УДК 537.8
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-197-206

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

COMPARATIVE ANALYSIS OF SOME DIRECT METHODS FOR SOLVING PROBLEMS IN MATHEMATICAL PHYSICS

В.И. Ванько, Н.К. Косакян
V.I. Vanko, N.K. Kosakyan

Московский Государственный Технический Университет имени Н.Э. Баумана,
Россия, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

Bauman Moscow State Technical University,
5 building 1 Second Baumanskaya St., Moscow, 105005, Russia

E-mail: vvanko@mail.ru, grandsero3@gmail.com;

Аннотация
В работе обсуждаются решения задачи о вычислении прогибов прямоугольной мембраны (жесткий неподвижный контур со сторонами ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) постоянного натяжения, нагружаемой равномерно распределенным давлением. Задача решается прямыми методами: Ритца (Бубнова-Галеркина), наименьших квадратов и Канторовича. Эти решения сравниваются по нормам невязок. Методом разделения переменных строится точное решение задачи (в рядах), с которым сравниваются упомянутые выше решения. Выяснено, что решение методом Канторовича «поточечно» имеет наименьшее отклонение от точного решения.

Abstract
The paper discusses the problem of the deflections of a rectangular membrane (rigid fixed contour with sides $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) constant tension's, loaded uniformly distributed pressure. The problem is solved by direct methods: Ritz (Bubnov-Galerkin), least squares and Kantorovich. These solutions are compared according to the residual norm. By the method of variables separation, the exact solution of the problem (in series) is constructed, with which the solutions mentioned above are compared. It is found out that the solution by the Kantorovich method "pointwise" has the smallest deviation from the exact solution.

Ключевые слова: мембрана под давлением, задача Дирихле, прямые методы: Ритца, наименьших квадратов, Канторовича, разделения переменных; сравнительный анализ полученных решений.
Key words: membrane under pressure, Dirichlet problem, methods: Ritz, least squares, Kantorovich, variables separation; a comparative analysis of the solutions obtained.

Введение

Как известно, основной вопрос в связи с вариационной постановкой задачи ─ вопрос о существовании решения. Методы классического вариационного исчисления приводят к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (либо ─ к уравниям в частных производных). Теория ОДУ дает ответ на вопрос о существовании решения краевой задачи в редких случаях [1]. Кроме того, уравнения Эйлера и исходная вариационная задача в общем случае неэквивалентны [2].

Отмеченные обстоятельства заставили искать иные подходы к решению задач математической физики, что привело к созданию так называемых прямых методов. По определению С.Л. Соболева, прямыми называют методы решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений [3].

Среди известных из литературы определений приведенное выше является наиболее общим и полным, хотя некоторые методы из рассматриваемых в предлагаемой работе трудно подвести под упомянутое определение. Таков, например, метод Л.В. Канторовича [2].

1. Постановка задачи и точное решение

Поставим задачу о вычислении прогибов $u(x,y)$ упругой мембраны, ограниченной жестким неподвижным прямоугольным контуром Г $(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$ и нагруженной равномерным поперечным давлением

$$P = \text{const}\left([P] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\right).$$

Задачу решаем в геометрически линейной постановке: $u(x,y) \ll \max(a,b); u_x, u_y \ll 1$; натяжение мембраны $T = \text{const}$ $\left([T] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$. Как известно, проблема сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона [4]:

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \frac{P}{T} \equiv c, \quad (0 < x < a, \ \ 0 < y < b; \ [c] = \text{м}^{-1}) \\ \qquad\qquad u(x,y)|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решим задачу (1) методом разделения переменных (точным методом).

Преобразуем задачу (1) для уравнения Пуассона с нулевыми краевыми условиями в задачу для уравнения Лапласа с отличными от нуля краевыми условиями.

Рассмотрим функцию:

$$\tilde{u}(x,y) = u(x,y) + \frac{c}{4}x^2 + \frac{c}{4}y^2.$$

Отсюда:

$$u(x,y) = \tilde{u}(x,y) - \frac{c}{4}x^2 - \frac{c}{4}y^2.$$

Тогда:

$$\Delta u(x,y) = c \Rightarrow \Delta\tilde{u}(x,y) = 0. \tag{2}$$

Соответствующим образом преобразуем краевые условия:

$$u(x,y)|_\Gamma = \left(\tilde{u}(x,y) - \frac{c}{4}x^2 - \frac{c}{4}y^2\right)_\Gamma = 0 \Rightarrow$$
$$\tilde{u}(0,y) = \frac{c}{4}y^2 = \psi(y), \quad \tilde{u}(a,y) = \frac{c}{4}(a^2 + y^2) = \xi(y), \tag{3}$$

$$\tilde{u}(x,0)=\tfrac{c}{4}x^2=f(x),\quad \tilde{u}(x,b)=\tfrac{c}{4}(b^2+x^2)=\varphi(x).$$

Решение задачи (2), (3) методом разделения переменных изложено в [4]:

$$\tilde{u}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\bar{\varphi}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)+\frac{\bar{f}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\bar{\xi}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+\frac{\bar{\psi}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right)-\left(\frac{c}{4}ax+\frac{c}{4}by\right),$$

$\bar{\varphi}_n,\bar{f}_n,\bar{\xi}_n,\bar{\psi}_n$ – коэффициенты разложения следующих функций (в силу краевых условий (3) и выражения (4)):

$$\tilde{u}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)-\frac{c}{4}ax=\frac{c}{4}x^2\ \Rightarrow$$

$$\bar{f}(x)\equiv\frac{c}{4}(x^2+ax)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

$$\tilde{u}(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)-\frac{c}{4}(ax+b^2)=\frac{c}{4}(x^2+b^2)\Rightarrow$$

$$\bar{\varphi}(x)=\frac{c}{4}(x^2+ax+2b^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\varphi}_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Функции $\bar{f}(x)$ и $\bar{\varphi}(x)$, заданные на отрезке $x\in[0,a]$, раскладываются на этом отрезке в ряд по синусам. Следовательно:

$$\bar{f}_n=\frac{2}{a}\int_0^a\bar{f}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx,\quad \bar{\varphi}_n=\frac{2}{a}\int_0^a\bar{\varphi}(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx.$$

Аналогично имеем:

$$\tilde{u}(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\psi}_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)-\frac{c}{4}by=\frac{c}{4}y^2\ \Rightarrow$$

$$\bar{\psi}(y)\equiv\frac{c}{4}(y^2+by)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\psi}_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

$$\tilde{u}(a,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\xi}_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)-\frac{c}{4}(by+a^2)=\frac{c}{4}(y^2+a^2)\Rightarrow$$

$$\bar{\xi}(y)=\frac{c}{4}(y^2+by+2a^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\xi}_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Функции $\bar{\psi}(y), \bar{\xi}(y)$ заданы на отрезке $y \in [0, b]$, поэтому коэффициенты Фурье вычисляются аналогично:

$$\bar{\psi}_n = \frac{2}{b}\int_0^b \bar{\psi}(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy,\ \ \bar{\xi}_n = \frac{2}{b}\int_0^a \bar{\xi}(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy.$$

Рассмотрим m-ную частичную сумму ряда (4):

$$s_m(x,y) = \sum_{n=1}^{m}\left(\left(\frac{\bar{\varphi}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + \frac{\bar{f}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\bar{\xi}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \frac{\bar{\psi}_n}{\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right) - \left(\frac{c}{4}ax + \frac{c}{4}by\right). \qquad (5)$$

Количество слагаемых m в формуле (5) выбираем так, чтобы удовлетворить неравенству:

$$|s_{m+1000} - s_m| < 10^{-6}.$$

После определения функции $\tilde{u}(x,y)$ получим решение задачи (1):

$$u(x,y) = s_m(x,y) - \frac{c}{4}x^2 - \frac{c}{4}y^2.$$

Назовем решение (6) «точным».

2. Приближённые решения

Известно, что оператор Лапласа, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, взятый с отрицательным знаком $(-\Delta)$, при условии обращения искомой функции в нуль на границе, – положительно определён. Поэтому задача (1) в силу теоремы о минимальном функционале эквивалентна вариационной задаче [2]:

$$\begin{cases} J[u(x,y)] = \iint\limits_D [(-\Delta u)u - 2cu)dxdy \to \min, \\ u(x,y)|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Интегрант функционала преобразуем по формуле Грина (с учетом условия на контуре):

$$\begin{cases} J[u(x,y)] = \iint_D \left(u_x^2 + u_y^2 - 2cu\right)dxdy \to \min, \\ u(x,y)|_\Gamma = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Далее при решении задачи прямыми методами, используем эквивалентные постановки (1) и (7).

2.1. Методы Ритца и наименьших квадратов [2]

Решая задачу методами Ритца и наименьших квадратов, прогибы $u(x,y)$ ищем в виде:

$$u(x,y) = \alpha(x^2 - ax)(y^2 - by),$$

где $\alpha = \text{const}, [\alpha] = \text{м}^{-3}$.

1) Метод Ритца.

Используем представление (7) (нижние индексы «x, y» обозначают соответствующее дифференцирование):

$$u_x = \alpha(2x - a)(y^2 - by),\ \ u_y = \alpha(x^2 - ax)(2y - b) \Rightarrow$$

$$J[u] = \alpha^2 \int\limits_0^a \int\limits_0^b [(2x - a)^2(y^2 - by)^2 + (x^2 - ax)^2(2y - b)^2]dxdy -$$

$$-2c\alpha \int\limits_0^a \int\limits_0^b (x^2 - ax)(y^2 - by)dxdy \Rightarrow J(\alpha) = a^3b^3(a^2 + b^2)\frac{\alpha^2}{90} - a^3b^3c\frac{\alpha}{18} \to \min \Rightarrow$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}\frac{c}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно:

$$u_r(x,y) = \frac{5}{2}\frac{c}{a^2 + b^2}(x^2 - ax)(y^2 - by). \tag{8}$$

Отметим следующее: в силу положительной определенности оператора задачи, полученное решение (8) есть также и решение методом Бубнова-Галеркина.

2) Метод наименьших квадратов.

Используем постановку (1).

Образуем невязку $\gamma = -\Delta u - c$ и вычислим ее норму:

$$||\gamma||^2 = \int_0^a \int_0^b (\Delta u + c)^2 dxdy = \int_0^a \int_0^b (u_{xx} + u_{yy} + c)^2 dxdy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(\alpha) = \frac{2}{15}\left((a^2 + b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2\right)ab\alpha^2 - \frac{2}{3}cab(a^2 + b^2)\alpha + abc^2. \tag{9}$$

Минимизируем полученное выражение:

$$J(\alpha) \to \min \Rightarrow \frac{dJ}{d\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$u_{ls} = \frac{5}{2}\frac{c(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2}(x^2 - ax)(y^2 - by).$$

2.2. Метод Канторовича

При решении задачи (7) методом Канторовича прогибы мембраны находим в виде:

$$u_k(x,y) = \alpha(x)(y^2 - by). \tag{10}$$

Соотношение (10) удовлетворяет условиям:

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 \ \Rightarrow \ \alpha(0) = \alpha(a) = 0$$

– получены краевые условия для искомой функции $\alpha(x)$.

Имеем, используя постановку задачи (7):

$$u_x = \alpha_x(y^2 - by),\ \ u_y = \alpha(2y - b) \Rightarrow$$
$$J[u] = \int_0^a \int_0^b [\alpha_x^2(x)(y^2 - by)^2 + \alpha^2(x)(2y - b)^2 -$$
$$-2c\alpha(x)(y^2 - by)]dxdy \to \min.$$

Интегрируя по координате y, получим вариационную задачу относительно функции $\alpha(x)$:

$$\begin{cases} J[\alpha(x)] = \int_0^a \left(\frac{1}{30}b^5\alpha_x^2 + \frac{1}{3}b^3\alpha^2 + \frac{1}{3}cb^3\alpha\right)dx \to \min \\ \alpha(0) = \alpha(a) = 0. \end{cases}$$

Записываем уравнение Эйлера и ставим краевую задачу:

$$\begin{cases} b^5\alpha_{xx} - 10b^3\alpha - 5cb^3 = 0, \\ \alpha(0) = \alpha(a) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$\alpha(x) = C_1 \mathrm{sh}\left(\sqrt{10}\frac{x}{b}\right) + C_2 \mathrm{ch}\left(\sqrt{10}\frac{x}{b}\right) - \frac{1}{2}c.$$

Произвольные постоянные определим в силу краевых условий и получим решение задачи:

$$u_k(x,y) = \frac{1}{2}c\left(\frac{1 - \mathrm{ch}\left(\sqrt{10}\frac{a}{b}\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{10}\frac{a}{b}\right)}\mathrm{sh}\left(\sqrt{10}\frac{x}{b}\right) + c\mathrm{h}\left(\sqrt{10}\frac{x}{b}\right) - 1\right)(y^2 - by).$$

3. Сравнительный анализ

Каждый из использованных выше методов решения имеет свои достоинства и недостатки, что неизбежно. Поэтому излагаемый ниже сравнительный анализ имеет условный характер.

При реализации каждого метода, исходя из условий на границе Г, выбирались соответствующие функции, и уравнение $-\Delta u = c$ не могло быть тождественно удовлетворено.

Обсуждая выбранные приближенные методы, введем упомянутую (в методе наименьших квадратов) норму невязки $||\gamma||^2$.

Вычисляем $||\gamma||^2$по результатам вышеприведённых примеров. Рассматривая решения методами Ритца и наименьших квадратов, отметим, что выражение $||\gamma||^2$ через коэффициент α уже найдено выше ─ соотношение (9).

Подставляя в (9) соответствующие значения коэффициента α, получим:

1) Метод Ритца:

$$\delta_r = ||\gamma||^2 = \frac{5}{6}\frac{(a^2+b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}abc^2 - \frac{2}{3}abc^2 = \qquad (11)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\frac{(a^2+b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - 1\right)abc^2$$

2) Метод наименьших квадратов:

$$\delta_{ls} = \|\gamma\|^2 = \frac{2}{15}\left((a^2+b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2\right)\left(\frac{5}{2}\right)^2 \frac{(a^2+b^2)^2}{\left((a^2+b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2\right)^2}abc^2 -$$

$$-\frac{2}{3}abc(a^2+b^2)\frac{5}{2}\frac{c(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2} + abc^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{5}{6}\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2 - \frac{1}{3}a^2b^2}\right)abc^2 \qquad (12)$$

В выражениях (11) и (12), зависящих от двух размерных параметров (длины сторон прямоугольного контура), перейдём к безразмерному параметру $k = a/b$. Тогда в каждом из выражений множители при безразмерной величине (abc^2) рассматриваем как функции параметра k:

$$(11) \Rightarrow \delta_r = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}\frac{(1+k^2)^2 - \frac{1}{3}k^2}{(1+k^2)^2} - 1\right)abc^2$$

$$(12) \Rightarrow \delta_{ls} = \left(1 - \frac{5}{6}\frac{(1+k^2)^2}{(1+k^2)^2 - \frac{1}{3}k^2}\right)abc^2. \qquad (13)$$

В таком представлении соответствующие множители легко анализируются.

Обозначим:

$$\frac{(1+k^2)^2 - \frac{1}{3}k^2}{(1+k^2)^2} \equiv \beta(k):\ k > 0,\ \ 0 < \beta(k) \le 1,$$
$$\beta(0) = 1, \qquad \lim_{k\to\infty}\beta(k) = 1.$$

Следовательно, $\beta(k)$ принимает минимальное значение при $k > 0$:

$$\beta'(k) = \frac{\left(\frac{4}{3}k^2 - \frac{2}{3}(1+k^2)\right)k}{(1+k^2)^3} = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ \ k_{2,3} = \pm 1.$$

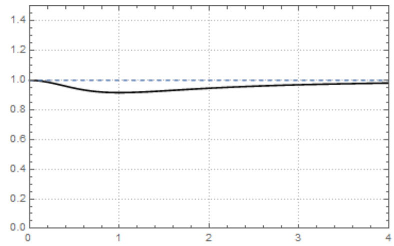
Значение $k_1 = 0$ соответствует наибольшему значению функции $\beta(k)$: $\max\beta(k) = 1$; значение $k_2 = 1 -$ соответствует наименьшему значению: $\min\beta(k) = \frac{11}{12}$

Очевидны свойства функции

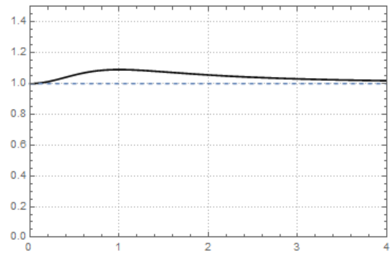
$$\tilde{\beta}(k) = \frac{(1+k^2)^2}{(1+k^2)^2 - \frac{1}{3}k^2} = \frac{1}{\beta(k)}:$$

$$\tilde{\beta}(k) \geq 1, \ \ \min \tilde{\beta}(k) = \tilde{\beta}(0) = 1, \max \tilde{\beta}(k) = \tilde{\beta}(1) = \frac{12}{11}.$$

Примерные графики этих функций представлены на рис. 1.



$\beta(k)$



$\tilde{\beta}(k)$

Рис. 1. Зависимость функций $\beta(k)$ и $\tilde{\beta}(k)$ от параметра k.
Fig. 1. Dependence of functions $\beta(k)$ and $\tilde{\beta}(k)$ from parameter k.

Получим оценки «качества» обсуждаемых решений:

1) Метод Ритца.

В силу соотношения (13): $\delta_r = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}\beta(k) - 1\right) abc^2 \Rightarrow \max \delta_r$ соответствует $\max \beta(k) \ = 1$; $\min \delta_r$ соответствует $\min \beta(k) = \frac{11}{12}$.

Следовательно:

$$\frac{1}{6}abc^2 > \delta_r > \frac{7}{72}abc^2 \approx 0.0972abc^2. \tag{14}$$

3) По методу наименьших квадратов, аналогично рассуждая, получим:

$$\delta_{ls} = \left(1 - \frac{5}{6}\tilde{\beta}(k)\right) abc^2 \Rightarrow \max \delta_{ls}$$

соответствует $\min \tilde{\beta}(k) = 1$; $\min \delta_{ls}$ соответствует $\max \tilde{\beta}(k) = \frac{12}{11}$. Поэтому имеем:

$$\frac{1}{6}abc^2 > \delta_{ls} > \frac{1}{11}abc^2 \approx 0.0909abc^2. \tag{15}$$

Как видно из неравенств (14) и (15), верхние оценки для норм невязок по обоим методам совпадают, нижние – разнятся в третьем знаке; получим относительную разность нижних оценок:

$$(\delta_r - \delta_{ls})^H / \delta^H{}_{ls} \approx 0.07.$$

Для сравнения «качества» решений по методам Ритца и наименьших квадратов приводим значения множителей при безразмерной величине abc^2, вычисленных для различных значений параметра k (табл. 1).

К сожалению, результат, полученный методом Канторовича, ввиду сложности выражения для нормы невязки, не дает возможности аналитических оценок. Поэтому u_k в дальнейшем будем исследовать поточечно.

Таблица 1

$\delta/(abc^2)$	k				
	1/3	1/2	1	2	3
Метод Ритца	0.1417	0.1222	0.0972	0.1222	0.1417
Метод наименьших квадратов	0.1409	0.1197	0.0909	0.1197	0.1409

4. Поточечное сравнение полученных результатов с решением методом разделения переменных

Для этого построим сечения поверхностей прогиба по осям Ox и Oy. На рис. 2, 3 приведены сечения по осям Ox $(\mathrm{y}=\mathrm{b}/2)$ и Oy $(x=a/2)$ соответственно поверхностей $z=u(x,y)$ прогиба по точному решению, формулам наименьших квадратов Ритца и Канторовича $\Big($-графики были получены при $k=a/b=2$, количестве слагаемых в формуле (5) $m=5$, натяжение мембраны $T=0.5\ \frac{\text{Н}}{\text{М}}$, давление $P=1.6\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\Big)$.

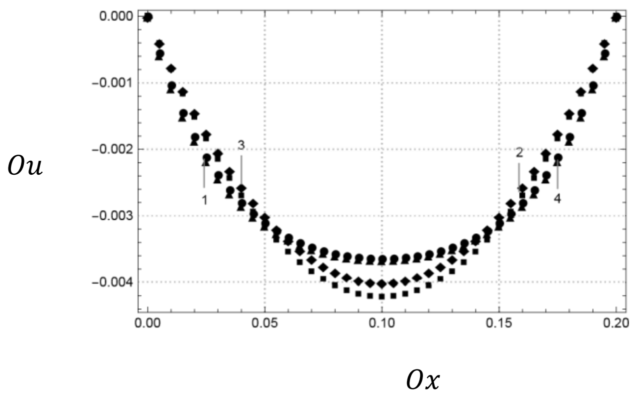


Рис. 2: Сечения поверхностей прогиба по оси x, при $y = b/2$ (1) $u(x,b/2)$, (2)$u_{ls}(x,b/2)$, (3)$u_r(x,b/2)$, (4) $u_k(x,b/2)$ (Решения по Канторовичу и точному практически совпали)
Fig. 2: Sections of surfaces of a deflection on an axis x, at $y = b/2$ (1) $u(x,b/2)$, (2)$u_{ls}(x,b/2)$, (3)$u_r(x,b/2)$, (4) $u_k(x,b/2)$ (Solutions on Kantorovich and exact have practically coincided)

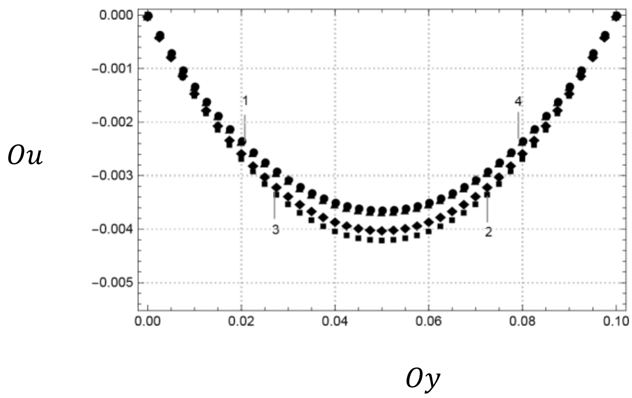


Рис. 3: Сечения поверхностей прогиба по оси y, при $\mathrm{x} = \mathrm{a}/2$ (1) $\mathrm{u}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$, (2)$\mathrm{u}_{\mathrm{ls}}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$, (3)$\mathrm{u}_{\mathrm{r}}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$, (4) $\mathrm{u}_{\mathrm{k}}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$ (Решения по Канторовичу и точному практически совпали)
Fig. 3: Sections of surfaces of a deflection on an axis y, at $\mathrm{x} = \mathrm{a}/2$ (1) $\mathrm{u}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$, (2)$\mathrm{u}_{\mathrm{ls}}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$, (3)$\mathrm{u}_{\mathrm{r}}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$, (4) $\mathrm{u}_{\mathrm{k}}(\mathrm{a}/2,\mathrm{y})$ (Solutions on Kantorovich and exact have practically coincided)

Заключение

Очевидно постановка задачи в силу какого-либо вариационного принципа, отвечающего физическому смыслу изучаемого явления, имеет наиболее естественный характер. По правилам вариационного исчисления, порядок дифференциального уравнения соответствующей краевой задачи вдвое выше наибольшего порядка дифференцирования в интегранте функционала [5], что создаёт известные трудности при решении соответствующего уравнения Эйлера методом конечных разностей.

В литературе доказана эквивалентность соответствующих задач в случае, если оператор задачи положительно определён (как в рассмотренном примере). Поэтому, на наш взгляд, предпочтение следует отдавать прямым методам решения. При этом полезно проводить предварительное сравнение выбираемых методов решения, ограничиваясь первым приближением, вполне достаточным для инженерных целей. Например, известно, что при вычислении эйлеровой силы (в задаче о продольном изгибе) методом Ритца уже второе приближение менее, чем на процент, отличается от точного значения критической силы [6].

Наше исследование говорит о том, что при решении обсуждаемой задачи предпочтение следует отдать методу Л.В.Канторовича.

Список литературы
References

1. Бернштейн С.Н. 1941. Об уравнениях вариационного исчисления. Успехи математических наук. Вып. 8: 32 – 74.

Bernstein S.N. 1941. About equations of the variational calculation. Uspekhi matematicheskikh nauk. Vyp. 8: 32 – 74.

2. Михлин С.Г. 1957. Вариационные методы в математической физике. М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры: 71 - 120.

Mikhlin S.G. 1957. Variational methods in mathematical physics. M.: Gos. Izd-vo tekhn.- theoret. lit. : 79 - 120.

3. Соболев С.Л. 1947. Уравнения математической физики. М. – Л. Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, 411 с.

Sobolev S.L. 1947. Equations of mathematical physics. M.-L. Gos. Izd-vo tekhn.-theoret. lit. 411c.

4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. 1980. Сборник задач по математической физике. М. Наука: 395 -397.

Budak B.M., Samarskiy A.A., Tikhonov A.N. 1980. Collection of problems in mathematical physics. M. Nauka: 395 - 397.

5. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. 2006. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана: 45 – 49.

Vanko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. 2006. Variational calculation and optimum control. M. Izd-vo Bauman university: 45 – 49.

6. Ванько В.И. 2015. Очерки об устойчивости элементов конструкций. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана: 47 – 51.

Vanko V.I. 2015. Essays about the construction's members stability. M. Izd-vo Bauman univercity: 47 – 51.