УДК 519.21 + 537.86
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-2-221-228

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОВЕКТОРНОГО СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ С ЛОКАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ СОХРАНЕНИЯ

CONSTRUCTION OF THE GENERAL EVOLUTION EQUATION OF PSEUDUVECTOR SOLENOIDAL FIELD WITH LOCAL CONSERVATION LAW

Ю.П. Вирченко, А.Э. Понамарева
Yu.P. Virchenko, A.E. Ponamariova

Белгородский государственный университет,
Россия, 308007, Белгород, ул. Студенческая, 14,

Belgorod National Research University
85 Pobeda street, Belgorod, 308015, Russia

E-mail:virch@bsu.edu.ru;

Аннотация
Предлагается эволюционное уравнение для соленоидального всевдовекторного поля M, обладающего свойством унимодальности. Уравнение обладает свойством сферической симметрии. Оно может служить обобщением известного эволюционного уравнения Ландау-Лифшица для сферически симметричного ферромагнетика.

Abstract
It is proposed the evolution equation that describes the solenoidal vector field M being unimodal. The equation is spherically invariant. It is the generalization of the famous Landau-Liphshitz equation of spherically symmetric ferromagnetic medium.

Ключевые слова: псевдовекторное поле, тензорная алгебра, бездивергентное уравнение, соленоидальное поле, уравнение Ландау-Лифшица.
Keywords: pseudovector field, tensor algebra, divergence-free equation, solenoid field, Landau-Lifshitz equation.

Введение

Является общепринятым, что эволюцию магнитной структуры в магнитоупорядоченной твердотельной среде описывает так называемое *уравнение Ландау-Лифшица* (см., например, [1], [2]). В случае ферромагнитным образом упорядоченной среды это уравнение записывается в виде

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{\delta W[\boldsymbol{M}]}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{x},t)}. \tag{1}$$

$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ – поле намагниченности ферромагнитной среды в пространственной точке, описываемой радиус-вектором x в момент времени t, точкой обозначено производная по времени t. Поле $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ принимает псевдовекторые значения, то есть оно не изменяется при отражениях пространства R^3, а при непрерывно изменяющихся поворотах этого пространства оно изменяет свои значения как векторное поле (см., например, [3], [4]). В правой части уравнения стоит *вариационная производная* $\delta W[\mathbf{M}]/\delta \mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ функционала $W[\mathbf{M}]$ по полю $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в пространственно-временной точке $(\mathbf{x}, t)$. Этот функционал представляет собой энергию магнитной структуры, описываемой полем $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, а сама производная – эффективное «среднее» магнитное поле в пространственной точке $\mathbf{x}$ среды. Эта энергия связана с внутренними напряжениями в магнитной структуре, которые возникают в том случае, если в среде реализуется неоднородное распределение намагниченности.

В простейшем случае сферически симметричного ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля функционал $W[\mathbf{M}]$ имеет следующий вид:

$$W[\boldsymbol{M}] = \gamma \int_{R^3} (\nabla_j M_k(\boldsymbol{x}, t))(\nabla_j M_k(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} \tag{2}$$

где γ – магнитная постоянная среды. Здесь ∇ – векторный оператор дифференцирования (градиент). Кроме того, здесь и далее, использованы принятые в тензорной алгебре индексные обозначения векторов и тензоров. При этом по повторяющимся индексам подразумевается суммирование по их значениям 1,2,3 (см. [3], [4]).

Для ферромагнетика с энергией $W[\mathbf{M}]$ вида (2) уравнение (1) принимает следующий вид:

$$\dot{M} = \gamma[\boldsymbol{M}, \Delta \boldsymbol{M}] \tag{3}$$

где Δ – дифференциальный оператор Лапласа в физическом трехмерном пространстве.

Уравнение (1) обладает тем замечательным свойством, что оно сохраняет во времени унимодальность поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ (постоянство $\mathbf{M}^2(\mathbf{x},t)$), в чем мы немедленно убеждаемся, скалярно умножив обе части уравнения (1) на $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$. Это свойство уравнения важно с физической точки зрения, так как в реальных (относительно медленных) эволюционных процессах, происходящих в магнитной структуре, практически не происходит изменения температуры и, как следствие, не происходит изменения $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$.

Эволюционные уравнения вида (1) являются основой ферродинамики и широко используются для описания процессов, происходящих в магнитных структурах, протекающих вследствие внешних воздействий на них, либо вследствие экспериментально созданных тех или иных начальных неоднородных распределений поля намагниченности. Тем не менее, известно, что это уравнение обладает двумя свойствами, которые не соответствуют физическим представлениям.

Во-первых, это уравнение не описывает диссипативных процессов внутри магнитной структуры, то есть «магнитного трения», которые, в конце концов, приводят к состоянию равновесия. На это обстоятельство неоднократно обращалось внимание и предпринимались попытки как-то «исправить» это уравнение, чтобы учесть диссипацию (см., например, [5]).

Во-вторых, это уравнение не сохраняет дивергенцию поля $\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$, что важно с точки зрения общих электродинамических представлений, так как суммарная магнитная индукция $\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathbf{H}(\mathbf{x},t)+4\pi\mathbf{M}(\mathbf{x},t)$ представляет собой, вследствие уравнений Максвелла, которым она подчиняется, бездивергентным полем, как в присутствии внешнего магнитного поля, так и в его отсутствии.

В настоящей работе предпринята попытка построения общего математического подхода, в рамках которого имеется возможность проведения анализа, какие собственно обобщения уравнения Ландау-Лифшица можно рассматривать как допустимые.

Формулировка метода исследования

В настоящей работе мы будем рассматривать случай сферически симметричного ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля, то есть когда принято использовать эволюционное уравнение в форме (2). Идея метода основана на следующем наблюдении. Заметим, что уравнение (2) записывается (используя индексные обозначения) в виде локального закона сохранения:

$$\dot{M}_j = \nabla_k S_{jk}(\boldsymbol{x}, t), \qquad j = 1,2,3, \tag{4}$$

где S_{jk} – плотность потока поля, который представляется псевдотензором второго ранга (Мы используем этот термин, так как он, в отличие от тензора второго ранга, изменяет знак при отражении пространства).

Этот псевдотензор, в данном случае, имеет вид:

$$S_{jk} = S_{jkln} \nabla_l \mathrm{M}_n\,, \tag{5}$$
$$\text{где} \quad S_{jkln} = -\gamma \delta_{kl}\, \varepsilon_{jnp}\, M_p$$

Будем считать, что такой локальный закон сохранения (3) имеет место в любом случае при конструировании динамики поля **M**(**x**, t), то есть будем строить уравнение ферродинамики в виде (4). В этом случае мы можем применить прием, на основе которого строятся уравнения гидродинамики в [6], где используются локальные законы сохранения для плотностей массы, импульса и энергии среды.

Второй принцип, которым мы будем руководствоваться, состоит в требовании того, чтобы дифференциальный оператор по пространственным переменным – генератор эволюции был не выше второго порядка. Физическим источником этого требования является то, что динамика сплошных сред основана на описании эволюции физических полей с малыми градиентами, а каждая частная производная по пространственным переменным, неявно, связана с малым параметром – отношением малого пространственного масштаба r_0 к пространственному масштабу L, характеризующему неоднородности в системе.

Здесь масштаб r_0 это тот размер, начиная с которого можно говорить, что в объеме с такими линейными размерами содержится уже достаточно много частиц, что для состояния этой системы уже применимо локальное термодинамическое описание, т.е. $\sim 10^{-6}$ см., а масшта L1 $\sim 10^{-4cm}$. При ограничении вторыми пространственными производными, плотность потока можно всегда записать в форме (5). В результате тензор 4-го ранга является уже функцией от значений поля **M**(**x**, t) в точке **x** (локальный функционал).

Наконец, будем считать, что тензор S_{jkln} зависит только от единственного вектора **M** – значения поля в данной пространственной точке, так как коэффициенты уравнения (4) и следовательно тензор S_{jkln} не должны явно зависеть от **x** ввиду требования однородности физического пространства.

Тогда, в отсутствие каких-либо других ограничений на выбор этого тензора, возникает математическая задача об описании линейного многообразия всех тензоров 4-го ранга, удовлетворяющих указанным ограничениям. Такая задача была решена в работе [8]. В результате, было обнаружено, что имеется 26 линейно независимых мономов $S_{jkln}^{(a)}$, $a = 1 \div 26$ в тензорной алгебре с образующими $M_i, \delta_{jk}, \varepsilon_{lmn}$.

Следовательно, тензор S_{jkln} в плотности потока (5), в общем случае, при указанных ограничениях, может иметь только следующий вид:

$$S_{jkln} = \sum_{a=1}^{26} f_a\,(\boldsymbol{M^2}) S_{jkln}^{(a)}\,, \tag{6}$$

где f_a – скалярные коэффициенты разложения. Они могут быть функциями только от $\mathbf{M}^2$. В частности, среди всех мономов $S_{jkln}^{(a)}$ содержится моном вида (5), использование которого приводит к уравнению Ландау-Лифшица при равенстве нулю коэффициентов у всех остальных 25 мономов.

Было показано, что все найденные 26 линейно независимых мономов приводят к линейно независимым выражениям для «термодинамических сил»:

$$F_j = \sum_{a=1}^{26} F_j^{(a)} \equiv \sum_{a=1}^{26} \nabla_k\, f_a(\boldsymbol{M^2}) S_{jkln}^{(a)}\, \nabla_l\, \mathrm{M}_n\,. \tag{7}$$

Наконец, заметим, что существует альтернативный подход к построению возможных эволюционных уравнений динамики сплошных сред (см, например, [8], [9]). Он основан на довольно широком обобщении классического гамильтонового подхода в классической механике и теории поля. Однако, в рамках такого подхода все равно остается открытым вопрос о теоретическом описании диссипативных механизмов в динамике ферромагнетика.

Уравнения, сохраняющие унимодальность поля

Потребуем, чтобы эволюционное уравнение

$$\dot{M}_j = \sum_{a=1}^{26} F_j^{(a)} \tag{8}$$

обладало свойством, сохраняющим инвариантное многообразие унимодальных полей $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, то есть если в начальном состоянии поле $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ обладает свойством

$$\boldsymbol{M^2}(x) = \boldsymbol{M^2} = const, \tag{9}$$

то это свойство сохраняется со временем. Для этого необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество:

$$M_j(x)\dot{M}_j(x)=0 \tag{10}$$

при условии, что имеет место (9), то есть

$$M_jF_j = M_j\nabla_j\Big(\sum_{a=1}^{26} f_a\, S_{ijkl}^{(a)}\Big)\nabla_k \mathrm{M}_l\ = 0 \tag{11}$$

где $f_a, a = 1 \div 26$ являются постоянными.

В общем случае при произвольно выбранных коэффициентах $f_a, a = 1 \div 26$ такое тождество не выполняется**.** С другой стороны, равенство (11) можно рассматривать как уравнение для таких наборов коэффициентов f_a, при которых тождество, действительно, имеет место. При этом нужно сначала удалить из набора 26 термодинамических сил те из них, для которых имеет место тождество $F_j^{(a)} M_j = 0$ как это имеет место для термодинамической силы, соответствующей моному (5), после этого подобрать пары из оставшихся термодинамических сил, для которых для какой-то линейной комбинации $F_j^{(a_1)} + F_j^{(a_2)}$ с какими-то коэффициентами f_{a_1} и f_{a_2} имеет место тождество:

$$(F_j^{(a_1)} + F_j^{(a_2)}) M_j = 0 \text{ и т.д.}$$

Таким образом, выделяются подбором коэффициентов линейно независимые тождества при наличии условия: $\mathbf{M}^2$ = const. Оставшиеся после такой процедуры просеивания термодинамические силы нужно удалить из уравнения (8), положив соответствующие им коэффициенты равными нулю.

В результате проделанного анализа было получено 6 линейно независимых термодинамических сил $F_i^{(a)}$, которые обладают свойством $F_j^{(a_2)} M_j = 0$. Список этих сил представляется следующим набором:

$$\begin{aligned}
F_j^1 &= \varepsilon_{ikl}\, \nabla_j M_k \nabla_j M_l \\
F_j^2 &= \varepsilon_{jkl}\, \nabla_k M_l \nabla_i M_j \\
F_j^3 &= \varepsilon_{jkl}\, \nabla_j M_k \nabla_l M_i \\
F_j^4 &= \varepsilon_{jkl}\, \nabla_j M_i \nabla_k M_l \\
F_j^5 &= \varepsilon_{ikl}\, (\nabla_j M_k \nabla_l M_j - \nabla_l M_k \nabla_j M_j \\
F_j^6 &= \varepsilon_{ikl}\, \nabla_j M_j M_k M_m \nabla_m M_l
\end{aligned} \qquad (12)$$

Термодинамические силы,
обеспечивающие соленоидальность поля

Для того чтобы поле **M** было соленоидальным, необходимо, чтобы тождество $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$ сохранялось во времени. Для этого надо в общем выражении термодинамической силы

$$F_j = \sum_{a=1}^{26} \alpha_a\, F_j^{(a)} \qquad (13)$$

подобрать постоянные α_a таким образом, чтобы выполнялось тождество

$$\nabla_j F_j = 0 \qquad (14)$$

для любого гладкого унимодального соленоидального поля **M** . То есть должно выполняться

$$\sum_{a=1}^{6} \alpha_a\, \nabla_j F_j^{(a)} = 0 \qquad (15)$$

или, что то же самое, должно иметь место тождество:

$$\nabla_i \nabla_j \left(\sum_{a=1}^{6} \alpha_a\, S_{ij}^{(a)}\right) = 0 \qquad (16)$$

при условии, что поле **M** обладает свойствами $M^2 = const,$ и $(\nabla_i M_{i)} = 0$.

Проанализируем по отдельности каждое из слагаемых с $F_j^{(a)}, a = 1 \div 6$. Рассмотрим сначала значение a = 6. Так как сила $F_j^{(6)}$ пропорциональна 4-й степени поля M_j, то оно является линейно независимым от остальных слагаемых и, так как оно не тождественно нулю,

$$\nabla_j F_j^{(6)} = \nabla_j \varepsilon_{jkl} \nabla_n \mathrm{M}_n \mathrm{M}_k \mathrm{M}_m \nabla_m \mathrm{M}_l \neq 0,$$

то имеется единственная возможность обратить в нуль постоянную α_2.

Преобразуем предварительно все слагаемые в (16) со значениями a = 1 ÷ 5. Так как

$$\varepsilon_{ikl} \nabla_i \nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_j \mathrm{M}_l = \nabla_i \varepsilon_{ikl} \left(\nabla_j \mathrm{M}_k\right)\left(\nabla_j \mathrm{M}_l\right) + \varepsilon_{ikl} \nabla_i (\mathrm{M}_k \Delta \mathrm{M}_l),$$

где первое слагаемое тождественно равно нулю, то для значения a = 1 имеем

$$\nabla_i F_i^{(1)} = \varepsilon_{ikl} \nabla_i \nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_j \mathrm{M}_l = \varepsilon_{ikl} \nabla_i \mathrm{M}_k \Delta \mathrm{M}_l. \tag{17}$$

Точно также при a = 2 получается

$$\varepsilon_{jkl} \nabla_i \nabla_k \mathrm{M}_l \nabla_i \mathrm{M}_j = \nabla_k \varepsilon_{jkl} \nabla_i \mathrm{M}_l \nabla_i \mathrm{M}_j = \nabla_k \varepsilon_{jkl} (\nabla_i \mathrm{M}_l)\left(\nabla_i \mathrm{M}_j\right) + \nabla_k \varepsilon_{jkl} \mathrm{M}_l \Delta \mathrm{M}_j,$$

где первое слагаемое обращается в нуль тождественно, и поэтому

$$\nabla_i F_i^{(2)} = \nabla_k \varepsilon_{jkl} \mathrm{M}_l \Delta \mathrm{M}_j. \tag{18}$$

Для значения a = 3 имеем

$$\nabla_i \varepsilon_{jkl} \nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_l \mathrm{M}_i = \varepsilon_{jkl} \nabla_j (\nabla_i \mathrm{M}_k)(\nabla_l \mathrm{M}_i) + \varepsilon_{jkl} \nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_l \nabla_i \mathrm{M}_i.$$

Второе слагаемое равно нулю по предположению о бездивергентности поля M_j, и поэтому

$$\nabla_i F_i^{(3)} = \varepsilon_{jkl} \nabla_j (\nabla_i \mathrm{M}_k)(\nabla_l \mathrm{M}_i) = \varepsilon_{jkl} (\nabla_i \nabla_j \mathrm{M}_k) \nabla_l \mathrm{M}_i \ . \tag{19}$$

Для значения a = 4 в формуле (16), справедливы следующие преобразования. Так как

$$\nabla_i \nabla_j \mathrm{M}_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k \mathrm{M}_l = \nabla_j (\nabla_i \mathrm{M}_i) \varepsilon_{jkl} \nabla_k \mathrm{M}_l + \nabla_j \varepsilon_{jkl} \mathrm{M}_i \nabla_i \nabla_k \mathrm{M}_l,$$

где первое слагаемое равно нулю, то получаем

$$\nabla_i F_i^{(4)} = \nabla_j \varepsilon_{jkl} \mathrm{M}_i \nabla_i \nabla_k \mathrm{M}_{l.}$$

Выполнив дифференцирование по ∇_j находим

$$\nabla_j \varepsilon_{jkl} \mathrm{M}_i \nabla_i \nabla_k \mathrm{M}_l = \varepsilon_{jkl} (\nabla_j \mathrm{M}_i)(\nabla_i \nabla_k \mathrm{M}_l) + \mathrm{M}_i \varepsilon_{jkl} \nabla_j \nabla_k \nabla_i \mathrm{M}_l,$$

где теперь второе слагаемое обращается в нуль. Таким образом,

$$\nabla_i F_i^{(4)} = \varepsilon_{jkl}(\nabla_j \mathrm{M}_i)(\nabla_i \nabla_k \mathrm{M}_l). \tag{20}$$

Наконец, для значения при a = 5 имеем

$$\varepsilon_{ikl}\nabla_i\nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_l \mathrm{M}_j - \varepsilon_{ikl}\nabla_i\nabla_l \mathrm{M}_k(\nabla_j \mathrm{M}_j) = \varepsilon_{ikl}\nabla_i(\nabla_j \mathrm{M}_k)(\nabla_l \mathrm{M}_j),$$

так как второе ∇_j слагаемое тождественно равно нулю. Выполним теперь дифференцирование в этом выражении, отбрасывая слагаемые, тождественно равные нулю:

$$\nabla_i \varepsilon_{ikl}\nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_l \mathrm{M}_j = \varepsilon_{ikl}\nabla_j(\nabla_i \mathrm{M}_k)\big(\nabla_l \mathrm{M}_j\big) + \varepsilon_{ikl}\nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_l \nabla_i \mathrm{M}_j =$$
$$= \varepsilon_{ikl}(\nabla_j\nabla_i \mathrm{M}_k)\big(\nabla_l \mathrm{M}_j\big) + \varepsilon_{ikl}(\nabla_i \mathrm{M}_{k)}(\nabla_l\nabla_j \mathrm{M}_j) = \varepsilon_{ikl}(\nabla_j\nabla_i \mathrm{M}_k)\big(\nabla_l \mathrm{M}_j\big).$$

Таким образом, получаем окончательное выражение:

$$\nabla_i F_i^{(5)} = \varepsilon_{ikl}(\nabla_j\nabla_i \mathrm{M}_k)\big(\nabla_l \mathrm{M}_j\big) \tag{21}$$

Выделим теперь линейно независимые комбинации в списке выражений $\nabla_i F_i^{(a)}$, где a = 1 ÷ 6, то есть проанализируем в каком случае уравнение (15) с $\alpha_6 = 0$ может иметь ненулевые наборы коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. Прежде всего заметим, что $\nabla_i F_i^{(4)} = \nabla_i F_i^{(5)}$. В самом деле, справедливы следующие преобразования в рамках тензорной алгебры:

$$\nabla_i F_i^{(4)} = \varepsilon_{jkl}\mathrm{M}_i\nabla_i\nabla_k \mathrm{M}_l = \varepsilon_{kjl}(\nabla_j \mathrm{M}_i)(\nabla_i\nabla_k \mathrm{M}_l) =$$
$$= \varepsilon_{kjl}(\nabla_k \mathrm{M}_i)\big(\nabla_i\nabla_j \mathrm{M}_l\big) = \varepsilon_{ljk}(\nabla_l \mathrm{M}_j)\big(\nabla_j\nabla_i \mathrm{M}_k\big) = \varepsilon_{ikl}\big(\nabla_l \mathrm{M}_j\big)(\nabla_j\nabla_i \mathrm{M}_k) = \nabla_i F_i^{(5)}$$

Таким образом, уравнение (15) запишем в виде

$$\textstyle\sum_{a=1}^{3} \alpha_a \nabla_j F_j^{(a)} + (\alpha_4 + \alpha_5)\nabla_j F_j^{(4)} = 0 \tag{22}$$

Точно также, ввиду следующих тензорных преобразований

$$\nabla_i F_i^{(4)} = \varepsilon_{jkl}(\nabla_l \mathrm{M}_i)(\nabla_i\nabla_k \mathrm{M}_l) = \varepsilon_{lkj}(\nabla_l \mathrm{M}_i)\big(\nabla_i\nabla_k \mathrm{M}_j\big) = \varepsilon_{ljk}(\nabla_i\nabla_j \mathrm{M}_k)\big(\nabla_l \mathrm{M}_j\big) = \nabla_i F_i^{(3)}.$$

Тогда уравнение (22) превращается в

$$\textstyle\sum_{a=1}^{2} \alpha_a \nabla_j F_j^{(a)} + (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)\nabla_j F_j^{(4)} = 0 \tag{23}$$

Наконец, рассмотрим слагаемые с a = 1, 2. Преобразования, аналогичные проведенным выше, дают

$$\nabla_i F_i^{(2)} = \varepsilon_{jkl}\nabla_k \mathrm{M}_l \Delta \mathrm{M}_j = \varepsilon_{lkj}\nabla_k \mathrm{M}_j \Delta \mathrm{M}_l = \varepsilon_{ljk}\nabla_j \mathrm{M}_k \Delta \mathrm{M}_l = \varepsilon_{lik}\nabla_i \mathrm{M}_k \Delta \mathrm{M}_l =$$
$$= \varepsilon_{ikl}\nabla_i(\mathrm{M}_k \Delta \mathrm{M}_l) = \nabla_i F_i^{(1)}$$

Таким образом, окончательно из (23) получаем

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\nabla_j F_j^{(1)} + (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)\nabla_j F_j^{(4)} = 0 . \tag{24}$$

Два слагаемых в уравнении (23) линейно независимы, так как подстановка в него пробной функции $M_j = m_j \exp\big(\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{x}\big) + m_j \exp\big(\boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{x}\big)$ обращает в нуль первое слагаемое, $\nabla_j F_j^{(1)}=0$, а второе слагаемое при этом отлично от нуля. Тогда для выполнимости условия на существование соленоидальных решений у эволюционного уравнения (8), необходимо выполнение следующих равенств: $\alpha_6 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$. Заметим теперь, что согласно (12), силы $F_j^{(3)}$ и $F_j^{(4)}$ совпадают, так как

$$F_j^{(3)} = \varepsilon_{jkl}\nabla_j \mathrm{M}_k \nabla_l \mathrm{M}_i = \varepsilon_{jkl}\big(\nabla_j \mathrm{M}_k\big)(\nabla_l \mathrm{M}_i) = \varepsilon_{lkj}(\nabla_l \mathrm{M}_k)\big(\nabla_j \mathrm{M}_i\big) = \varepsilon_{klj}(\nabla_k \mathrm{M}_l)\big(\nabla_j \mathrm{M}_i\big) =$$
$$= \varepsilon_{jkl}\big(\nabla_j \mathrm{M}_i\big)(\nabla_k \mathrm{M}_l) = \varepsilon_{jkl}\nabla_j \mathrm{M}_i \nabla_k \mathrm{M}_l = F_j^{(4)}$$

Кроме того, в условиях соленоидальности поля **M**, сила $F_j^{(5)}$ принимает вид:

$$F_i^{(5)} = \varepsilon_{ikl}\nabla_i \mathrm{M}_k \nabla_l \mathrm{M}_j \tag{25}$$

В этих условиях, полагая, $\alpha_1 = \gamma = -\alpha_2$ и $\alpha_3 = \gamma' = \alpha_5$, находим следующий окончательный вид эволюционного уравнения для псевдовекторного поля **M**, обладающего локальным законом сохранения поля, а также обладающего инвариантами движения $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = \mathrm{const}$ и $(\nabla,\mathbf{M})(\mathbf{x},t)=0$,

$$\dot{M}_i = \gamma(\varepsilon_{ikl}\nabla_j M_k \nabla_j M_l - \varepsilon_{jkl}\nabla_k M_l \nabla_i M_j) + \gamma'(\varepsilon_{jkl}\nabla_j M_k \nabla_l M_i - \varepsilon_{ikl}\nabla_j M_k \nabla_l M_j$$

Список литературы
References

1. Akhiezer.A.I., Baryakhtar. V.G., Peletminski S.V. 1967. Spine waves, M.: Nauka, 368 p.
2. Landau L. D., Lifshits E. M. 1982. Electrodynamics of Continuum Media. Theoretical physics, V.8, M.: Nauka, 620 p.
3. Rashevsky P. K. 1967. Riemannian geometry and tensor analysis. M.: Nauka, 664 p.
4. Mc-Connell A. J. 1957. Application of tensor analysis. New York: Dover Publications, Inc., 412 p.
5. Baryakhtar V.G.2010. Academician of the NANU Life in Science. National Science Center of Ukraine "KhPTI"– Kiyev : Naukova Dumka, 328 p.
6. Landau L.D., Lifshits E.M. 1986. Hydrodynamics, Moscow : Nauka.
7. Virchenko Yu.P., Chursin D.A. 2015. The flux density of the magnetic moment of a spherically symmetric magnetic. Bulletin of Belgorod State University. Mathematics & Physics, 11 (208); 39. – S. 191-196.
8. Isayev A.A., Kovalevsky M.Yu., Peletminsky S.V. 1993. Hamiltonian approach to the theory of antiferromagnetic systems. Teor. Mat. Phys, 95: 1. : 58-73.
9. Isayev A.A., Kovalevsky M.Yu., Peletminsky S.V. 1996. Hamiltonian approach in the theory of capacitors Red Nation with spontaneous symmetry / Elementary particles Physics and nucleus, 27. – 2: 431-492.