ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 004.031.4; 025.4.036
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-144-151

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

NONLINEAR WAVES IN A UNLIMITED ENVIRONMENT

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова
Российская Федерация, 308012, Белгород, ул. Костюкова, 46

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov
46 Kostukova St., 308012, Belgorod, Russian Federation

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация
Рассмотрены вопросы существования периодических стационарных возбуждений в полуограниченных ангармонических кристаллах с различными знаками нелинейности. Предложена модель, математическая формулировка которой представляет собой одномерную краевую задачу для нелинейного уравнения Шредингера на полуоси. В рассматриваемой системе в зависимости от значения частоты получены несколько типов стационарных состояний, описывающих периодические распределения поля возбуждения. Показано, что в средах с отрицательной нелинейностью существует один вид периодически распределенных состояний, а в средах с положительной нелинейностью – два вида. Такие состояния описываются периодическими решениями НУШ, содержащими эллиптические функции. Получены выражения, определяющие значения частот всех рассматриваемых состояний, в явном аналитическом виде и определены условия их существования.

Abstract
The existence of periodic stationary excitations in semibounded anharmonic crystals with different signs of nonlinearity is considered. A new simple model is proposed. The mathematical formulation of such a model is a one-dimensional boundary-value problem for the nonlinear Schrödinger equation on the half-axis. The several types of stationary states in depending on the value of the frequency are obtained. These stationary states are describe the periodic distributions of the field of excitation in the system under consideration. It is shown that in media with negative nonlinearity there is one kind of periodically distributed states. In media with positive nonlinearity there are two kinds of periodically distributed states. Such states are described by periodic NLSE solutions containing elliptic functions. The expressions determined the frequencies of all the states in an explicit analytical form are obtained. The conditions for their existence are determined.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, стационарные состояния, поверхность, нелинейные среды, ангармонизм, нелинейные волны.
Keywords: nonlinear Schrödinger equation, stationary states, surface, nonlinear media, anharmonicity, nonlinear waves.

Введение

Важную роль в теории нелинейных явлений в кристаллах играет изучение особенностей распространения нелинейных возбуждений при наличии дефектов. Математическое описание таких процессов проводится с использованием нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными [1, 2]. Уравнение Буссинеска и различные его обобщения применяются при изучении нелинейных поверхностных волн звуковой природы в упругих средах [3]. В оптических средах с показателем преломления, зависящим квадратично от модуля амплитуды напряженности электрического поля, нелинейные волны электромагнитной природы описываются нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [4, 5, 6].

Локализованные вблизи дефектов малоамплитудные нелинейные колебания в ангармонических кристаллах при наличии пространственной дисперсии нелинейной среды используется НУШ с производными старших порядков [7]. Различные особенности динамики одномерных дискретных систем со взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике рассматривались в работах [8-13]. Локализация на границе раздела линейной и нелинейной сред с учетом конечной интенсивностью взаимодействия возбуждения с плоским дефектом описана в [14]. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой были описаны в [15, 16]. В [17, 18] анализировались особенности взаимодействия вблизи дефекта связанных солитонных состояний, относящихся различным состояниям системы в двухуровневой системе.

Особый вид локализованных состояний представляют собой поверхностные волны, давно изучаемые теоретически [3, 19-21] и наблюдаемые экспериментально [22].

В исследованиях подобного типа в основном изучались особенности распространения волн вдоль плоских границ раздела сред, локализованных вблизи поверхностных слоев и быстро затухающих в глубину кристалла. Однако в различных технических приложениях могут иметь значения волны, существующие в полуограниченных средах, поле в которых распределено по всему объему кристалла.

В данной работе предлагается описать различные виды стационарных колебательных состояний, которые возникают за счет наличия поверхности нелинейной среды. Для этого предлагается простая модель, использующая НУШ. В рамках данной модели предполагается, что возбуждение свободно распространяется вдоль поверхности кристалла, а неличные свойства среды существенны в направлении, перпендикулярном поверхности. Тогда задача сводится к решению одномерного НУШ на полуоси. В результате появляется возможность аналитически описать распределение поля возбуждений вблизи поверхности периодическими решениями НУШ, форма которых зависит от знака параметра нелинейности, а амплитуда и частота определяются характеристиками среды и поверхности как плоского дефекта.

1. Уравнения модели

Будем рассматривать нелинейную среду, занимающую полупространство. Среда, занимающая полупространство в области $x > 0$, ограничивается плоской поверхностью, расположенной в плоскости yOz и проходящей через начало координат перпендикулярно оси Ox.

Предполагается, что возмущение параметров среды, создаваемое поверхностью как плоским дефектом, может считаться локальным, поскольку оно сосредоточено на расстояниях, которые намного меньше характерных размеров рассматриваемых возбуждений.

Рассмотрим процессы распространения возбуждений вблизи поверхности на основе НУШ (положили $\hbar$=1):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\Delta\psi-\gamma|\psi|^2\psi\,, \qquad (1)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трехмерный оператор Лапласа, m – эффективная масса возбуждений, γ – параметр нелинейности среды (может иметь различные знаки).

Считая, что волны могут свободно распространяться вдоль поверхности, будем искать стационарные состояния НУШ (1) в виде

$$\psi(x,y,z,t)=u(x)\exp(k_y y+k_z z-iEt)\,.$$

Для удобства можно ввести обозначения: $\omega^2=E$ – квадрат частоты колебаний, $s^2=1/2m$ – скорость распространения возбуждения, $\omega_0^2=(k_y^2+k_z^2)s^2$ – значение уровня дна энергетической зоны.

С учетом этого НУШ (1) перейдет в одномерное уравнение на полуоси $x > 0$:

$$s^2u''(x)+(\omega^2-\omega_0^2)u(x)+\gamma|u(x)|^2u(x)=0\,. \qquad (2)$$

Для нахождения стационарных поверхностных состояний следует задать краевые условия на плоскости дефекта, то есть в начале координат:

$$u(+0)=u_0;\quad u'(+0)=Q\,, \qquad (3)$$

где параметры u_0 и Q описывают возмущение характеристик кристалла вблизи поверхности. К примеру, можно сказать, что данные параметры учитывают изменение массы атомов поверхностного слоя и силового взаимодействия между атомами поверхностного и приповерхностного слоев. В силу локальности такого возмущения характеристик среды вблизи поверхности параметры u_0 и Q можно считать константами.

Таким образом, математическая формулировка нахождения стационарных колебательных состояний в рамках предложенной модели сводится к решению краевой задачи на полуоси для НУШ (2) с граничными условиями (3).

2. Нелинейные волны в среде с отрицательным ангармонизмом

Сначала рассмотрим случай отрицательного ангармонизма, когда $\gamma < 0$. Для удобства введем обозначение параметра нелинейности $g = -\gamma > 0$.

В области частот $\omega > \omega_0$ уравнение (2) имеет периодическое решение:

$$u(x)=A_s\,\mathrm{sn}\,q_s(x-x_0,k)\,, \qquad (4)$$

где k – модуль эллиптической функции sn ($0 < k < 1$). Параметры решения (4) определяются выражениями:

$$q_s^2=(\omega^2-\omega_0^2)/s^2(1+k^2)\,,$$
$$A_s^2=2k^2s^2q_s^2/g\,. \qquad (5)$$

Подстановка (4) в граничные условия (3) приводит к соотношениям:

$$ksq\,\mathrm{sn}(q_s x_0, k) = -u_0 (g/2)^{1/2}, \tag{6}$$

$$ksq_s^2 \mathrm{cn}(q_s x_0, k)\mathrm{dn}(q_s x_0, k) = Q(g/2)^{1/2}. \tag{7}$$

Выражение (7) представляет собой дисперсионное соотношение, определяющее частоту нелинейных колебаний, описываемых функцией (4), а выражение (6) определяет параметр x_0, характеризующий положения максимумов. Из выражений (6) и (7) можно получить в явном виде частоту нелинейной волны (4):

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon_s \{1 \pm (1 + \varepsilon_{0s} / \varepsilon_s)^{1/2}\},$$

где

$$\varepsilon_s = gu_0^2 (1 + k^2)^2 / 4k^2,$$

$$\varepsilon_{0s} = (2s^2 Q^2 - gu_0^4) / u_0^2. \tag{8}$$

В предельном случае малых значений $qx_0 << 1$ из (6) с учетом (8) можно получить параметр x_0 в явном виде:

$$x_0 = 2/(1 + k^2)\{1 \pm (1 + \varepsilon_{0s} / \varepsilon_s)^{1/2}\}. \tag{9}$$

В зависимости от соотношений между параметрами среды и плоского дефекта следует выбирать один из знаков в (8) и (9). Здесь следует отметить, что $\varepsilon_s > 0$, поэтому волна (4) с частотой (8) существует при выполнении условия: $Q > (g/2)^{1/2} u_0^2 / s$, причем следует выбирать знак «+».

Для ненагруженной, то есть свободной от примесей поверхности, параметр $u_0 = 0$, тогда из (6) следует, что $x_0 = 0$. В результате параметры решения (4) примут вид:

$$q_s^2 = (g/2)^{1/2} Q / sk,$$

$$A^2 = ksQ(2/g)^{1/2},$$

а частота распространяющейся вблизи свободной поверхности волны будет определяться выражением:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + Qs(2/g)^{1/2}(1 + k^2)/k.$$

3. Нелинейные волны в среде с положительным ангармонизмом

Рассмотрим теперь случай положительного ангармонизма, когда $\gamma > 0$. Для такого знака параметра нелинейности НУШ (2) имеет два типа периодических решений в диапазоне частот $\omega < \omega_0$. Периодическое решение первого типа выражается через эллиптическую функцию dn и имеет вид:

$$u(x) = A_d \mathrm{dn} q_d (x - x_0, k). \tag{10}$$

Параметры решения (10) определяются формулами:

$$q_d^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) / s^2 (2 - k^2),$$

$$A_d^2 = 2s^2 q_d^2 / \gamma \,. \tag{11}$$

Подстановка (10) в граничные условия (3) приводит к соотношениям:

$$ksq_d \operatorname{dn}(q_d x_0, k) = u_0 (\gamma / 2)^{1/2} \,, \tag{12}$$

$$sk^2 q_d^2 \operatorname{sn}(q_d x_0, k) \operatorname{cn}(q_d x_0, k) = Q(\gamma / 2)^{1/2} \,. \tag{13}$$

Выражение (13) представляет собой дисперсионное соотношение, определяющее частоту колебательных состояний с функцией вида (10), а выражение (12) определяет параметр x_0.

Из выражений (12) и (13) можно получить в явном виде частоту нелинейной волны (10):

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon_d \{1 \pm (1 - \varepsilon_{0d} / \varepsilon_d)^{1/2}\} \,, \tag{14}$$

где

$$\varepsilon_d = \gamma u_0^2 (2 - k^2)^2 / 4k_1^2 \,,$$

$$\varepsilon_{0d} = (2s^2 Q^2 + \gamma u_0^4) / u_0^2 \,,$$

k_1 – дополнительный модуль эллиптических функций: $k_1^2 = 1 - k^2$. Здесь следует отметить, что $\varepsilon_s > 0$, и $\varepsilon_{0s} > 0$, и тогда для существования нелинейной волны вида (10) с частотой (14) должно выполняться условие: $0 < Q < (g / 2)^{1/2} u_0^2 k^2 / 2k_1 s$.

Периодическое решение НУШ (2) второго типа выражается через эллиптическую функцию cn и имеет вид:

$$u(x) = A_c \operatorname{cn} q_c (x - x_0, k) \,. \tag{15}$$

Параметры решения (15) определяются формулами:

$$q_c^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) / s^2 (2k^2 - 1) \,,$$

$$A_c^2 = 2k^2 s^2 q_c^2 / \gamma \,. \tag{16}$$

Подстановка (15) в граничные условия (3) приводит к соотношениям:

$$ksq_c \operatorname{cn}(q_c x_0, k) = u_0 (\gamma / 2)^{1/2} \,, \tag{17}$$

$$sk^2 q_c^2 \operatorname{sn}(q_c x_0, k) \operatorname{dn}(q_c x_0, k) = Q(\gamma / 2)^{1/2} \,. \tag{18}$$

Выражение (18) представляет собой дисперсионное соотношение, определяющее частоту колебательных состояний с функцией вида (15), а выражение (17) определяет параметр x_0. Из выражений (17) и (18) можно получить в явном виде частоту нелинейной волны (15):

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon_c \{1 \pm (1 + \varepsilon_{0c} / \varepsilon_c)^{1/2}\} \,, \tag{19}$$

где

$$\varepsilon_c = \gamma u_0^2 (2k^2 - 1) / 4k^2 k_1^2 \,,$$

$$\varepsilon_{0c} = (2k^2 - 1)(2s^2 Q^2 - \gamma u_0^4) / u_0^2 \,.$$

Следует отметить, что $\varepsilon_s > 0$, а ε_{0s} может менять знак, но всегда справедливо неравенство $\varepsilon_s > \varepsilon_{0s}$, что обеспечивает существование нелинейной волны вида (15) с частотой (19). Если $\varepsilon_{0s} > 0$, когда выполняется условие: $Q > (\gamma/2)^{1/2} u_0^2 / s$, в (19) выбирается знак «+».

Заключение

На основе модели полуограниченной нелинейной среды, возбуждения в которой описываются периодическими решениями НУШ, рассмотрены вопросы существования различных видов нелинейных волн. Рассмотрены случаи как положительной, так и отрицательной нелинейности сред. Математическая формулировка модели представляет собой краевую задачу для НУШ на полуоси.

К достоинству предложенной модели следует отнести то, что удалось найти в явном аналитическом виде точные решения сформулированной краевой задачи, которые описывают нелинейные волны нескольких типов. Обозначены частоты полученных типов волн, определяемые как свойствами среды, к которым относятся скорость распространения возбуждения s, параметр нелинейности γ, граничная частота ω_0, так и характеристиками поверхности как плоского дефекта, которые описывают возмущения свойств среды вблизи поверхности u_0 и Q.

В зависимости от частоты, в среде с положительным ангармонизмом могут существовать два типа нелинейных волн, а в среде с отрицательным ангармонизмом – одного типа. В неограниченных средах наблюдается аналогичная ситуация [1]. Основное отличие среды ограниченной поверхности от среды неограниченной поверхности состоит в том, что все характеристики нелинейных волн, такие как амплитуда, частота, положения максимумов, определяются только одним свободным параметров – эллиптическим модулем.

При выполнении различных соотношений между значениями параметров системы может происходить изменение типа нелинейной волны в одном и том же частотном диапазоне. Управляя значениями одного или нескольких параметров, можно добиться перехода от одного типа волны к другому. Наиболее целесообразно с практической точки зрения выбрать в качестве управляющего параметра величину u_0, характеризующую нагрузку поверхностного слоя. Тогда при фиксированных значениях параметров среды, изменяя значение u_0, и добившись выполнения требуемого условия для Q, можно управлять переходом между типами волновых состояний вблизи поверхности.

Список литературы
References

1. Давыдов А.С. 1984, Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 288 с.

Davydov A.S. 1984. Solitony v molekuljarnyh sistemah. Kiev: Naukova dumka, 288 p. (in Russian)

2. Косевич А.М., Ковалев А.С. 1989. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 304

Kosevich A.M., Kovalev A.S. 1989. Vvedenie v nelinejnuju fizicheskuju mehaniku. Kiev: Naukova dumka, 304. (in Russian)

3. Ковалев А.С., Сыркин Е.С., Можен Ж.А. 2002. Многомерные и поверхностные солитоны в нелинейной упругой среде. ФНТ, 28, 6: 635-647.

Kovalev A.S., Syrkin E.S., Mozhen Zh.A. 2002. Mnogomernye i poverhnostnye solitony v nelinejnoj uprugoj srede. FNT, 28, 6: 635–647. (in Russian)

4. Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Кузьменко Ю.В. 1985. Возбуждение нелинейных поверхностных волн гауссовыми световыми пучками. ЖЭТФ, 88, 1: 107-115.

Ahmediev N.N., Korneev V.I., Kuz'menko Ju.V. 1985. Vozbuzhdenie nelinejnyh poverhnostnyh voln gaussovymi svetovymi puchkami. ZhJeTF, 88, 1: 107-115. (in Russian)

5. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. 1989. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 20, 1: 198-253.

Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. 1989. Nelinejnye opticheskie volny v sloistyh strukturah. Fizika jelementarnyh chastic i atomnogo jadra, 20, 1: 198-253. (in Russian)

6. Abdullaev F.Kh., Baizakov B.B., Umarov B.A. 1998. Resonance phenomena in interaction of a spatial soliton with the modulated interface of two nonlinear media. Optics Communications, 156: 341–346

7. Савотченко С.Е. 2004. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией. Известия высших учебных заведений. Физика, 47, 5: 79-84.

Savotchenko S.E. 2004. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 47, 5: 79-84. (in Russian)

8. Косевич А.М., Савотченко С.Е. 1999. Особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике. ФНТ, 25, 7: 737-747.

Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 1999. Osobennosti dinamiki odnomernyh diskretnyh sistem s vzaimodejstviem ne tol'ko blizhajshih sosedej i rol' vysshej dispersii v solitonnoj dinamike. FNT, 25, 7: 737-747. (in Russian)

9. Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 2000.Forced vibrations and resonance wave scattering on impurity in 1D discrete lattice with nearest- and next-nearest neighbors interaction. Physica B, 284-288: 1551-1552. (in Russian)

10. Савотченко С.Е. 2000. Рассеяние волн дефектами в средах с пространственной дисперсией и безызлучательные динамические солитоны. Известия высших учебных заведений. Физика, 43, 10: 876-881.

Savotchenko S.E. 2000. Rassejanie voln defektami v sredah s prostranstvennoj dispersiej i bezyzluchatel'nye dinamicheskie solitony. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 43, 10: 876-881. (in Russian)

11. Krasilnikov V.V., Savotchenko S.E. 2004. Peculiarities of soliton motion in molecular systems with high dispersion. Phys. Stat. Sol. (c), 1, 11: 2757-2760.

12. Савотченко С.Е. 2005. Нелинейные коллективные возбуждения в квазиодномерных структурах при наличии пространственной дисперсии. Известия вузов. Физика, 48, 9: 24-27.

Savotchenko S.E. 2005. Nelinejnye kollektivnye vozbuzhdenija v kvaziodnomernyh strukturah pri nalichii prostranstvennoj dispersii. Izvestija vuzov. Fizika, 48, 9: 24-27. (in Russian)

13. Савотченко С.Е. 2006. Особенности нелинейной динамики квазичастиц в молекулярных структурах с водородными связями при наличии взаимодействия не только ближайших соседей. Известия вузов. Физика, 49, 2: 52-56.

Savotchenko S.E. 2006. Osobennosti nelinejnoj dinamiki kvazichastic v molekuljarnyh strukturah s vodorodnymi svjazjami pri nalichii vzaimodejstvija ne tol'ko blizhajshih sosedej. Izvestija vuzov. Fizika, 49, 2: 52-56. (in Russian)

14. Савотченко С.Е. 2017. Локализованные состояния на границе линейной и нелинейной сред. Конденсированные среды и межфазные границы, 19: 567-572.

Savotchenko S.E. 2017. Lokalizovannye sostojanija na granice linejnoj i nelinejnoj sred. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 19: 567-572. (in Russian)

15. Савотченко С.Е. 2016. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 4: 51-59.

Savotchenko S.E. 2016. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh vozbuzhdenij vblizi defekta s vnutrennej strukturoj. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika, 4: 51-59. (in Russian)

16. Савотченко С.Е. 2018. Локализация возбуждений вблизи тонкой прослойки с внутренней структурой между линейным и нелинейным кристаллами. ЖЭТФ, 153: 339-348.

Savotchenko S.E. 2018. Lokalizacija vozbuzhdenij vblizi tonkoj proslojki s vnutrennej strukturoj mezhdu linejnym i nelinejnym kristallami. ZhJeTF, 153: 339-348. (in Russian)

17. Савотченко С.Е. 2017. Взаимодействие локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред. Конденсированные среды и межфазные границы, 19: 291-295.

Savotchenko, S.E. 2017. Vzaimodejstvie lokalizovannyh sostojanij vblizi granicy razdela nelinejnyh sred. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 2: 291-295. (in Russian)

18. Савотченко С.Е. 2017. Связанные солитонные состояния и локализация кноидальных волн на границе раздела нелинейной и линейной сред. ЖТФ, 62: 1776-1781.

Savotchenko S.E. 2017. Svjazannye solitonnye sostojanija i lokalizacija knoidal'nyh voln na granice razdela nelinejnoj i linejnoj sred. ZhTF, 62: 1776-1781.

19. Павло В.И., Солодов И.Ю. 1977. Нелинейные свойства поверхностных волн в твердых телах. ФТТ, 19, 10: 2948-2954.

Pavlo V.I., Solodov I.Ju. 1977. Nelinejnye svojstva poverhnostnyh voln v tverdyh telah. FTT, 19, 10: 2948-2954. (in Russian)

20. Горенцвейг В.И., Кившарь Ю.С., Косевич А.М., Сыркин Е.С. 1990. Самоиндуцированные нелинейные сдвиговые поверхностные акустические волны в кристаллах. ФНТ, 16, 11: 1472-1482.

Gorencvejg V.I., Kivshar' Ju.S., Kosevich A.M., Syrkin E.S. 1990. Samoinducirovannye nelinejnye sdvigovye poverhnostnye akuskticheskie volny v kristallah. FNT, 16, 11: 1472-1482. (in Russian)

21. Mayer A.P. 1995. Surface acoustic waves in nonlinear elastic media. Physics Reports, 256, 4-5: 237-366.

22. Наянов В.И. 1986. Поверхностные акустические кноидальные волны и солитоны в структуре LiNbO3-пленка SiO. Письма в ЖЭТФ, 44: 245-249.

Najanov V.I. 1986. Poverhnostnye akusticheskie knoidal'nye volny i solitony v strukture LiNbO3-plenka SiO. Pis'ma v ZhJeTF, 44: 245-249. (in Russian)