) = C_0(\mathsf{J})$ примерами медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathsf{C}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X; C_0)$ являются:

1) $x_1(t) = \sin\ln(1+|t|)$, $t \in \mathsf{J}$;

2) $x_3(t) = \operatorname{arctg} t, t \in \mathsf{J}$;

3) любая непрерывно дифференцируемая функция $x \in C_b(\mathsf{J})$ со свойством $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dot{x}(t) = 0$.

### Почти периодические на бесконечности функции

Сформулируем четыре определения почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, удовлетворяющего всем условиям определения 3.

Первое определение основано на понятии $\varepsilon$-периода на бесконечности и соответствует классическому определению Бора почти периодической функции (см. [Левитан, Жиков, 1978; Bohr, 1925]).

**Определение 5.7** Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathsf{R}_+$ называется $\varepsilon$-периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если существует функция $x_0 \in \mathsf{C}_0$ такая, что

$$\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon.$$

Множество $\varepsilon$-периодов функции $x \in C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ обозначим символом $\Omega_\infty(x; \mathsf{C}_0; \varepsilon)$.

Если $\mathsf{C}_0 = C_0(\mathsf{J}, X)$, то определение $\varepsilon$-периода функции из $C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ относительно $\mathsf{C}_0$ эквивалентно следующему определению:

**Определение 6.8** Пусть $\varepsilon > 0$. Число $\omega \in \mathsf{R}_+$ называется $\varepsilon$-периодом функции $x \in C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ на бесконечности (относительно подпространства $C_0(\mathsf{J}, X)$ ), если существует число $\alpha(\varepsilon) \geq 0$ такое, что

$$\sup_{|t| \geq \alpha(\varepsilon)} \|x(t+\omega) - x(t)\| < \varepsilon.$$

**Определение 7.9** Множество $\Omega$ из $\mathsf{J}$ называется относительно плотным на $\mathsf{J}$, если существует такое $l > 0$, что $[t, t+l] \cap \Omega \neq \varnothing$ для любого $t \in \mathsf{J}$.

**Определение 8.10** Функция $x$ из $C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathsf{C}_0; \varepsilon)$ относительно плотно на $\mathsf{J}$.

Из определений 6, 8 следует, что каждая непрерывная функция $x \in C_{b,u}(\mathrm{R}, X)$ почти периодическая по Бору (в обычном смысле; см. [Левитан, Жиков, 1978; Bohr, 1925]) является почти периодической на бесконечности относительно любого подпространства $\mathrm{C}_0(\mathrm{R}, X)$ исчезающих на бесконечности функций. Множество классических почти периодических функций обозначим символом $AP(\mathrm{R}, X)$.

Множество почти периодических на бесконечности функций относительно подпространства $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ обозначим символом $AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$. Непосредственно из определения 4 следует, что если $\Omega_\infty(x; \mathrm{C}_0; \varepsilon) = \mathrm{J}$ для любого $\varepsilon > 0$, то $x \in \mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$. Таким образом, имеет место включение $\mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0) \subset AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$.

**Определение 9.11** Множество функций $\mathrm{M} \subset C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$ называется предкомпактным на бесконечности относительно подпространства $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число функций $b_1, \ldots, b_N$ ( $\varepsilon$ -сеть на бесконечности) из $\mathrm{M}$ таких, что для любой функции $x \in \mathrm{M}$ существует функция $b_k, k \in \{1, \ldots, N\}$, и функция $\alpha_\varepsilon \in \mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$, для которых имеет место оценка

$$\|x - b_k - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

**Определение 10.12** *Функция* $x \in C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$ *называется почти периодической на бесконечности относительно подпространства* $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ *исчезающих на бесконечности функций, если множество ее сдвигов* $S(t)x,\quad t \in \mathrm{J}$, *является предкомпактным на бесконечности относительно подпространства* $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$.

Заметим, что функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad x_1, \ldots, x_N \in \mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0), \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathrm{R}, t \in \mathrm{J},$$

(обобщенные тригонометрические полиномы) почти периодичны на бесконечности в смысле определения 10.

**Определение 11.13** Функция $x \in C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности относительно подпространства $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число вещественных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и функции $x_1, \ldots, x_N$ из пространства $\mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ такие, что

$$\sup_{t \in \mathrm{J}} \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{N} x_k(t) e^{i\lambda_k t} \right\| < \varepsilon.$$

Далее символом $\mathrm{X}$ обозначим фактор-пространство $C_{b,u}(\mathrm{J}, X)/\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$, являющееся банаховым пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + \mathrm{C}_0} \|y\|,$$

где $\tilde{x} = x + \mathrm{C}_0$ – класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$. В пространстве $\mathrm{X}$ действует сильно непрерывная группа изометрий $\tilde{S} : \mathrm{R} \to End\, \mathrm{X}$ вида

$$\tilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}, t \in \mathrm{R}, \tilde{x} \in \mathrm{X}.$$

Если $\mathsf{J}=\mathsf{R}_+$, то $S(t)x$ – сдвиг функции $x$ влево (см. формулу (1)) для $t \geq 0$ и для $t<0$ символ $\tilde{S}(t)x$ обозначает класс эквивалентности, содержащий функцию $x_t \in C_{b,u}(\mathsf{R}, X)$ вида

$$x_t(s)=\begin{cases} x(s+t), & s+t>0, \\ -t^{-1}x(0)s, & s+t \leq 0, s \geq 0. \end{cases}$$

Тогда структура банахова $L^1(\mathsf{R})$-модуля на $\mathsf{X}$ (см. [Баскаков, Криштал, 2005; Баскаков, 2009; Баскаков, 2013; Баскаков и др., 2018]) определяется с помощью представления $\tilde{S}$ с помощью формулы

$$f\tilde{x}=\int_{\mathsf{R}} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x}\,d\tau,\ f \in L^1(\mathsf{R}), \tilde{x} \in \mathsf{X}.$$

**Определение 12.14** Функция $x \in C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ называется почти периодической на бесконечности относительно подпространства $\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если класс эквивалентности $\tilde{x}=x+\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X) \in \mathsf{X}$ является почти периодическим вектором в $\mathsf{X}$ относительно изометрического представления $\tilde{S}: \mathsf{R} \to End\,\mathsf{X}$.

Непрерывные почти периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathsf{J}, X)$) впервые были введены в рассмотрение в статьях [Баскаков, 2013; Баскаков, 2015]. При этом использовалось определение, аналогичное определению 12. Основные результаты этих статей были связаны с асимптотическим поведением ограниченных полугрупп операторов. В [Струков, Струкова, 2018] изучались почти периодические на бесконечности функции из однородных пространств. В работах [Струкова, 2015; Струкова, 2016a; Струкова, 2016b; Baskakov, Strukova, 2016] изучались периодические на бесконечности функции (относительно подпространства $C_0(\mathsf{J}, X)$)

Определение почти периодического вектора (определение 21) и некоторые результаты, используемые в дальнейшем, приведены в пункте 3 данной статьи.

**Теорема 1.15** Все определения почти периодической на бесконечности функции (определения 8, 10, 11, 12) эквивалентны.

**Доказательство.** Рассмотрим фактор-пространство $\mathsf{X}=C_{b,u}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$ и определенную выше группу изометрий $T=\tilde{S}: \mathsf{R} \to End\,\mathsf{X}$. Для этого представления определение 11 соответствует свойству 4) из определения 21. Поскольку все свойства из определения 21 эквивалентны, достаточно показать, что первые три его свойства эквивалентны определениям 8, 10 и 11 соответственно.

Пусть $x \in C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ и $\tilde{x}$ – класс эквивалентности в $\mathsf{X}$, построенный по функции $x$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ множество $\Omega_\infty(x; \mathsf{C}_0; \varepsilon) \cup (-\Omega_\infty(x; \mathsf{C}_0; \varepsilon))$ совпадает с множеством $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon)$ $\varepsilon$-периодов класса $\tilde{x}$. Следовательно, соответствующие определения эквивалентны.

Эквивалентность определения 10 и свойства 2) определения 21 непосредственно следует из определения фактор-модуля $\mathsf{X}=C_{b,u}(\mathsf{J}, X)/\mathsf{C}_0(\mathsf{J}, X)$.

Докажем эквивалентность аппроксимационного определения 11 и свойства 3) из определения 21. Для доказательства достаточно установить, что спектр Берлинга $\Lambda(\tilde{y})$ класса эквивалентности $\tilde{y} \in \mathsf{X}$, $\tilde{y}=y+\mathsf{C}_0$, является одноточечным множеством ($\Lambda(\tilde{y})=\{\lambda_0\}$) тогда и только тогда, когда функция $y \in C_{b,u}(\mathsf{J}, X)$ представима в виде $y(t)=y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathsf{J}$, где $y_0 \in \mathsf{C}_{sl,\infty}(\mathsf{J}, X; \mathsf{C}_0)$.

Если $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$ для любого $t \in \mathrm{J}$ (см. свойство 5) из леммы 2). Следовательно, $\Lambda(\tilde{y}_0) = \{0\}$, где $y_0(s) = y(s)e^{-i\lambda_0 s}$, $s \in \mathrm{J}$, и поэтому $\tilde{S}(t)\tilde{y}_0 = \tilde{y}_0$ для любого $t \in \mathrm{J}$. Таким образом, $S(t)y_0 - y_0 \in \mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$, $t \in \mathrm{J}$, т. е. $y_0 \in \mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$.

И обратно: если $y(t) = y_0(t)e^{i\lambda_0 t}$, $t \in \mathrm{J}$, где $y_0 \in \mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$, то $\tilde{S}(t)\tilde{y} = e^{i\lambda_0 t}\tilde{y}$, $t \in \mathrm{J}$, и поэтому в силу свойства 5) из леммы 2 получим, что $\Lambda(\tilde{y}) = \{\lambda_0\}$.

Символом $AP(\mathrm{R}_+, X)$ обозначим множество почти периодических функций Бора, являющихся сужениями на $\mathrm{R}_+$ функций из $AP(\mathrm{R}, X)$.

**Определение 13.16** Функция $x \in C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$ называется асимптотически почти периодической относительно подпространства $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ исчезающих на бесконечности функций, если она представима в виде

$$x = x_1 + x_0,$$

где $x_1 \in AP(\mathrm{J}, X)$, $x_0 \in \mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$.

Множество $AAP(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ асимптотически почти периодических относительно подпространства $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ функций является замкнутым подпространством в $C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$, причем

$$AAP(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0) = AP(\mathrm{J}, X) \oplus \mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X).$$

Таким образом, имеют место строгие включения

$$AP(\mathrm{J}, X) \subset AAP(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0) \subset AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0).$$

Если $\mathrm{C}_0 = C_0(\mathrm{R}_+, X)$, то подпространство $AAP(\mathrm{R}_+, X; C_0)$ будет обозначаться символом $AAP(\mathrm{R}_+, X)$. Именно это подпространство рассматривалось в 10.

Пусть $x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ и ряд

$$\tilde{x} \sim \sum_{n \in \mathrm{J}_d} \tilde{y}_n, \ \Lambda_B(\tilde{x}) = \{\lambda_n, n \in \mathrm{J}_d\}, \ \Lambda(y_n) = \lambda_n,$$

где $\mathrm{J}_d \subset \mathrm{Z}$ (см. формулу (4)), является рядом Фурье класса эквивалентности $\tilde{x} \in AP(\mathrm{X})$, построенного по функции $x$.

**Определение 14.17** Ряд

$$x(t) : \sum_{n \in \mathrm{J}_d} x_n(t)e^{i\lambda_n t}, t \in \mathrm{J}, \tag{2}$$

где функции $z_n$, $n \in \mathrm{J}_d$, вида $z_n(t) = x_n(t)e^{i\lambda_n t}$, $t \in \mathrm{J}$, $x_n \in C_{b,u}(\mathrm{J}, X)$, являются представителями соответствующих классов эквивалентности $\tilde{y}_n$, $n \in \mathrm{J}_d$, называется рядом Фурье функции $x$. Функции $x_n$, $n \in \mathrm{J}_d$, будем называть коэффициентами Фурье функции $x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$.

Следует отметить неединственность ряда Фурье функции $x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$.

Справедлива следующая

**Теорема 2.18** Коэффициенты любого ряда Фурье функции $x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ принадлежат пространству $\mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ и удовлетворяют условию $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 0.$.

Условие $x_n \in \mathrm{C}_{sl,\infty}(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ следует из определения 11, а равенство $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 0$ вытекает из теоремы 4.

Пусть $m > 0$, положим

$$\tau_m(x,t) = \sum_{|\lambda_n|<m, \lambda_n \in \Lambda_B(\widetilde{x})} \left(1 - \frac{|\lambda_n|}{m}\right) x_k(t) e^{i\lambda_n t}, \; t \in \mathrm{J}, \; x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0).$$

**Определение 15.19** Будем говорить, что ряд Фурье (2) функции $x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ суммируем на бесконечности методом Бохнера-Фейера, если существует последовательность $(y_m^0, m \in \mathrm{N})$ функций из $\mathrm{C}_0(\mathrm{J}, X)$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{t\in \mathrm{J}} \left\| x(t) - \tau_m(x,t) - y_m^0(t) \right\|_X = 0.$$

Из теоремы 5 следует

**Теорема 3.20** Ряд Фурье любой функции $x \in AP_\infty(\mathrm{J}, X; \mathrm{C}_0)$ суммируем на бесконечности методом Бохнера-Фейера.

Отметим, что выбор коэффициентов Фурье в этой теореме значения не имеет.

## Банаховы $L^1(\mathrm{R})$ - модули и спектр Берлинга

В данном разделе будут приведены некоторые определения и факты из теории банаховых модулей, существенно используемые в дальнейшем.

Пусть $\mathrm{X}$ – комплексное банахово пространство и $End\,\mathrm{X}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathrm{X}$. Пусть $L^1(\mathrm{R})$ – банахова алгебра определенных на $\mathrm{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных (классов) функций со сверткой $(f * g)(t) = \int_{\mathrm{R}} f(t-s)g(s)ds, \; t \in \mathrm{R}, \; f, g \in L^1(\mathrm{R})$, в качестве умножения.

Будем считать, что $\mathrm{X}$ является невырожденным банаховым $L^1(\mathrm{R})$ -модулем (см. [Баскаков, Криштал, 2005; Росс, Хьюитт, 1975]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : \mathrm{R} \to End\,\mathrm{X}$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

**Предположение 1.21** Для банахова $L^1(\mathrm{R})$ -модуля $\mathrm{X}$ выполняются следующие условия:

1) из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(\mathrm{R})$, следует, что вектор $x \in \mathrm{X}$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля $\mathrm{X}$);

2) для всех $x \in \mathrm{X}$ имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на $\mathrm{X}$ с представлением $T : \mathrm{R} \to End\,\mathrm{X}$):

$$T(t)(fx) = (T(t)f)x = f(T(t)x), \; t \in \mathrm{R}, \; f \in L^1(\mathrm{R}).$$

Если $T : \mathrm{R} \to End\,\mathrm{X}$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int_{\mathrm{R}} f(t)T(-t)x dt, \; f \in L^1(\mathrm{R}), \; x \in \mathrm{X}, \tag{3}$$

определяет на $\mathrm{X}$ структуру банахова $L^1(\mathrm{R})$ -модуля, удовлетворяющего условиям предположения 2, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением $T$.

**Замечание 1.22** С каждым невырожденным банаховым $L^1(\mathrm{R})$ -модулем $\mathrm{X}$ ассоциировано единственное представление $T : \mathrm{R} \to End\,\mathrm{X}$ (см. [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение $(\mathrm{X}, T)$.

Теория банаховых $L^1(\mathbb{R})$-модулей изложена в [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005; Росс, Хьюитт, 1975; Baskakov, Krishtal, 2016; Баскаков, 2016].

**Определение 16.23** Вектор из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ назовем непрерывным (относительно представления $T$) или $T$-непрерывным, если функция $\varphi_x:\mathbb{R}\to\mathcal{X}, \varphi_x(t)=T(t)x, t\in\mathbb{R},$ непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на $\mathbb{R}$).

Совокупность всех $T$-непрерывных векторов из банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{X}_c$ или $(\mathcal{X},T)_c$. Оно образует замкнутый *подмодуль* из $\mathcal{X}$, т. е. $\mathcal{X}_c$ – замкнутое линейное подпространство из $\mathcal{X}$, инвариантное относительно всех операторов $T(f),\ T(t),\ f\in L^1(\mathbb{R}),\ t\in\mathbb{R}$.

Введём понятие генератора банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля. Для этого рассмотрим семейство функций $\{f_\lambda\}$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$, из алгебры $L^1(\mathbb{R})$, определенное равенствами

$$f_\lambda(t)=\begin{cases}e^{\lambda t}, & t\le 0,\\ 0, & t>0,\end{cases}\quad \text{если } Re\lambda>0,$$

$$f_\lambda(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ -e^{\lambda t}, & t\ge 0,\end{cases}\quad \text{если } Re\lambda<0.$$

*Генератором банахова* $L^1(\mathbb{R})$-*модуля* $(\mathcal{X},T)$ будем называть оператор $A=i^{-1}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}:D(A)\subset\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ – замкнутый оператор, резольвентой которого является функция $\lambda\mapsto T(f_\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$. Отметим, что если представление $T$ сильно непрерывно, то $iA$ является генератором группы изометрий $T$.

Вектор $x_0\in\mathcal{X}$ назовем *собственным вектором* банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X},T)$, если существует число $\lambda_0\in\mathbb{R}$ такое, что $T(t)x_0=e^{i\lambda_0 t}x_0, t\in\mathbb{R}$. Отметим, что если $x_0\in\mathcal{X}$ – собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X},T)$, то $fx_0=\hat f(\lambda_0)x_0$ для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R})$. Кроме того, нетрудно видеть, что если $x_0\in\mathcal{X}$ – собственный вектор банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X},T)$, то $x_0\in D(A)$, где $A$ – генератор $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X},T)$, причем $Ax_0=i\lambda_0x_0$. Верно и обратное: если $x_0\in D(A)$, то $x_0$ – собственный вектор $L^1(\mathbb{R})$-модуля $(\mathcal{X},T)$.

Пространство $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем с модульной структурой, определяемой равенствами (3), и эта структура ассоциирована с представлением (группой сдвигов функций) $S:\mathbb{R}\to End\,C_{b,u}(\mathbb{J},X)$. Однако, формула (3) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathbb{R})$-модуля на $C_{b,u}(\mathbb{R}_+,X)$. Тем не менее такой структурой наделяется фактор-пространство $C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ (см. ранее).

**Определение 17.24** Пусть $\Delta$ – произвольное замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Тогда спектральным подмодулем банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля $\mathcal{X}$ называется множество $\mathcal{X}(\Delta)=\{x\in\mathcal{X}:\Lambda(x)\subset\Delta\}$.

Далее через $\hat f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\hat f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

функции $f\in L^1(\mathbb{R})$.

**Определение 18.25** Спектром Берлинга вектора $x \in X$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из R вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathrm{R} : fx \neq 0 \textit{ для любой функции } f \in L^1(\mathrm{R}) \textit{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathrm{R} \setminus \{\mu_0 \in \mathrm{R} : \textit{существует функция } f \in L^1(\mathrm{R})$ *такая,что* $\hat{f}(\mu_0) \neq 0$ è $fx = 0\}$.

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства $X$ (см. [Баскаков, 2004; Баскаков, Криштал, 2005; Росс, Хьюитт, 1975]):

**Лемма 2.26** Для любых $f \in L^1(\mathrm{R})$ и $x \in X$ справедливы свойства:

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathrm{R})$ следует, что $x = 0$ (т. е. $L^1(\mathrm{R})$-модуль X невырожден);

2) $\Lambda(x)$ – замкнутое подмножество из R, причем $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (supp\ \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(supp\ \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ – одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = e^{i\lambda_0 t}x$, $t \in \mathrm{R}$, т. е. $x$ – собственный вектор банахова $L^1(\mathrm{R})$-модуля $(X, T)$;

6) если вектор $x \in X$ имеет компактный спектр Берлинга $\Lambda(x)$ со спектральным радиусом $r(x) = \max\limits_{\lambda \in \Lambda(x)} |\lambda|$, то функция $\varphi_x : \mathrm{R} \to X$ вида $\varphi_x(t) = T(t)x$, $t \in \mathrm{R}$, допускает расширение на C до целой функции экспоненциального типа, равного $r(x)$ (т. е. $\overline{\lim\limits_{|z| \to \infty}} \dfrac{ln\|\varphi_x(z)\|}{|z|} = r(x)$).

**Определение 19.27** Число $\lambda_0 \in \mathrm{R}$ отнесем к существенному спектру $\Lambda_{ess}(x)$ вектора $x$ из банахова $L^1(\mathrm{R})$-модуля $(X, T)$, если существует $\lambda_0$ – направленность $(f_\alpha)$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$, для которой выполнено условие $\overline{\lim\limits_{\alpha}} \|f_\alpha x\| > 0$.

Отметим, что $\Lambda_{ess}(x) \subseteq \Lambda(x)$, $x \in (X, T)$.

**Определение 20.28** Пусть $x$ – ненулевой вектор из $L^1(\mathrm{R})$-модуля $(X, T)$. Число $\lambda_0 \in \mathrm{R}$ из $\Lambda(x)$ назовем эргодической точкой вектора $x$, если для некоторой $\lambda_0$ – направленности из алгебры $L^1(\mathrm{R})$ существует $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha x = x_0 \in X$. Множество эргодических точек вектора будем обозначать символом $\Lambda_{erg}(x)$. Если $x_0 = 0$, то число $\lambda_0$ отнесем к непрерывному спектру $\Lambda_c(x)$ вектора $x$. Множество $\Lambda_B(x) = \{\lambda_0 \in \Lambda_{erg}(x) : \lim\limits_{\alpha} f_\alpha x \neq 0\}$ называется спектром Бора (дискретным спектром) вектора $x \in X$.

## Почти периодические векторы и их ряды Фурье

**Определение 21.29** Вектор $x_0$ из банахова $L^1(\mathrm{R})$-модуля $(X, T)$ называется почти периодическим (относительно представления $T$), если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega(x_0,\varepsilon) = \{\omega \in \mathrm{R} : \|T(\omega)x_0 - x_0\| < \varepsilon\}$ $\varepsilon$ -периодов вектора $x_0$ относительно плотно на R (множество $\Omega \subset \mathrm{R}$ называется относительно плотным на R, если существует число $l > 0$ такое, что любой промежуток $[t, t+l]$, $t \in \mathrm{R}$, содержит хотя бы одну точку множества $\Omega$);

2) орбита $\{T(t)x_0, t \in \mathrm{R}\}$ вектора $x_0$ предкомпактна в X;

3) функция $t \mapsto \varphi(t) = T(t)x_0$, $t \in \mathrm{R}$, – непрерывная почти периодическая функция, т. е. $\varphi \in AP(\mathrm{R}, \mathrm{X})$ (см. [Левитан, Жиков, 1978; Баскаков, 2015]);

4) для любого $\varepsilon > 0$ существуют вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ и собственные векторы $x_1, \dots, x_N$ представления $T$, соответствующие этим числам (т. е. $T(t)x_k = e^{i\lambda_k t} x_k$, $t \in \mathrm{R}$, $1 \le k \le N$) такие, что $\left\| x_0 - \sum_{k=1}^{N} x_k \right\| < \varepsilon$.

Множество $AP(\mathrm{X}) = AP(\mathrm{X}, T)$ почти периодических векторов из X образует замкнутое подпространство в X и является замкнутым подмодулем из банахова $L^1(\mathrm{R})$-модуля X. Кроме того, имеет место включение $AP(\mathrm{X}) \subset \mathrm{X}_c$. Приводимые понятия и результаты содержатся в работах [Баскаков, 1973; Баскаков, 1978; Баскаков, 2004; Баскаков, 2013; Баскаков, 2015].

**Определение 22.30** Преобразованием Бора почти периодического вектора $x \in AP(\mathrm{X})$ назовем функцию $\hat{x}_B : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$, определенную равенствами

$$\hat{x}_B(\lambda) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} T(\tau) x e^{-i\lambda\tau} d\tau = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1}} T(\tau) x e^{-(\varepsilon + i\lambda)\tau} d\tau =$$
$$= \lim_{0<\varepsilon\to 0} \varepsilon R(\varepsilon + i\lambda, iA)x = \lim_j f_j x, \ \lambda \in \mathrm{R},$$

где $(f_j)$ – любая $\lambda$ -направленность из алгебры $L^1(\mathrm{R})$.

Отметим, что имеет место свойство единственности: если преобразование Бора $\hat{x}_B$ вектора $x \in AP(\mathrm{X})$ равно нулю, то $x = 0$.

Преобразование Бора вектора является основой для определения коэффициентов Фурье почти периодических на бесконечности функций. Носитель $supp\,\hat{x}_B$ функции $\hat{x}_B$ совпадает со спектром Бора $\Lambda_B(x)$ вектора $x$ и это множество не более чем счетно. Тогда справедливо представление

$$supp\,\hat{x}_B = \Lambda_B(x) = \{\lambda_n, n \in \mathrm{J}_d\}, \tag{2}$$

где $\mathrm{J}_d \subset \mathrm{Z}$, причем имеют место равенства

$$T(t)x_n = e^{i\lambda_n t} x_n, t \in \mathrm{R}, n \in \mathrm{J}_d,$$

где векторы $x_n$, $n \in \mathrm{J}_d$, являются собственными векторами представления $T$ (а также генератора $iA$ группы операторов $T$, т. е. $Ax_n = i\lambda_n x_n$, $n \in \mathrm{J}_d$), причем $\Lambda(x_n) = \{\lambda_n\}$, $n \in \mathrm{J}_d$. Ряд

$$x \sim \sum_{n \in \mathrm{J}_d} x_n, \tag{3}$$

где $x_n = \hat{x}_B(\lambda_n)$, $n \in \mathrm{J}_d$, назовем *рядом Фурье* вектора $x \in AP(\mathrm{X})$ (относительно представления (4)). Отметим, что если этот ряд абсолютно сходится, т. е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathrm{Z}} \|x_n\| < \infty$, то $x = \sum_{n \in \mathrm{J}_d} x_n$.

В дальнейшем используется

**Лемма 3.31** Пусть вектор $x$ из $AP(\mathrm{X})$ имеет ряд Фурье вида (5) (согласно представлению (4)). Тогда для любой функции $f$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$ вектор $fx$ принадлежит $AP(\mathrm{X})$ и имеет ряд Фурье вида $fx : \sum\limits_{n\in \mathrm{J}_d} \hat{f}(\lambda_n)x_n$ (относительно разложения (4)).

**Доказательство.** Свойство $fx \in AP(\mathrm{X})$ легко следует из любого из условий 1)-4) определения 21. Непосредственно из определения преобразования Бора векторов из $AP(\mathrm{X})$ следует, что

$$\widehat{(fx)}_B(\lambda_n) = \lim_\alpha f_\alpha(fx) = \lim_\alpha f(f_\alpha x) = f\hat{x}_B(\lambda_n) = \hat{f}(\lambda_n)\hat{x}_B(\lambda_n) = \hat{f}(\lambda_n)x_n,\, n \in \mathrm{J}_d,$$

где $(f_\alpha)$ – некоторая $\lambda_n$-направленность из алгебры $L^1(\mathrm{R})$. Тогда утверждение леммы 3 вытекает непосредственно из определения ряда Фурье почти периодического вектора. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует

**Лемма 4.32** Пусть вектор $x$ из $AP(\mathrm{X})$ имеет ряд Фурье вида (5) (согласно представлению (4)), причем последовательность $(\lambda_n, n \in \mathrm{J}_d)$ обладает свойством $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\|x - f_n x\| = \lim_{n\to\infty}\left\| x - \sum_{|\lambda_k|<n} \hat{f}_0\left(\frac{\lambda_k}{n}\right)x_k \right\|,$$

где векторы $x_k$, $k \in \mathrm{J}_d$, взяты из представления вектора $x$ в ряд Фурье (5).

Если $\mathrm{X}_0$ – замкнутый подмодуль из $\mathrm{X}$, инвариантный относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathrm{R}$, то фактор-модуль $\mathrm{X}/\mathrm{X}_0$ также наделяется структурой банахова $L^1(\mathrm{R})$-модуля по представлению

$$\widetilde{T} : \mathrm{R} \to End\, \mathrm{X}/\mathrm{X}_0,\, \widetilde{T}(t)\widetilde{x} = \widetilde{T(t)x} = T(t)x + \mathrm{X}_0,$$

т. е. $f\widetilde{x} = fx + \mathrm{X}_0 = \widetilde{fx},\ f \in L^1(\mathrm{R}),$ для любого вектора $x \in \mathrm{X}$.

**Лемма 5.33** Преобразование Бора $\hat{x}_B : \mathrm{R} \to \mathrm{X}$ любого вектора $x$ из $AP(\mathrm{X})$ допускает оценку

$$\|\hat{x}_B(\lambda)\| \le \|x\|,\, \lambda \in \mathrm{R}.$$

**Доказательство.** При определении вектора $\hat{x}_B(\lambda) = \lim f_\alpha x,\quad x \in AP(\mathrm{X}),$ будем использовать $\lambda$-направленность $(f_\alpha)$ из алгебры $L^1(\mathrm{R})$, которая является инвариантным интегралом. Тогда $\|f_\alpha\| = \hat{f}_\alpha(0) = 1$ для любого $\alpha$ и поэтому $\|\hat{x}_B(\lambda)\| \le \sup\limits_\alpha \|f_\alpha\|\|x\| = \|x\|,\, \lambda \in \mathrm{R}.$ Лемма доказана.

**Теорема 4.34** Для любого вектора $x$ из $AP(\mathrm{X})$ со спектром Бора $\Lambda_B(x)$, допускающим представление вида (4), справедливо условие $\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat{x}_B(\lambda_n)\| = 0.$

**Доказательство.** Из условия 3) определения 21 следует, что существует последовательность $(x_n, n \in \mathrm{N})$ векторов из $AP(\mathrm{X})$, носители $supp\, \widehat{(x_n)}_B$, $\quad n \ge 1,$

преобразований Бора которых конечны. Из леммы 5 следует, что $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{x}_B(\lambda) - \widehat{(x_n)}_B(\lambda) \to 0$, $n \to \infty$, и поэтому $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_B(\lambda_n) = 0$. Теорема доказана.

Пусть $m > 0$ и $x \in AP(\mathrm{X})$. Пусть $\tau_m(x) = \sum_{|\lambda_k|<m, \lambda_k\in\Lambda_B(x)} \left(1 - \frac{|\lambda_k|}{m}\right) x_k$, где $\Lambda_B(x) = \{\lambda_n, n \in \mathrm{J}_d\}$, $\mathrm{J}_d \subset \mathrm{Z}$, и $x_k$, $k \in \mathrm{J}_d$, – коэффициенты Фурье вектора $x$ (см. формулу (5)).

**Теорема 5 (**[Левитан, Жиков, 1978]**). 35** Ряд Фурье (5) вектора $x$ из $AP(\mathrm{X})$ суммируем методом Бохнера-Фейера, т. е. $\lim_{m\to\infty} \|x - \tau_m(x)\| = 0$.

**Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00097.**

**The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-31-00097.**

## Список литературы
## References

1. Баскаков А.Г. 1973. Некоторые вопросы теории векторных почти периодических функций: Дис. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 100.

Baskakov A.G. 1973. Nekotorye voprosy teorii vektornykh pochti periodicheskikh funktsiy: Dis. kand. fiz.-mat. Nauk [Some questions regarding the theory of almost periodic vector-valued funcitons: PhD thesis, 100.]. Voronezh, VSU, 100 (in Russian).

2. Баскаков А.Г. 1978. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений. Матем. заметки., 24(2) : 195–206.

Baskakov A. G. 1978. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. Math. Notes, 24(1-2) : 606–612.

3. Баскаков А.Г. 2004. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов. СМФН, 9 : 3–151.

Baskakov A. G. 2006. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. J. Math. Sci. (N. Y.), 137(4) : 4885–5036.

4. Баскаков А.Г. 2009. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений. Изв. РАН. Сер. Матем., 73(2) : 3–68.

Baskakov A.G. 2009. Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. Izv. Math., 73(2) : 215–278.

5. Баскаков А.Г. 2013. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. УМН, 68(1) : 77–128.

Baskakov A. G. 2013. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. Russian Mathematical Surveys, 68(1) : 69–116.

6. Баскаков А.Г. 2015. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве. Матем. Заметки, 97(2) : 174–190.

Baskakov A. G. 2015. Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on Banach spaces. Math. Notes., 97(2) : 164–178.

7. Баскаков А.Г. 2016. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 152.

Baskakov A.G. 2016. Garmonicheskiy analiz v banakhovykh modulyakh i spektral'naya teoriya lineynykh operatorov [Harmonic analysis in Banach modules and spectral theory of linear operators]. Voronezh, Izdatel'skiy dom VGU, 152 (in Russian).

8. Баскаков А.Г., Струкова И.И., Тришина И.А. 2018. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Сиб. матем. журн., 59(2) : 293–308.

Baskakov A.G., Strukova I.I., Trishina I.A. 2018. Solutions almost periodic at infinity to differential equations with unbounded operator coefficients. Siberian Math. J., 55 (2) : 231–242.

9. Баскаков А.Г., Криштал И.А. 2005. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства. Изв. РАН. Серия матем., 69(3) : 3–54.

Baskakov A. G., Krishtal I. A. 2005. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. Izv. Math., 69(3) : 439–486.

10. Левитан Б.М., Жиков В.В. 1978. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М., Изд-во Московского университета, 205.

Levitan B.M., Zhikov V.V. 1983. Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press, 224.

11. Росс К.А., Хьюитт Э. 1975. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах. М., Мир, 904. (Ross K.A., Hewitt E. 1970. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Berlin, Hedelberg, New York Springer-Verlag, 771.).

Ross K.A., Kh'yuitt E. 1975. Abstraktnyy garmonicheskiy analiz. T. 2. Struktura i analiz kompaktnykh grupp. Analiz na lokal'no kompaktnykh abelevykh gruppakh. [Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups.] M., Mir, 904. (Ross K.A., Hewitt E. 1970. Abstract harmonic analysis. Vol. 2. Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups. Berlin, Hedelberg, New York, Springer-Verlag, 771.).

12. Струкова И.И. 2014. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 14(1) : 28–38.

Strukova I. I. 2014. About harmonic analysis of periodic at infinity functions. Izv. Sarat. univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 14(1) : 28–38. (in Russian)

13. Струкова И.И. 2015. Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы. Вестн. ВГУ. Серия: Физика. Математика, 3 : 161–165.

Strukova I. I. 2015. Spectra of algebras of slowly varying and periodic at infinity functions and Banach limits. Vestnik VSU. Ser. Physica. Matematika, 3 : 161–165. (in Russian)

14. Струкова И.И. 2016. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций. Сиб. матем. журн., 57(1) : 186–198.

Strukova I. I. 2016. On Wiener's theorem for functions periodic at infinity. Siberian Math. J., 57(1) : 145–154.

15. Струкова И.И. 2016. Периодические на бесконечности функции ограниченной вариации. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, 44(20)(241) : 50–59.

Strukova I. I. 2016. Periodic at infinity functions of bounded variation. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 44(20)(241) : 50–59. (in Russian)

16. Струков В.Е., Струкова И.И. 2018. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства. Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, 50(3)(241) : 254–264.

Strukov V.E., Strukova I. I. 2018. About four definitions of almost periodic at infinity functions from homogeneous space. Scientific Bulletin of Belgorod State University. Ser. Mathematics. Physics, 50(3)(241) : 254–264. (in Russian)

17. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F.. 2011. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Vol.96. Basel, Birkhauser, Monographs in Mathematics, 412.

18. Baskakov A.G., Krishtal I.A. 2016. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. Mediterranean Journal of Mathematics. 13(5) : 2443–2462.

19. Baskakov A., Strukova I. 2016. Harmonic analysis of functions periodic at infinity. Eurasian Math. J., 7(4) : 9–29.

20. Bohr H. 1925. Almost periodic functions Acta math. 45 : 29–127.