

УДК 537.8

DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-3-329-345

**ДРОБНО-ПУАССОНОВСКАЯ МОДЕЛЬ УДАРНОГО УШИРЕНИЯ
СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ****THE FRACTIONAL-POISSON MODEL OF SPECTRAL LINE COLLISION
BROADENING****В.В. Учайкин, О.П. Харлова, И.И. Кожемякин
V.V. Uchaikin, O. P. Harlova, I.I. Kozhemjakin**Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42Ulyanovsk State University,
42L. Tolstoj-street, 432017, Russia

E-mail: vuchaikin@gmail.com

Аннотация

Перенос энергии возбуждения атомов частично ионизованного газа (плазмы) осуществляется фотонами, распределения случайных пробегов R_{ph} которых, усреднённые по частотам спектральной линии, характеризуются не экспоненциальным, а асимптотически степенным законом $P(R_{ph} > x) \propto x^{-\nu}$, $\nu = 1/2$. Упругие столкновения с другими атомами изменяют профиль спектральной линии, что влечёт за собой изменение распределения пробегов фотонов. В монографии Лоудона показано, что экспоненциально распределённые интервалы времени между столкновениями, отвечающие стандартному пуассоновскому процессу (СПП) временной последовательности столкновений, не изменяют качественно лоренцевской формы. В настоящей статье рассматривается дробно-дифференциальная модель пуассоновского процесса (ДПП), описываются его основные свойства и особенности резонансного переноса возбуждений атомов в этой модели.

Abstract

The transfer of the excitation energy of atoms of a partially ionized gas (plasma) is accomplished by photons whose free paths distribution averaged over the frequencies of the spectral line is characterized not by an exponential but by an asymptotically power law. Elastic collisions with other atoms change the profile of the spectral line, which entails a change in the distribution of the paths of the photons. Loudon's monograph shows that the exponentially distributed time intervals between collisions that correspond to the Poisson model of the time sequence of collisions do not qualitatively change the Lorentz form. In this paper we consider the fractional Poisson process (FPP), describe its main properties, and peculiarity of the radiation transport of excitations of these atoms.

Ключевые слова: резонансный перенос, спектральный профиль, дробный пуассоновский процесс, функция Миттаг-Леффлера, дробные производные, метод Монте-Карло.

Keywords: resonant transfer, spectral profile, fractional Poisson process, Mittag-Leffler function, fractional derivatives, Monte Carlo method.

1. Введение

Известно, что интерпретация открытой системы (ОС) как подсистемы замкнутой гамильтоновой системы приводит к интегро-дифференциальному динамическому уравне-



нию, интегральный член которого описывает эффект *запаздывания*, называемый ещё *последствием* (Больцман), *наследственностью* (Работнов), *эредитарностью* (Вольтерра) системы. Во многих случаях интеграл последствия удобно аппроксимировать оператором дробного порядка, появление которого в уравнении приводит к специфическому поведению его решения – степенной асимптотике [1–5].

В задачах электродинамики эффект запаздывания (например, запаздывание потенциалов Лиенара-Вихерта) является прямым следствием основных принципов и обусловлен конечной скоростью распространения взаимодействий, но даже и в этом классе явлений конечная скорость не является единственной причиной этого эффекта.

Примечательной в этом отношении является монография [4] по *квантовой радиофизике*, уже в самом начале которой (в п. 2.5 первой главы) выводится уравнение, описывающее эволюцию матрицы плотности ρ_1 подсистемы замкнутой гамильтоновой системы. В отличие от полной системы, матрица плотности которой $\rho = \rho(t)$ удовлетворяет квантовому дифференциальному уравнению Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -iL\rho \quad (1)$$

уравнение для подсистемы с матрицей ρ_1 удовлетворяет более сложному *интегро-дифференциальному* уравнению

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -i\Pi L \rho_1 - \int_0^t K(\tau) \rho_1(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

где Π – проекционный оператор Цванцига-Мори [6]¹, а ядро

$$K(\tau) = \Pi L_1 \exp[-i\tau(1-\Pi)L](1-\Pi)L_1$$

содержит информацию, необходимую для учёта влияния остальной части системы на рассматриваемую подсистему. Наличие в уравнении (2) интегрального члена означает, прежде всего, *немарковский* характер процесса.

Физическое объяснение эредитарности простое: подсистема обменивается с её окружением аддитивными (кинетическая энергия, импульс, момент импульса) величинами, сохраняющимися для всей замкнутой системы, и требуется какое-то время, чтобы осуществилась эта передача. Ситуация весьма похожа на термодинамическую. Разница лишь в том, что окружение не является термостатом, то есть бесконечно ёмким резервуаром, находящимся в стационарном состоянии безотносительно к поведению рассматриваемой подсистемы. Поучительным примером в этом отношении является движение твёрдого тела (пластины, шара) в вязкой жидкости: движущееся с переменной скоростью тело (ОС) вовлекает в движение жидкость (резервуар), и обмен импульсом описывается диффер-интегральным оператором с запаздывающим ядром (сила Бассэ).

В столкновительном приближении, когда оператор L описывает мгновенное изменение скорости частицы при взаимодействии с другой, а в промежутках между столкновениями скорости не меняются, марковское свойство проявляется в экспоненциальном распределении $P(\tau_j > t) = e^{-\mu t}$, $t > 0$, случайных времён τ_j между столкновениями, так что последовательность

$$T_1 = \tau_1, \quad T_2 = \tau_1 + \tau_2, \quad T_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \dots$$

с независимыми τ_j образует *стандартный пуассоновский процесс*. Примером немарковского процесса может служить дробно-пуассоновский процесс (ДПП) порядка $\alpha \in (0,1]$,

¹ Г. Грим [7, с. 153] отмечает, что этот результат может быть получен и методом иерархических уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона



распределение времён ожидания которого принадлежит к асимптотически степенному типу распределений $P(\tau_j > t) \propto t^{-\alpha}, t > 0, \alpha \in (0, 1]$.

Предположения о немарковском характере процесса столкновений атома (иона) в газе или частично ионизованной плазме высказывались давно и отчасти подкреплялись как аналитическими расчётами, так и численным моделированием. Обсуждение степенной модели длинных хвостов временных распределений, начатое ещё в работах полувековой давности и связанное с именами ван Хова, Пригожина, Браута, Резибуа, Цванцига, Балеску, Монролла (см. литературу в [8–9]), активно продолжается и по сей день [10–12]. Последовательность испытываемых излучаемым атомом (ионом) столкновений влияет на профиль излучаемой им спектральной линии $\varepsilon(\omega)$, в свою очередь влияющей на процессы в газоразрядных лампах, световых панелях, плазменных экранах и других светотехнических устройствах [5–6, 13], придавая распределению пробегов резонансных фотонов отличный от экспоненциального вид.

Целью данной работы является выяснение влияния, которое может оказать учет степенной асимптотики распределения пробега атомов плазмы на радиационный перенос возбуждений (РПВ). В качестве демонстрационной модели немарковской последовательности столкновений излучающего атома выбран пуассоновский процесс дробного порядка $\alpha \in (0, 1]$ (для краткости – *дробно-пуассоновский процесс*, ДПП). Выбор этого однопараметрического процесса обусловлен его важным свойством: при $\alpha \neq 1$ распределение временных интервалов между событиями этого процесса характеризуется степенной асимптотикой, тогда как при $\alpha = 1$ оно становится экспоненциальным, превращая процесс в стандартный пуассоновский процесс (СПП). Методическое достоинство такого свойства очевидно: своего рода «принцип соответствия», обеспечивающий переход от одной модели к другой путем непрерывного изменения одного параметра.

2. Ударное уширение спектральной линии

Квантовая теория излучения в квазиклассической интерпретации [14] даёт основания считать $\varepsilon(\omega)$ (при надлежащей нормировке) плотностью вероятности случайной частоты ω . В модели *полного перераспределения частот* (ППЧ) отдельный акт взаимодействия трактуется как поглощение-излучение фотона атомом (кратко, *переизлучение*) со статистически независимыми частотами, а спектр переизлучённого фотона $\varepsilon(\omega)$, в силу гипотезы о *локальном термодинамическом равновесии* (ЛТР), полагается пропорциональным коэффициенту поглощения $k(\omega)$:

$$k(\omega) = C\varepsilon(\omega), \quad C > 0.$$

При сделанных предположениях такой процесс допускает описание в рамках корпускулярной теории многократного рассеяния, основанной на линеаризованном уравнении Больцмана. В случае монохроматического излучения с частотой ω случайный пробег фотона R_{ph} в оптически однородной среде характеризовался бы экспоненциальным распределением вероятности

$$P(R_{ph} > x | \omega) = e^{-k(\omega)x}, \quad x > 0. \tag{3}$$

но в РПВ естественно пользоваться усреднённым *по спектральной линии* распределением

$$P(R_{ph} > x) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-k(\omega)x} d\omega. \tag{4}$$

Излучение одиночного покоящегося атома, не подверженного столкновениям, характеризуется спектральным профилем Лоренца:



$$\varepsilon(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma/2 \ll \omega_0, \quad (5)$$

усреднение по которому заменой переменной интегрирования $s = 2(\omega - \omega_0)/\gamma$ в формуле (5) приводит её к виду

$$P(R_{\text{ph}} > x) \approx \frac{1}{2\pi} e^{-k_0 x/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{2} k_0 x \cos \varphi} d\varphi = e^{-k_0 x/2} I_0(k_0 x/2), \quad k_0 = k(\omega_0).$$

Таким образом, усреднение экспоненциальной вероятности по лоренцевскому ансамблю частот (5) превращает её в асимптотически степенную функцию

$$P(R_{\text{ph}} > x) = e^{-k_0 x/2} I_0(k_0 x/2) \sim (\pi k_0)^{-1/2} x^{-\nu}, \quad k_0 \equiv k(\omega_0), \quad x \rightarrow \infty, \quad (6)$$

с показателем $\nu = 1/2$. К такому же результату приводит и модель стандартного пуассоновского процесса для последовательности соударений.

3. Излучение в СПП

В квазиклассическом представлении процесс излучения атома на фоне последовательности столкновений описывается следующим образом [15, с.132–133]. Основное внимание уделяется паре состояний атома (основному и возбуждённому). Доплеровский и естественный (излучательный) вклады в уширение линии не учитываются. Игнорирование естественного уширения линии эквивалентно предположению, что излучательное время жизни τ велико по сравнению с интервалом времени между столкновениями. Волновой цуг электромагнитного излучения j -го отрезка (пробега) траектории непрерывно испускается атомом до тех пор, пока не произойдет его столкновение с другим атомом ($j+1$ -е столкновение), во время которого энергетические уровни излучающего атома сдвигаются, а по истечении времени столкновения снова восстанавливаются. При этом восстанавливаются и все характеристики волны, за исключением фазы. Если длительность столкновения достаточно мала, то излучением, испущенным за время столкновения, можно пренебречь, и использовать модель, в которой возбужденный атом в промежутках между столкновениями излучает электромагнитную волну с постоянной частотой ω_0 , однако каждое столкновение сдвигает фазу волны на равномерно распределённую в $[0, 1]$ случайную величину $\Delta\phi_j$, и эти сдвиги взаимно независимы. Наблюдаемое распределение частот (профиль линии) обусловлено тем, что волна разбивается на конечные цуги, фурье-компоненты которых содержат частоты, отличные от ω_0 .

Пусть $N(t)$ – случайное число столкновений, испытанных атомом за время излучения

$$t \approx \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{N(t)},$$

тогда Фурье-амплитуда излучённого к моменту t поля даётся суммой

$$E(\omega) = E_1 + E_2 + \dots + E_{N(t)}, \quad (7)$$

где

$$E_j(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_j}^{t_j + \tau_j} E_0 \exp[-i\omega_0 t + i\phi_j + i\omega t] dt =$$



$$= \frac{1}{2\pi} E_0 \exp[i(\omega - \omega_0)\tau_j + i\varphi_j] \frac{\exp[i(\omega - \omega_0)\tau_j] - 1}{i(\omega - \omega_0)}. \tag{8}$$

Ссылаясь на классические работы по теории газов, Лоудон² полагает, что интервалы времени между столкновениями $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ взаимно независимы и распределены по показательному закону с плотностью

$$\psi_1(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad \mu > 0.$$

Возводя сумму (7) в квадрат (по модулю) и учитывая, что при усреднении по промежутку времени $t \gg \tau_0 = 1/\mu$ перекрёстные члены в двойной сумме исчезают, он записывает результирующую интенсивность в виде (формула (5.20) цитируемой монографии, где τ_0 – среднее время между столкновениями.

$$\bar{I}(\omega) \sim \mu \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)^2} e^{-\mu\tau} d\tau = \frac{1}{2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \mu^2}, \tag{9}$$

который и определяет степенной характер асимптотики распределения пробегов резонансных фотонов (6). Заметим, что при указанных условиях последовательность времён t_1, t_2, \dots образует пуассоновский процесс с интенсивностью μ и средним числом событий за время t

$$\bar{N}(t) = \mu t. \tag{10}$$

Что же можно ожидать за пределами пуассоновской модели? Для ответа на этот вопрос мы выберем конкретную модель процесса со степенной асимптотикой

$$P(\tau > t) \propto t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty,$$

называемую дробным пуассоновским процессом. Рассмотрим подробнее особенности этого процесса.

4. Дробно-пуассоновский процесс

4.1. Определение ДПП. Стандартный пуассоновский процесс (СПП) интенсивности μ есть поток (временная последовательность) мгновенных событий (импульсов), длины промежутков между которыми (времена ожидания) T_j являются независимыми случайными величинами с экспоненциальной плотностью распределения

$$\psi_1(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

Характеристическая функция Лапласа этого процесса

$$\hat{\psi}_1(\lambda) \equiv \int_0^\infty \psi_1(t) e^{-\lambda t} dt = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Дробный пуассоновский процесс (ДПП) порядка $\alpha \in (0,1]$ интенсивности μ есть поток импульсов с плотностью распределения времени ожидания $\psi_\alpha(t)$, характеризуемой образом Лапласа [16–19]

$$\psi_\alpha(\lambda) = \frac{\mu}{\mu + \lambda^\alpha}. \tag{11}$$

Переписав (11) в виде

² Развёрнутая теория уширения спектральных линий дана в монографии [15]. Заканчивая параграф 8.4, об уширении спектральных линий, автор пишет: «Естественно, что эта задача в общем случае является чрезвычайно сложной. Успех может быть достигнут при использовании модельных интегралов столкновений» (с. 254.) . Именно по этой причине мы и следуем здесь квазиклассической интерпретации Лоудона.



$$[\lambda^\alpha + \mu] \cdot \psi_\alpha(\lambda) = \mu$$

и выполнив обратное преобразование, приходим к дробно-дифференциальному уравнению

$${}_0D_t^\alpha \psi_\alpha(t) + \mu \psi_\alpha(t) = \mu \delta(t).$$

При $\alpha < 1$ решение этого уравнения выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)};$$

$$\psi_\alpha(t) = \mu t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\mu t^\alpha)$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty} e^{-u} E_{\alpha, \alpha}(\mu^\alpha x) \mu^{\nu-1} du = \frac{1}{1-x},$$

легко убедиться, что плотности (10) действительно соответствует трансформанта Лапласа (9).

Функция распределения случайного времени τ выражается через однопараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$P(T < t) = \int_0^t \psi_\alpha(\tau) d\tau = 1 - E_\alpha(-\mu t^\alpha)$$

При $\alpha = 1$ «дробная экспонента» $\psi_\alpha(t)$ превращается в обычное экспоненциальное распределение $\mu e^{-\mu t}$, а дробный пуассоновский процесс (ДПП) – в стандартный пуассоновский процесс (СПП).

Существует ещё одно представление плотности распределения времени ожидания,

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} e^{-x} \phi_\alpha(\mu t / x) dx, \quad \phi_\alpha(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi [\xi^\alpha + \xi^{-\alpha} + 2 \cos(\alpha\pi)]},$$

позволяющее установить асимптотику поведения плотности при $\alpha \neq 1$ на больших и малых временах (рис. 1.):

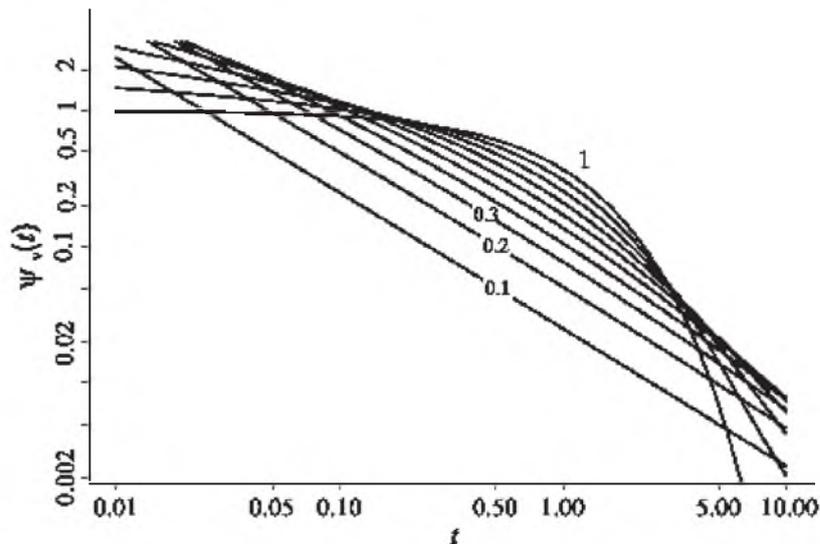


Рис 1. Плотности распределения времени ожидания для ДПП порядка $\alpha = 0, 1; 0, 2; 0, 3; \dots; 1$ ($\mu = 1$).

Fig.1: Waiting time probability densities for FPP of orders $\alpha = 0, 1; 0, 2; 0, 3; \dots; 1$ ($\mu = 1$).



$$\psi_\alpha(t) \sim \begin{cases} \frac{\mu}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, & t \rightarrow 0; \\ \frac{\alpha \mu^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha-1}, & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Эти и другие свойства ДПП, полезные для решения рассматриваемой в статье задачи, установлены и исследованы в книге [20] и статьях [21–22].

4.2. Уравнения ДПП. Согласно теории восстановления

$$p_n(t) \equiv P(N(t) = n) = P\left(\sum_{j=1}^n T_j > t\right) - P\left(\sum_{j=1}^{n+1} T_j > t\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и следующая система интегральных уравнений для $p_n(t)$ имеет место:

$$p_n(t) = \delta_{n0} \int_t^\infty \psi_\alpha(\tau) d\tau + [1 - \delta_{n0}] \int_0^t \psi_\alpha(t - \tau) p_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После преобразования Лапласа

$$\lambda^\alpha \tilde{p}_n(\lambda) = -\mu \tilde{p}_n(\lambda) + \mu \tilde{p}_{n-1}(\lambda) + \lambda^{\alpha-1} \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tilde{p}_{-1} = 0.$$

Обратное преобразование приводит к системе уравнений для ДПП с дробной производной порядка α :

$${}_0 D_t^\alpha p_n(t) = \mu [p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \delta_{n0}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

При $\alpha \rightarrow 1$ она превращается в систему для СПП:

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \mu [p_{n-1}(t) - p_n(t)] + \delta(t) \delta_{n0}.$$

Здесь использовано предельное соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \delta(t).$$

Решение системы (7) имеет вид:

$$p_n(t) = \frac{a^n}{n!} \sum_{m=0}^\infty \frac{(m+n)!}{m!} \frac{(-a)^m}{\Gamma((m+n)\alpha + 1)}, \quad a = \mu t^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Это – дробный аналог пуассоновского распределения (ДПР), превращающийся в стандартное пуассоновское при $\alpha = 1$. Моменты этого распределения

$$m_n(t) = \frac{n! a^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

В частности, среднее значение

$$\langle N(t) \rangle = m_1(t) = \frac{\mu t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

и дисперсия

$$\sigma^2(t) = m_2(t) - m_1^2(t) + m_1(t) = m_1(t) \left\{ 1 + m_1(t) [2^{1-2\alpha} \alpha B(\alpha, 1/2) - 1] \right\}$$

4.3. Моделирование ДПП. Как следует из определения ДПП, для его моделирования достаточно осуществить последовательную выборку независимых реализаций случайного интервала τ между событиями. Докажем следующую лемму.



Лемма. Распределение времени ожидания τ

$$P(\tau > t) = E_{\alpha}(-\mu t^{\alpha}) \quad (12)$$

может быть представлено в эквивалентном виде

$$P(\tau > t) = \int_0^{\infty} \exp(-\mu t^{\alpha} / s^{\alpha}) g_+^{(\alpha)}(s) ds, \quad (13)$$

где $g_+^{(\alpha)}(s)$ – односторонняя стандартная α – устойчивая (в смысле Леви) плотность вероятности.

Доказательство.

Разложив экспоненциальную функцию под интегралом (13) в ряд

$$\exp(-\mu t^{\alpha} / s^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\mu t^{\alpha} / s^{\alpha})^k$$

и пользуясь формулой моментов отрицательных порядков α – устойчивой плотности

$$\int_0^{\infty} g^{(\alpha)}(s) s^{-\alpha k} ds = \frac{k!}{\Gamma(1 + \beta k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

получим:

$$P(\tau > t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} (-\mu t^{\alpha} / s^{\alpha})^k g^{(\alpha)}(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu t^{\alpha})^k}{k!} \int_0^{\infty} s^{-\alpha k} g_+^{(\alpha)}(s) ds = E_{\alpha}(-\mu t^{\alpha}), \quad (14)$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Определённая выше случайная величина τ распределена по тому же закону, что и

$$\tau' = \frac{|\ln U|^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} S_+^{(\alpha)}, \quad (15)$$

где $S_+^{(\alpha)}$ – случайная величина с плотностью $g_+^{(\alpha)}(s)$, а U – не зависящая от $S_+^{(\alpha)}$ случайная величина с равномерным в $(0, 1]$ распределением.

Следствие. Алгоритм моделирования случайной величины τ , распределённой по закону (12) имеет вид

$$\tau = \frac{|\ln U_1|^{1/\alpha}}{\mu^{1/\alpha}} \frac{\sin(\alpha \pi U_2) [\sin(1 - \alpha) \pi U_2]^{(1-\alpha)/\alpha}}{[\sin(\pi U_2)]^{1/\alpha} |\ln U_3|^{(1-\alpha)/\alpha}}, \quad (16)$$

где U_1, U_2 , и U_3 – независимые, равномерно распределённые в $(0, 1]$ случайные число.

Доказательство выполняется использованием алгоритма Кантера [23] для моделирования случайной величины $S_+^{(\alpha)}$ в формуле (15).

5. Свойства дробно-пуассоновского процесса

Перечислим некоторые свойства ДПП, установленные с помощью приведённого алгоритма в работах [18, 21–22, 24] и могущие иметь отношение к рассматриваемой проблеме.

5.1 Время первого достижения. Пусть $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ – времена ожиданий между последовательными событиями ДПП, а

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$$

– случайный момент времени достижения процессом заданного уровня n (в нашей задаче – момент времени n -го столкновения)

$$N(T_n) = n$$

Плотность распределения T_n даётся n -кратной свёрткой $\psi_{\alpha}^{*n}(t)$. Для СПП это гамма-плотность



$$\psi_1^{*n}(t) = \mu \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t},$$

и по центральной предельной теореме (ЦПТ)

$$\Phi^{(n)}(t) \equiv (\sqrt{n}/\mu) \psi_1^{*n}(n/\mu + t\sqrt{n}/\mu) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

$\Psi^{(n)}(t)$ практически достигает предельной формы уже при $n = 10$ (рис. 2–3). При этом

$$\langle T_n \rangle = n / \mu$$

и

$$\sigma_n \equiv \sqrt{\langle T_n^2 \rangle - \langle T_n \rangle^2} = \sqrt{n} / \mu.$$

В случае ДПП

$$\langle \tau \rangle = \int_0^\infty \psi_\alpha(t) dt = \infty$$

и центральная предельная теорема неприменима. Применение обобщенной предельной теоремы (ОПТ), основанной на теории устойчивых законов [20], дает:

$$\Phi_\alpha^{(n)}(t) \equiv b_n(\alpha) \psi_\alpha^{*n}(b_n(\alpha)t) \Rightarrow g_+^{(\alpha)}(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

где $b_n(\alpha) = (n/\mu)^{1/\alpha}$, а $g_+^{(\alpha)}(t)$ – односторонняя устойчивая плотность. Важно иметь в виду, что в отличие от ЦПТ ОПТ становится практически применимой лишь в случае суммирования, число которых зависит от интересующей области значений аргумента.

5.2. Предельное дробно-пуассоновское распределение. Введем квазинепрерывную переменную $z = n/\bar{n}$. В случае стандартного пуассоновского процесса:

$$f(z; \bar{n}) = \bar{n} \frac{\bar{n}^{-nz}}{\Gamma(\bar{n}z + 1)} e^{-\bar{n}} \sim \sqrt{\frac{\bar{n}}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z-1)^2}{2/\bar{n}}\right\} \rightarrow \delta(z-1), \quad \bar{n} \rightarrow \infty. \quad (19)$$

В отличие от стандартного, дробный пуассоновский процесс в асимптотике больших времён характеризуется дробным пуассоновским распределением

$$f_\alpha(z) = \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^{1/\alpha}}{\alpha} g^{(\alpha)}\left(\left(\frac{z}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-1/\alpha}\right) z^{-1/\alpha} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1-(k+1)\alpha) [\Gamma(\alpha+1)]^{k+1}} \quad (20)$$

С моментами

$$\langle Z^k \rangle = \frac{[\Gamma(1+\alpha)]^k \Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k\alpha)}.$$

Распределение это получено В.В. Учайкиным и опубликовано в работе [18]. При $z \rightarrow 0$

$$f_\alpha(z) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}.$$

Стоит заметить также, что $\langle Z^0 \rangle = 1$, $\langle Z^1 \rangle = 1$ и $\langle Z^2 \rangle = 2\alpha B(\alpha, 1+\alpha)$, так что предельные относительные флуктуации числа событий

$$\delta_\alpha \equiv \sigma_{N(t)} / \langle N \rangle = \sqrt{2\alpha B(\alpha, 1+\alpha) - 1}.$$



Семейство предельных ДПП-распределений показано на рис 4.

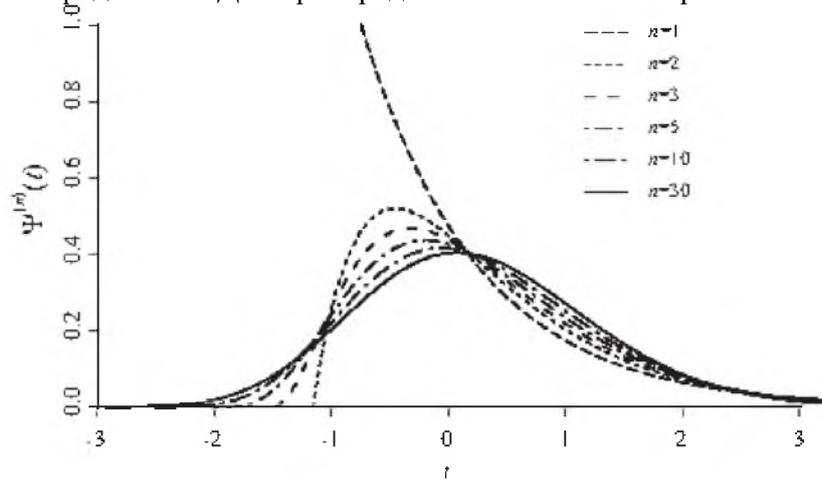


Рис 2. Перенормированные распределения (17) момента времени n -го столкновения в СПП $\alpha = 1, n=1, 2, 3, 5, 10, 30$

Fig.2. Renormalized time-distributions (17) for n th collision in SPP $\alpha = 1, n=1, 2, 3, 5, 10, 30$

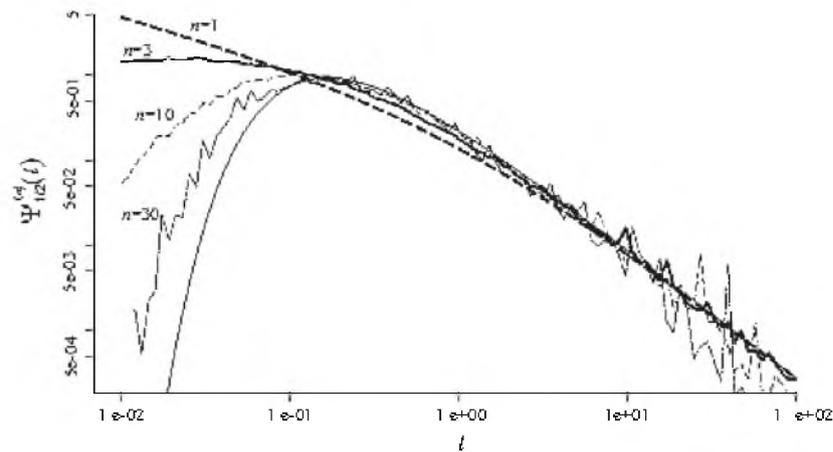


Рис 3. Перенормированные распределения (18) момента времени n -го столкновения в ДПП с $\alpha = 1/2, n=1, 3, 10, 30$

Fig 3. Renormalized time-distributions (18) for n th collision in FPP with $\alpha = 1/2, n=1, 3, 10, 30$

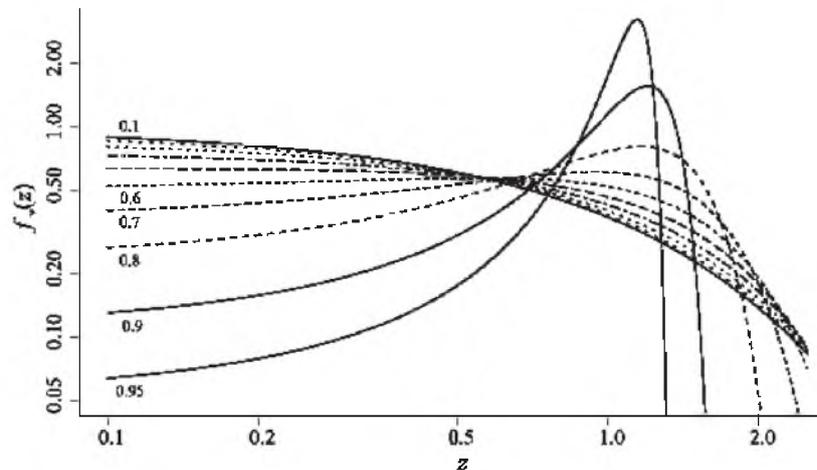


Рис 4. Предельные ДПП-распределения при $\alpha = 0.1(0.1)0.9$ и 0.95 .

Fig 4. Limit FPP distributions for $\alpha = 0.1(0.1)0.9$ and 0.95 .

5.3. Перемежаемость. Особым свойством ДПП является *перемежаемость*, роднящая его с турбулентным процессом. Разобьем конечный временной интервал на некоторое число (скажем, 1000, как это показано на рис. 5) одинаковых ячеек и, подсчитав число событий в каждой из них, представим результат в виде пары верхних гистограмм. Левая верхняя относится к СПП. На ней видны статистические флуктуации, но изменение масштаба в 100 раз (нижняя гистограмма) сглаживает гистограмму, флуктуации становятся малозаметны. На правой верхней гистограмме изображён ДПП: видим большие флуктуации. Часть ячеек остаётся вообще пустой. Однако процедура изменения масштаба, подобная описанной выше, не изменяет ситуации в этом случае – сглаживания не происходит, мы по-прежнему видим сгущения (кластеры) и пустующие ячейки. Свойство ДПП сохранять высокий уровень неоднородности при изменении масштаба называют *перемежаемостью*. Моделирование ДПП с помощью приведённого выше алгоритма показало, что предел доли пустых ячеек n_0/n при $\mu \rightarrow \infty$ (то есть при увеличении средней плотности событий на временной оси) существует и не зависит от размера ячеек, а только от порядка α ДПП. В [8] предложено ввести коэффициент перемежаемости

$$R(\alpha) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \langle n_0/n \rangle, \tag{21}$$

монотонно убывающий от 1 до 0 при возрастании α от 0 до 1 (рис. 6)

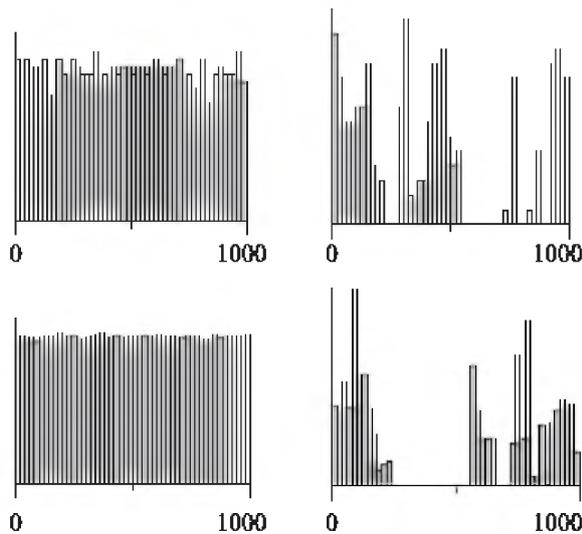


Рис 5. Перемежаемость: изменение масштаба разбиения в 100 раз сглаживает гистограмму пуассоновского процесса (слева) и не сглаживает гистограмму ДПП ($\alpha = 1/2$, справа) [21]

Fig 5. Intermittency: the scale change in 100 times smooths the SPP- histogram (left panel) but doesn't smooth the FPP-histogram ($\alpha = 1/2$, right panel) [21]

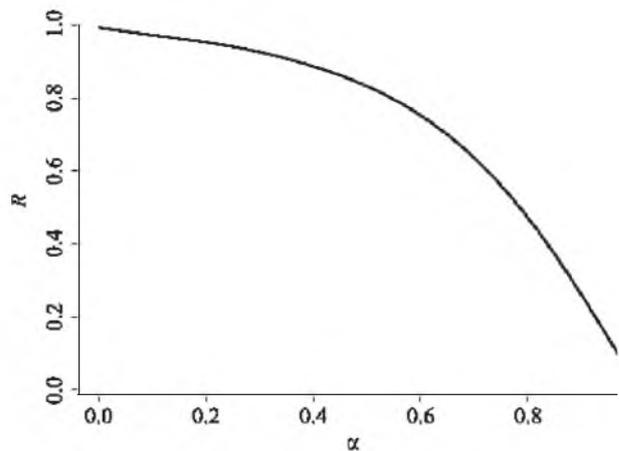


Рис 6. Коэффициент перемежаемости (предел средней доли пустых ячеек) ДПП как функция характеристического показателя процесса α

Fig 6. The intermittency coefficient (the limit of mean proportion of empty cells) as a function of the process characteristic exponent α

5.4. Иерархия времен ожидания. Возьмем теперь всю совокупность времён ожидания τ_j , составляющих в сумме время достижения n -го уровня

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n,$$

и расположим слагаемые в порядке убывания (вероятность совпадения независимых непрерывно распределённых случайных величин равна нулю):



$$T_n = \tau_{[1]} + \tau_{[2]} + \dots + \tau_{[n]}, \quad \tau_{[1]} < \tau_{[2]} < \dots < \tau_{[n]}.$$

Назовем последнее слагаемое в этой сумме $\tau_{[n]}$ *лидирующим слагаемым*, или просто *лидером*. Его плотность распределения даётся выражением

$$f_{\tau_{[n]}}(t) = n[\Psi_\alpha(t)]^{n-1} \psi_\alpha(t),$$

в котором

$$\Psi_\alpha(t) = \int_0^t \psi_\alpha(\tau) d\tau.$$

Вообще, плотность распределения k -го по величине слагаемого имеет вид [25]

$$f_{\tau_{[k]}}(t) = n \binom{n-1}{k-1} [\Psi_\alpha(t)]^{n-k} [\bar{\Psi}_\alpha(t)]^{k-1} \psi_\alpha(t), \quad (22)$$

$$\bar{\Psi}_\alpha(t) = \int_t^\infty \psi_\alpha(\tau) d\tau.$$

Первый множитель n означает, что на k -м месте по величине может оказаться любая из n случайных величин $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$, последний множитель дает вероятность того, что эта случайная величина окажется в единичном интервале около точки t , а произведение трёх промежуточных множителей есть вероятность такого расположения оставшихся $n-1$ слагаемых, что $k-1$ окажутся справа от точки t , то есть будут больше $\tau_{[k]}$, а остальные $n-k$ расположатся слева от t , то есть будут меньше $\tau_{[k]}$. Для качественной оценки характерных значений упорядоченных времен ожидания воспользуемся их наивероятными значениями $\tau_{[k]}(n, \alpha)$, даваемыми уравнением $f'_{\tau_{[k]}}(\hat{\tau}_{[k]}) = 0$.

В случае СПП ($\alpha = 1$, $\Psi_1(t) = 1 - e^{-\mu t}$, $\bar{\Psi}_1(t) = e^{-\mu t}$, $\psi_1 = \mu e^{-\mu t}$) из этого уравнения находим

$$\hat{T}_{[k]}(n, 1) = \frac{1}{\mu} \ln \frac{n}{k}.$$

В случае ДПП мы ограничимся лишь асимптотической оценкой, приняв

$$\Psi_\alpha(t) \sim 1 - [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1} t^{-\alpha}, \quad \bar{\Psi}_\alpha(t) \sim [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1} t^{-\alpha}, \quad \psi_\alpha(t) \sim \alpha [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1} t^{-\alpha-1}.$$

В результате получаем

$$\tau_{[k]}(n, \alpha) = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1 + \alpha n}{\Gamma(1-\alpha)(1 + \alpha k)} \right]^{1/\alpha}.$$

Сопоставим теперь наивероятные значения лидирующих членов с наивероятными значениями соответствующих сумм при $n \rightarrow \infty$:

$$\tau_{[1]}(n, 1) = \frac{1}{\mu} \ln n, \quad T_n(1) \sim \frac{n}{\mu}, \quad \alpha = 1,$$

и

$$\tau_{[1]}(n, \alpha) \sim \frac{1}{\mu} \left[\frac{\alpha n}{\Gamma(1-\alpha)(1 + \alpha)} \right]^{1/\alpha}, \quad T^{(n)}(\alpha) \sim \mu^{-1} n^{1/\alpha} S_+^{(\alpha)}, \quad \alpha < 1,$$

где $S_+^{(\alpha)}$ – случайная величина с односторонней устойчивой плотностью $g_+^{(\alpha)}(x)$.

Видно, что в первом случае роль отдельного интервала в траектории процесса с увеличением их числа быстро убывает; в больших масштабах траектория $N(t)$ выглядит почти прямой с едва заметными неровностями. Во втором вклад в траекторию лидирующего интервала остается соизмеримым с величиной всего интервала достижения *при любом* n . С



повышением уровня мы увеличиваем число интервалов ожидания, но увеличивается оно пропорционально $n^{1/\alpha}$, то есть медленнее, чем растет n . Замедление это объясняется вовлечением в процесс все более долгих времён ожидания, среди которых появляется новый лидер, сменяющий прежнего и вновь несущий на себе основную «тяжесть» времени достижения.

При $k \gg 1/\alpha$ $\hat{\tau}_{[k]}(n, \alpha)$ убывает по степенному закону $n^{-1/\alpha}$, отражающему существующую в ДПП иерархию. В двойном логарифмическом масштабе зависимость

$$\hat{\tau}_{[k]}(n, \alpha) \sim \frac{1}{\mu} \left[\frac{1 + \alpha n}{\Gamma(1 - \alpha) \alpha k} \right]^{1/\alpha}$$

от k выглядит прямой с наклоном $-1/\alpha$. Если мы имеем траекторию процесса восстановления, записанную в терминах времен ожидания, том можно упорядочить эти времена и изобразить результат в двойном логарифмическом масштабе. Если экспериментальные точки расположатся вдоль прямой, это будет указанием на наличие степенного хвоста в распределении времени ожидания. Именно к такому типу процессов и принадлежит ДПП.

6. Относительный вклад лидера

Мы рассматривали наивероятные значения для характеристики соотношений между пробегами (временами ожиданий) не только потому, что они легче вычисляются, чем средние значения, но главным образом потому, что средние вообще бесконечны при $\alpha < 1$. Последнее препятствие исчезнет, если характеризовать роль лидера в сумме относительным вкладом.

Мы последуем здесь Феллеру [26], использовавшему для этой цели обратную величину,

$$G_n = T_n / \hat{\tau}_{[n]}$$

обладающую конечным математическим ожиданием. Трансформанта Лапласа её плотности вероятности запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{f}_{G_n}(\lambda) &= \langle e^{-\lambda G_n} \rangle = \int_0^\infty dt_1 \dots \int_0^\infty dt_n \exp \left\{ -\lambda \sum_{i=1}^n t_i / \max \{t_i\} \right\} \psi_\alpha(t_1) \dots \psi_\alpha(t_n) = \\ &= n e^{-\lambda} \int_0^\infty dt \psi_\alpha(t) \left[\int_0^t \exp \{ -\lambda \tau / t \} \psi_\alpha(\tau) d\tau \right]^{n-1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Заменой переменной $x = \tau/t$ во внутреннем интеграле и $s = t/b_n$ во внешнем уравнение (23) приводится к виду

$$\hat{f}_{R_n}(\lambda) = n e^{-\lambda} \left\{ b_n \int_0^\infty ds \psi_\alpha(b_n s) \left[b_n s \int_0^1 e^{-\lambda x} \psi_\alpha(b_n s x) dx \right]^{n-1} \right\}. \tag{24}$$

Содержимое квадратных скобок удобно преобразовать следующим образом:

$$b_n s \int_0^1 e^{-\lambda x} \psi_\alpha(b_n s x) dx = 1 - \int_{b_n s}^\infty \psi_\alpha(\tau) d\tau - b_n s \int_0^1 [1 - e^{-\lambda x}] \psi_\alpha(b_n s x) dx. \tag{25}$$

Используя асимптотическую формулу для $\psi_\alpha(t)$, получим

$$b_n s \int_0^1 e^{-\lambda x} \psi_\alpha(b_n s x) dx \sim 1 - (b_n s)^{-\alpha} A(\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \tag{26}$$

где



$$A = [\mu^\alpha \Gamma(1-\alpha)]^{-1}, \quad \eta(\lambda) \equiv 1 + \alpha \int_0^1 (1 - e^{-\lambda x}) x^{-\alpha-1} dx.$$

Подставляя найденные выражения в (24), мы имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}_{G_n}(\lambda) &\sim n^{1+1/\alpha} e^{-\lambda} \int_0^\infty ds \psi_\alpha(n^{1/\alpha} s) \left[1 - \frac{s^{-\alpha} A}{n} \eta(\lambda) \right]^{n-1} \sim \\ &\sim n^{1+1/\alpha} e^{-\lambda} \int_0^\infty ds \psi_\alpha(n^{1/\alpha} s) \exp\{-s^{-\alpha} A \eta(\lambda)\}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Принимая во внимание, как это было сделано при выводе (26), что

$$\psi_\alpha(n^{1/\alpha} s) \sim \alpha A (n^{1/\alpha} s)^{-\alpha-1},$$

мы приходим к предельному выражению для (27):

$$\hat{f}_{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_{R_n}(\lambda) = e^{-\lambda} \alpha A \int_0^\infty ds s^{-\alpha-1} \exp\{-s^{-\alpha} A \eta(\lambda)\}.$$

Заменой переменных

$$\sigma = s^{-\alpha} A \eta(\lambda)$$

оно преобразуется к виду

$$\hat{f}_{G_n}(\lambda) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_{G_n}(\lambda) = \frac{e^{-\lambda}}{\eta(\lambda)} = \frac{e^{-\lambda}}{1 + \alpha \int_0^1 (1 - e^{-\lambda x}) x^{-\alpha-1} dx}. \quad (28)$$

Формула (27) позволяет найти среднее значение предельного отношения R

$$\langle G \rangle = -\hat{f}'_G(0)$$

и средний квадрат его относительных флуктуаций:

$$\delta_G^2 = \frac{\langle G^2 \rangle - \langle G \rangle^2}{\langle G \rangle^2} = \frac{\hat{f}''_G(0)}{[\hat{f}'_G(0)]^2} - 1.$$

После несложных вычислений получаем:

$$\delta_G^2 = 2 - \left[1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{2-\alpha} \right] (1-\alpha)^2 - 1 = \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

Максимального значения флуктуации G достигают при $\alpha=1$, когда вклад отдельного слагаемого в сумму становится бесконечно малым (а отношение G , соответственно, бесконечно большим). При $\alpha \rightarrow 0$ G почти полностью определяется наибольшим слагаемым, его значение близко к единице и флуктуации, соответственно, малы.

7. Заключение

Вернёмся теперь к обсуждению вопроса, поставленного в начале статьи: каких изменений можно ожидать при замене СПП в рассматриваемой модели на ДПП? Из формулы (9) следует, что полная энергия $Q(\omega, t) = \bar{I}(\omega) t$, излучаемая на частоте ω за время t

(с точностью до множителя $\left(\frac{E_0}{\pi}\right)^2$, пропущенного Лоудоном) даётся выражением

$$Q(\omega, t) \sim \mu t \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)^2} e^{-\mu\tau} d\tau, \quad (29)$$



следующим из его формулы (5.20). В модели СПП $\mu t = \langle N(t) \rangle$ и $\mu e^{-\mu t} = \psi_1(t)$, так что правую часть формулы (29) можно представить в виде:

$$Q(\omega, t) \sim \langle N(t) \rangle \frac{1}{\mu} \left\langle \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau / 2]}{(\omega - \omega_0)^2} \right\rangle, \tag{30}$$

где

$$\left\langle \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau / 2]}{(\omega - \omega_0)^2} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)\tau / 2]}{(\omega - \omega_0)^2} \psi_1(\tau) d\tau. \tag{31}$$

В предположении же о дробном порядке пуассоновского процесса ($\psi(t) = \psi_\alpha(t)$ и $\langle N(t) \rangle = \mu t^\alpha / \Gamma(\alpha + 1)$) можно было бы ожидать

$$Q(\omega, t) \sim \frac{\mu t^\alpha}{4\Gamma(\alpha + 1)} \phi_\alpha(\omega - \omega_0), \quad \phi_\alpha(\Delta) = \int_0^\infty \frac{\sin^2(\Delta \cdot t / 2)}{(\Delta \cdot t / 2)^2} \psi_\alpha(t) dt.$$

Следующие соображения, однако, заставляют отказаться от столь прямого распространения формул (30)–(31) на ДПП-модель.

1. В СПП-модели

$$\mu e^{-\mu t} = \psi_1(t) = \mu \bar{\Psi}_1(t),$$

и выбор конкретной подстановки здесь сказывается только на значении постоянного сомножителя, тогда как в случае ДПП вопрос о выборе между $\psi_\alpha(t)$ и $\bar{\Psi}_\alpha(t)$ становится более проблематичным.

2. Дело ещё и в том, что использование плотности $\psi_\alpha(t)$ при усреднении молчаливо предполагает, что усреднение ведётся по целому отрезку траектории, тогда как усреднение с использованием вероятности $\bar{\Psi}_\alpha(t)$ предполагает частичное пересечение этого последнего отрезка с интервалом излучения $(0, t)$.

3. То обстоятельство, что в формуле (30) вместо усреднённого произведения мы видим произведение средних, тоже настораживает. По существу, это означает пренебрежением корреляций вдоль траектории, с чем можно согласиться, если пробеги (и времена ожидания) более или менее однородны по величине, их много, а роль каждого относительно мала, но как мы видели выше, ДПП в отличие от СПП такими свойствами не обладает. Напротив, свойство перемежаемости вносит далёкие корреляции, высокую хаотичность процесса и расходимость моментов времени ожидания, в том числе и его среднего значения.

4. Ввиду этого свойства возникают длинные временные периоды бесстолкновительного движения атома. Периоды эти сопровождаются узкими спектральными линиями. В то же время, они разделены промежутками с высокой частотой столкновений, что существенно уширяет спектральные линии. Таким образом, можно ожидать наложение узких пиков на вершины уширенных многократными соударениями спектральных линий. Подчеркнём, что речь идёт не о свёртках распределений, как пишет Лоудон на с. 138 своей книги, а именно о *наложении*. Свёртки уширяют распределения, наложения же дают им сложную структуру.

5. В связи с рассмотрением в рамках данной модели деталей, которые в стандартной модели привычно опускаются, нельзя не упомянуть о пренебрежении перекрёстными членами при усреднении квадрата суммы вкладов волн, создаваемых разными отрезками траектории.

6. Разработанная и описанная в настоящей работе модель основана на теории устойчивых законов Леви. В силу её специфики (отсутствие простых выражений плотностей через элементарные функции, расходимость моментов, неприменимость стандартного корреляционного анализа) основным средством анализа выбран метод Монте-Карло. Проведённые расчёты методом Монте-Карло с использованием описанного выше алгоритма и представленные на рис. 7–8 результаты подтверждают высказанные здесь соображения.

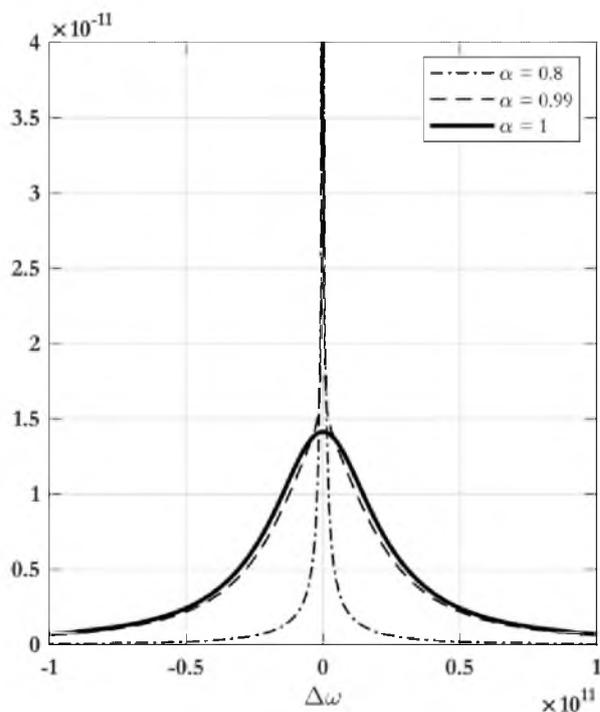


Рис 7. Спектр излучения атома в СПП ($\alpha = 1$) и ДПП моделях, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

Fig 7. The radiation spectrum of atom in SPP ($\alpha = 1$) and FPP models, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$

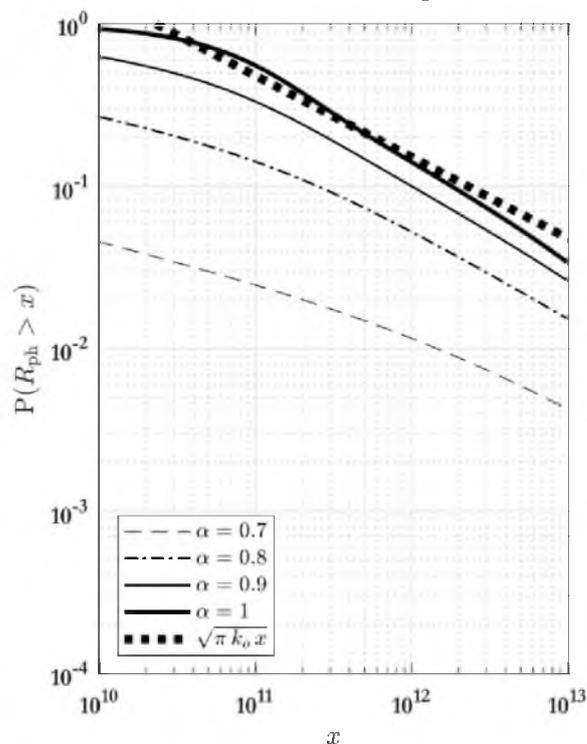


Рис 8. Распределение вероятностей для свободных пробегов фотона в поле излучения атомов, выполняющих СПП и ДПП-движения

Fig 8. Photon free path probability distributions in the radiation field of atoms performing SPP- and FPP-motion

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-01-00556, 18-51-53018).

Список литературы References

1. Учайкин В.В. 2014. О дробно-дифференциальном уравнении Лиувилля как уравнении динамики открытой системы. Научные ведомости БелГУ. Математика, Физика, 25(196): 58–67.
Uchaikin V.V. 2014. On the fractional-differential Liouville equation as an equation of the dynamics of an open system. Scientific bulletins of the Belgorod State University. Mathematics, Physics, 25(196): 58–67.
2. Uchaikin V.V. 2013. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Springer, Berlin (2013).
3. Учайкин В.В. 2016. Открытые системы. В кн.: Механика. Основы механики сплошных сред. СПб-М.: Лань, 707–714.
Uchaikin V.V. 2016. Open systems. In: Mechanics. Fundamentals of continuum mechanics, S.Pet-M.: Lan, 707–74.
4. Файн В.М. 1972. Фотоны и нелинейные среды. В кн. Квантовая радиофизика, том 1. – М.: Изд-во «Советское радио».

- Fayn V.M. 1972. Photons and nonlinear media. In the book *Quantum Radiophysics, Volume 1.* – M.: Izd-vo «Sovetskoye radio».
5. Zwanzig R.W. 1961. *Lectures in Theoretical Physics, vol.3.*, Willey (Interscience), New York.
6. Грим Г. 1978. Уширение спектральной линии в плазме. М.: Изд-во Мир.
- Grim, G. 1978. *Broadening of the spectral line in a plasma.* Moscow: Izd-vo Mir.
7. Zwanzig R.W. 1961. *Lectures in Theoretical Physics, vol.3.*, Willey (Interscience), New York.
8. Форстер Д. 1980. Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции. М.: Атомиздат.
- Forster D. 1980. *Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry and correlation functions.* Moscow: Atomizdat
9. Резибуа П., Де Ленер М. 1980. Классическая теория жидкостей и газов. М.: Мир.
- Rezibua P., De Lener M. 1980. *Classical theory of liquids and gases.* Moscow: Mir
10. Dongari, Y., Zh., Reese J. M. 2011. Molecular free path distribution in rarefied gases, *J. Phys. D Appl. Phys.* 44: 125502.
11. Visco P. van Wijland F., Trizac E. 2008. Collisional statistics of the hard-sphere gas, *PHYSICAL REVIEW E* 77: 041117.
12. Ernst M.H. 2005. Universal power law tails of time correlation functions, *Phys. Rev. E* 71: 030101.
13. Нагирнер Д.И. 1983. Теория переноса излучений в спектральных линиях. *Итоги науки и техники. Сер. Астрономия*, 220.
- Nagirner DI 1983. *The theory of radiation transfer in spectral lines.* Itogi nauki i tekhniki. Ser. *Astronomiya*, 220.
14. Учайкин В.В. 2008. Кинетические модели в проблеме переноса возбуждений резонансным излучением В кн. *Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б, том VII–I*, – М.: Янус-К, 366–383.
- Uchaikin V.V. 2008. *Kinetic models in the problem of transfer of excitations by resonant radiation.* *Encyclopedia of low-temperature plasma. Series B, Volume VII–I*, – М.: Janus-K, 366–383.
15. Лоудон Р. 1976. Квантовая теория света. М.: Мир.
- Loudon R. 1973 *Quantum theory of light*, Clarendon Press. Oxford.
16. Repin O.N., Saichev A.I. 2000. Fractional Poisson Law, *Radiophys. Quant. Electron.* 43: 738–741.
17. Laskin N. Fractional Poisson process. *Communication in Nonlin. Sci. and Numer. Simulation*, 8: 201-213.
18. Учайкин В.В. 2003. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы, *Успехи физических наук.* 173(8): 847–876.
- Uchaikin V.V. 2003. *Self-similar anomalous diffusion and Levy-stable laws* *Physics-Uspexhi*(2003),46(8):821
19. Wang X., Wen Z. 2003. Poisson fractional processes, *Chaos, Solitons and Fractals*, 18: 169–177.
20. Учайкин В.В. 2008. *Метод дробных производных.* Ульяновск, Артишок.
- Uchaikin V.V. 2008. *The method of fractional derivatives.* Ulyanovsk, Artishok.
21. Uchaikin V.V., Cahoy D.O., Sibatov R.T. 2008. Fractional processes: from Poisson's to branching ones. *Intern. Journal of Bifurcation and Chaos*, 18(9): 2717–2725.
22. Cahoy D.O., Uchaikin V.V., Woyczynski V.A. 2010. Parameter estimation for fractional Poisson processes. *J. Statist. Plann. Inference* 140 (11): 3106–3120.
23. Kanter M. 1975. Stable densities under change of scale and total variation inequalities, *Ann. Prob.* 3: 697–707.
24. Булышев А.Е., Преображенский Н.Г., Суворов А.Е. 1988. Перенос излучения в спектральных линиях. *Успехи физических наук*, 156(1): 153–175.
- Bulyshv A.E., Preobrazhenskii N.G., Suvorov A.E. 1988. *Radiation transport in spectral lines.* *Sov. Phys. Usp.* 31 865–878.
25. Уилкс С. 1967. *Математическая статистика.* М.: Наука.
- Wilks S.S. 1962. *Mathematical Statistics*, Wiley.
26. Феллер В. 1967. *Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2.* М.: Мир.
- Feller William. 1957. *An Introduction to Probability Theory and its Applications (Volume 2)* John Wiley & Sons Inc.