



УДК 517.925

DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-21-34

**О БИФУРКАЦИЯХ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА, ПРОХОДЯЩЕГО
ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ
И КАСАЮЩЕГОСЯ ОДНОЙ ИЗ НИХ**

**ON BIFURCATIONS OF A LIMIT CYCLE PASSING THROUGH
A JUNCTION POINT OF LINES OF DISCONTINUITY OF A VECTOR FIELD
AND TANGENT TO ONE OF THEM**

**В.Ш. Ройтенберг
V.Sh. Roitenberg**

Ярославский государственный технический университет
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский пр. 88

Yaroslavl State Technical University, Russia, 88 Moskovskij pr., Yaroslavl, 150023, Russia

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация

Рассматривается кусочно-гладкое векторное поле X_0 на плоскости с разбиением на подмногообразия M_i ($i = 1, 2, \dots$) с углами. Пусть точка O является 1-угловой для M_1 , 2-угловой для остальных элементов разбиения, примыкающих к точке O , и через эту точку проходит периодическая траектория Γ , касающаяся ∂M_1 . Предполагается, что на трансверсали к Γ определена функция последования $f(\cdot)$ по траекториям поля, причем $f(0) = 0$, $f'(\pm 0) = \mu_{\pm} \neq 1$. Рассматриваются два случая $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) > 0$ и $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) < 0$. В каждом случае для семейства векторных полей, являющегося двухпараметрической деформацией общего положения векторного поля X_0 , рассматриваемого в достаточно малой кольцевой окрестности Γ , получена бифуркационная диаграмма. В первом случае Γ бифурцирует аналогично тройному циклу гладкого векторного поля, в частности, из Γ могут родиться три грубые периодические траектории. Во втором случае бифуркации Γ похожи на бифуркации двойного цикла гладкого векторного поля.

Abstract

We consider a piecewise-smooth vector field X_0 on the plane with partition into submanifolds M_i ($i = 1, 2, \dots$) with angles. Let the point O be 1-angular for M_1 , 2-angular for the remaining elements of the partition adjacent to the point O , and through this point there passes a periodic trajectory Γ tangent to ∂M_1 . It is assumed that on the transversal to Γ is defined Poincaré map $f(\cdot)$, $f(0) = 0$, $f'(\pm 0) = \mu_{\pm} \neq 1$. Two cases, $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) > 0$ and $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) < 0$, are considered. In each case, for a family of vector fields that is a generic two-parameter deformation of a vector field X_0 considered in a sufficiently small ring neighborhood of Γ , we obtain the bifurcation diagram. In the first case, Γ bifurcates similarly to the triple cycle of a smooth vector field; in particular, three coarse periodic trajectories can be born from it. In the second case, bifurcations of Γ are similar to bifurcations of the double cycle of a smooth vector field.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, периодическая траектория, бифуркационная диаграмма, бифуркации.

Keywords: piecewise smooth vector field, periodic trajectory, bifurcation diagram, bifurcations.



Введение. Динамические системы, задаваемые разрывными (кусочно-гладкими) векторными полями используются в различных технических, биологических и экономических задачах. Хотя кусочно-гладкие системы изучались в большом числе научных работ (ссылки можно найти в книгах [1] и [2]), их бифуркации еще недостаточно исследованы.

В статьях [3] – [7] описаны бифуркации кусочно-гладких векторных полей на плоскости в окрестности устойчивой негрубой особой точки типа «сшитый фокус» на стыке линий разрыва векторных полей при потере устойчивости. В [8] рассматривались бифуркации периодической траектории, касающейся линии разрыва.

В работах [9] и [10] для кусочно-гладкого векторного поля, заданного на двумерном многообразии M с разбиением $D = (M_1, \dots, M_m)$ на многообразия с углами, изучались типичные бифуркации в окрестности периодической траектории, проходящей через точку O , являющейся 2-угловой точкой для всех элементов разбиения D , ее содержащей.

В настоящей работе рассматривается случай, когда точка O является 1-угловой для M_1 и периодическая траектория касается ∂M_1 в точке O .

1. Условия и результаты. Пусть $M \subset \mathbf{R}^2$ – компактное C^{r+1} -многообразие с углами ($r \geq 3$), $D = (M_1, M_2, \dots, M_m)$ – разбиение M на компактные C^{r+1} -многообразия с углами, пересекающимися между собой только по границам.

Кусочно-гладким векторным полем класса C^r на многообразии с разбиением D назовем элемент $X = (X^1, X^2, \dots, X^m)$ банахова пространства $X^r(M, D) := \bigoplus_{i=1}^m X^r(M_i)$, где $X^r(M_i)$ – банахово пространство векторных полей класса C^r на M_i с C^r -нормой. *Траекториями* векторного поля X следуя [1, с. 95] будем называть траектории дифференциального включения $\dot{z} = X^*(z)$, $z \in M$, где $X^*(z) = \{X^i(z)\}$ при $z \in \text{int } M_i$ и $X^*(z)$ – выпуклая оболочка векторов $X^{i_1}(z), X^{i_2}(z), \dots, X^{i_s}(z)$ при $z \in M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_s}$.

Пусть точка $O \in \text{int } M \setminus \bigcup_{i=1}^m \text{int } M_i$. Без ограничения общности можно считать, что элементы разбиения D пронумерованы так, что точка O принадлежит ∂M_i только для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \leq m$. Пусть точка O является 1-угловой для M_1 и 2-угловой для M_i , $i \in \{2, \dots, n\}$. Тогда $n \geq 3$. Мы можем считать, что нумерация M_i , $i \in \{2, \dots, n\}$, и C^{r+1} -координаты (x, y) в некоторой окрестности V^* точки O выбраны так, что точка O имеет координаты $(0, 0)$, $M_1 \cap V^*$ задается неравенствами $x^2 + y^2 < 1$, $y \leq 0$, множество $L_i := \partial M_i \cap \partial M_{i+1} \cap V^*$ при $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ и $L_i := \partial M_1 \cap \partial M_n \cap V^*$ при $i = n$ является образом при C^{r+1} -вложении $\eta_i: [0, 1] \rightarrow M$, $\eta_i(0) = O$, $\eta_1(s) = (s, 0)$, $\eta_n(s) = (-s, 0)$. Тогда $\partial M_1 \cap V^* = L_1 \cup L_n$, для $i \in \{2, \dots, n\}$ $\partial M_i \cap V^* = L_{i-1} \cup L_i$, а упорядоченные пары векторов $(\eta'_{i-1}(0), \eta'_i(0))$, $i \in \{2, \dots, n\}$, положительно ориентированы (относительно ориентации, заданной координатами (x, y)).

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon = (X_\varepsilon^1, \dots, X_\varepsilon^m) \in X^r(M, D)$, зависящих от параметра ε , принадлежащего некоторой окрестности нуля E в двумерном евклидовом пространстве. Будем предполагать, что отображения $M_i \times E \ni (z, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon^i(z)$ принадлежат классу C^r и могут быть продолжены до C^r -отображений на $M \times E$.

Предположим, что для поля $X_0 = (X_0^1, \dots, X_0^m)$ выполняется условие

(У1) Для любого $i \in \{2, \dots, n\}$ обе пары векторов $(\eta'_{i-1}(0), X_0^i(O))$ и $(\eta'_i(0), X_0^i(O))$ положительно ориентированы.



Из условия (У1) и [11, с. 80–85] вытекает, что число $s_0 > 0$ и окрестность E_0 нуля в E можно выбрать так, что для любого $\varepsilon \in E_0$ определены отображения $\eta_{i-1}(s) \mapsto \eta_i(\theta_{i,\varepsilon}(s))$, $s \in [0, s_0]$, по траекториям векторных полей X_ε^i , $i \in \{2, \dots, n\}$, при этом $(s, \varepsilon) \mapsto \theta_{i,\varepsilon}(s)$ – функции класса C^r , $\theta_{i,\varepsilon}(0) = 0$, $(\theta_{i,\varepsilon})'(s) > 0$.

В координатах (x, y) $X_\varepsilon^1(x, y) = P_1(x, y, \varepsilon)\partial/\partial x + Q_1(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y$, где P_1 и Q_1 – C^r -функции на $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \times E$. Пусть выполняются условия

(У2) $P_1(0,0,0) < 0$, $Q_1(0,0,0) = 0$, $Q'_{1x}(0,0,0) > 0$.

(У3) *Через точку O проходит периодическая траектория Γ_0 поля X_0 , не содержащая особых точек, отличных от O .*

В силу (У1) и (У2) пересечение Γ_0 с достаточно малой окрестностью точки O является дугой траектории поля X_0^1 , касающейся ∂M_1 в точке O .

Пусть $\eta : (-v_1, v_1) \rightarrow \text{int } M_1$ – C^r -вложение, трансверсальное полю X_0^1 , такое, что $\eta(0) \in \Gamma_0$, а дуга $\eta(-v_1, 0)$ находится с той же стороны от Γ_0 , что и дуга $x = 0, -\alpha < y < 0$, при достаточно малом $\alpha > 0$. Тогда найдется такое число $v_2 \in (0, v_1)$, что траектория поля X_0 , начинающаяся в точке $\eta(v)$, $v \in (-v_2, 0]$, следующий раз пересечет дугу $\eta(-v_1, 0]$ в точке $\eta(f_0^-(v))$, где $f_0^-(\cdot) \in C^r$, $f_0^-(0) = 0$, $(f_0^-)'(v) > 0$, то есть на дуге $\eta(-v_2, 0]$ определена функция последования по траекториям поля X_0 (рис. 1).

Обозначим $\mu_- := (f_0^-)'(0)$, $\mu_+ := (f_0^-)'(0) \cdot [(\theta_{2,\varepsilon})'(0) \cdots (\theta_{n,\varepsilon})'(0)]^2$. Далее мы покажем, что на дуге $\eta[0, v_*)$ при некотором $v_* > 0$ определена функция последования $f_0^+(v)$ по траекториям поля X_0 , и для нее $(f_0^+)'(0) = \mu_+$. Будем предполагать

(У4) $\mu_- \neq 1$, $\mu_+ \neq 1$.

Из (У2) по теореме о неявной функции следует существование числа $\hat{x} > 0$ и окрестности E_1 точки $0 \in E_0$, таких, что для $\varepsilon \in E_1$ уравнение $Q_1(x, 0, \varepsilon) = 0$ имеет в интервале $(-\hat{x}, \hat{x})$ единственное решение $x = x_0(\varepsilon)$, при этом $x_0(\cdot) \in C^r$, $x_0(0) = 0$, $Q'_{1x}(x_0(\varepsilon), 0, \varepsilon) > 0$. Обозначим O_ε точку с координатами $x = x_0(\varepsilon)$, $y = 0$. Если окрестность E_2 точки $0 \in E_1$ достаточно мала, то из точки O_ε выходит положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε , $\varepsilon \in E_2$, пересекающая дугу $\eta(-v_1, v_1)$ в точке $\eta(v_+(\varepsilon))$ ($\eta(v_-(\varepsilon))$), где $v_\pm(\cdot) \in C^r$, $v_\pm(0) = 0$. Обозначим $v_0(\varepsilon) := v_-(\varepsilon) - v_+(\varepsilon)$. Теперь мы можем сформулировать условие

(У5) *Векторы $\partial x_0(\varepsilon)/\partial \varepsilon$ и $\partial v_0(\varepsilon)/\partial \varepsilon$ линейно независимы.*

Если это условие выполняется, то в некоторой окрестности E_3 точки $0 \in E_2$ можно выбрать C^r -координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что

$$x_0(\varepsilon) = \varepsilon_1, \quad v_0(\varepsilon) = \varepsilon_2. \tag{1}$$

В дальнейшем будем отождествлять точку $\varepsilon \in E_3$ с ее координатной строкой: $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, обозначать $|\varepsilon| := \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$ и считать $E_3 = (-\delta_*, \delta_*)^2$ при некотором $\delta_* > 0$.

Можно показать, что условия (У1) – (У4) задают в $X^r(M, D)$ C^r -подмногообразие коразмерности два, а условие (У5) означает трансверсальность отображения $\varepsilon \mapsto X_\varepsilon$ к этому подмногообразию в точке $\varepsilon = 0$.

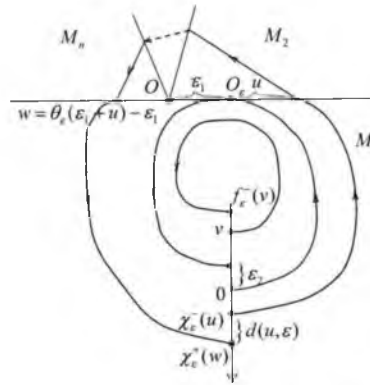


Рис. 1. Отображения f_ϵ^- , χ_ϵ^- и χ_ϵ^+

Fig.1 Displays f_ϵ^- , χ_ϵ^- and χ_ϵ^+

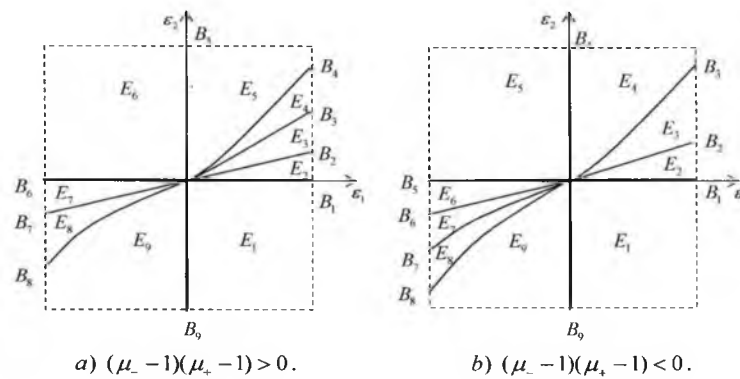


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма семейства $X_\epsilon|U$

Fig.2 Bifurcation diagram of the family

Теорема. Пусть выполняются условия (У1) – (У5). Тогда существуют окрестность U кривой Γ_0 , граница ∂U которой состоит из двух кусочно-гладких кривых Γ^- и Γ^+ , а также числа $\delta, \delta_0 \in (0, \delta_*)$ со следующими свойствами:

1) При $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) > 0$ положительные полутраектории векторных полей X_ϵ , $\epsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$, начинающиеся в точках ∂U входят в U . При $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) < 0$ положительные полутраектории векторных полей X_ϵ , $\epsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$, начинающиеся в точках Γ^- , входят в U , начинающиеся в точках Γ^+ выходят из U .

2) Бифуркационная диаграмма семейства $X_\epsilon|U$, $\epsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$, представляет разбиение $(-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$ на множества E_i , $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, и B_j , $j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ (рис. 2). Здесь в случае $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) > 0$ $B_0 = \{(0, 0)\}$, $B_1 = (0, \delta_0) \times \{0\}$, $B_5 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_6 = (-\delta_0, 0) \times \{0\}$, $B_9 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, при $j \in \{1, 2, 3\}$ $B_j = \{\epsilon : \epsilon_1 \in (0, \delta_0), \epsilon_2 = \beta_j(\epsilon_1)\}$, где $\beta_j : (0, \delta_0) \rightarrow (0, \delta)$, $\beta_j \in C^r$, $\beta_j(+0) = 0$, при $k \in \{7, 8\}$ $B_k = \{\epsilon : \epsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \epsilon_2 = \beta_k(\epsilon_1)\}$, где $\beta_k : (-\delta_0, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$, $\beta_k \in C^r$, $\beta_k(-0) = 0$, а в случае $(\mu_- - 1)(\mu_+ - 1) < 0$ $B_0 = \{(0, 0)\}$, $B_1 = (0, \delta_0) \times \{0\}$, $B_4 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_5 = (-\delta_0, 0) \times \{0\}$, $B_9 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, при $j \in \{1, 2\}$ $B_j = \{\epsilon : \epsilon_1 \in (0, \delta_0), \epsilon_2 = \beta_j(\epsilon_1)\}$, где $\beta_j : (0, \delta_0) \rightarrow (0, \delta)$, $\beta_j \in C^r$, $\beta_j(+0) = 0$, при $k \in \{6, 7, 8\}$ $B_k = \{\epsilon : \epsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \epsilon_2 = \beta_k(\epsilon_1)\}$, где $\beta_k : (-\delta_0, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$, $\beta_k \in C^r$, $\beta_k(-0) = 0$.



Схемы фазовых портретов векторных полей $X_\varepsilon|_U$, $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$ при $\mu_- < 1$, $\mu_+ < 1$ изображены на рис. 3, а при $\mu_- < 1$, $\mu_+ > 1$ на рис. 4. Для $\varepsilon_1 < 0$ ($\varepsilon_1 > 0$) дуга ∂M_1 между точками O и O_ε является устойчивой (неустойчивой) линейной особенностью. При $\mu_- > 1$, $\mu_+ > 1$ ($\mu_- > 1$, $\mu_+ < 1$) на фазовых портретах, изображенных на рис. 3 (рис. 4), следует изменить ориентацию на траекториях на противоположную.

Доказательство для случая $\mu_- < 1$, $\mu_+ < 1$ приведено в пунктах 2–5. Случай $\mu_- < 1$, $\mu_+ > 1$ рассматривается аналогично.

2. Функции соответствия, функции последования, функция расхождения. Пусть $\eta_\varepsilon(v) := \eta(v_-(\varepsilon) + v)$, $\zeta_\varepsilon(u)$ – точка с координатами $x = x_0(\varepsilon) + u = \varepsilon_1 + u$, $y = 0$. Тогда $O = \zeta_\varepsilon(-\varepsilon_1)$, $O_\varepsilon = \zeta_\varepsilon(0)$. Ввиду (Y1) и (Y2) мы можем считать δ_* столь малым, что при $\varepsilon \in (0, \delta_*) \times (-\delta_*, \delta_*)$ векторное поле X_ε^1 (X_ε^2) в точках открытой дуги $\zeta_\varepsilon(-\varepsilon_1, 0)$ направлено внутрь M_1 (M_2), а в точках $z \in OO_\varepsilon = \zeta_\varepsilon[-\varepsilon_1, 0]$ вектор $T(u, \varepsilon)\partial/\partial u$ из выпуклой оболочки векторов $X_\varepsilon^1(z)$ и $X_\varepsilon^2(z)$, касающийся ∂M_1 , ненулевой, причем $T(u, \varepsilon) < 0$. Поэтому дуга OO_ε – неустойчивая линейная особенность поля X_ε , являющаяся дугой траектории поля [1]. Аналогично получаем, что при $\varepsilon \in (-\delta_*, 0) \times (-\delta_*, \delta_*)$ OO_ε – устойчивая линейная особенность поля X_ε , являющаяся дугой траектории поля.

Из (1) и [8, с. 59–61] следует

Лемма. При некоторых $\bar{u} > 0$ и $\delta_1 \in (0, \delta_*)$ положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε , $|\varepsilon| < \delta_1$, начинающаяся в точке $\zeta_\varepsilon(u)$, $u \in [-\bar{u}, 0]$ ($u \in [0, \bar{u}]$) как полутраектория поля X_ε^1 , первый раз пересекает дугу $\eta(-v_1, v_1)$ в точке $\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^+(u))$ ($\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^-(u))$) (см. рис. 1), где

$$\chi_\varepsilon^\pm(\cdot) \in C^r, \chi_\varepsilon^+(0) = -\varepsilon_2, \chi_\varepsilon^-(0) = 0; \tag{2}$$

$$(\chi_\varepsilon^\pm)'(0) = 0, (\chi_\varepsilon^+)'(u) < 0 \text{ при } u \in [-\bar{u}, 0), (\chi_\varepsilon^-)'(u) > 0 \text{ при } u \in (0, \bar{u}]; \tag{3}$$

$$(\chi_\varepsilon^+)''(0) > 0, (\chi_\varepsilon^-)''(0) > 0; \tag{4}$$

$$(\chi_0^+)''(0)/(\chi_0^-)''(0) = (f_0^-)'(0) = \mu_-. \tag{5}$$

Поскольку $\chi_\varepsilon^+(0) = -\varepsilon_2$, то мы можем считать, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^+(u) < 0, \text{ если } |\varepsilon| < \delta_1, u \in [-\bar{u}, 0]. \tag{6}$$

Из (4), (5) и условия $\mu_- < 1$ получаем, что

$$0 < (\chi_0^+)''(0) < (\chi_0^-)''(0). \tag{7}$$

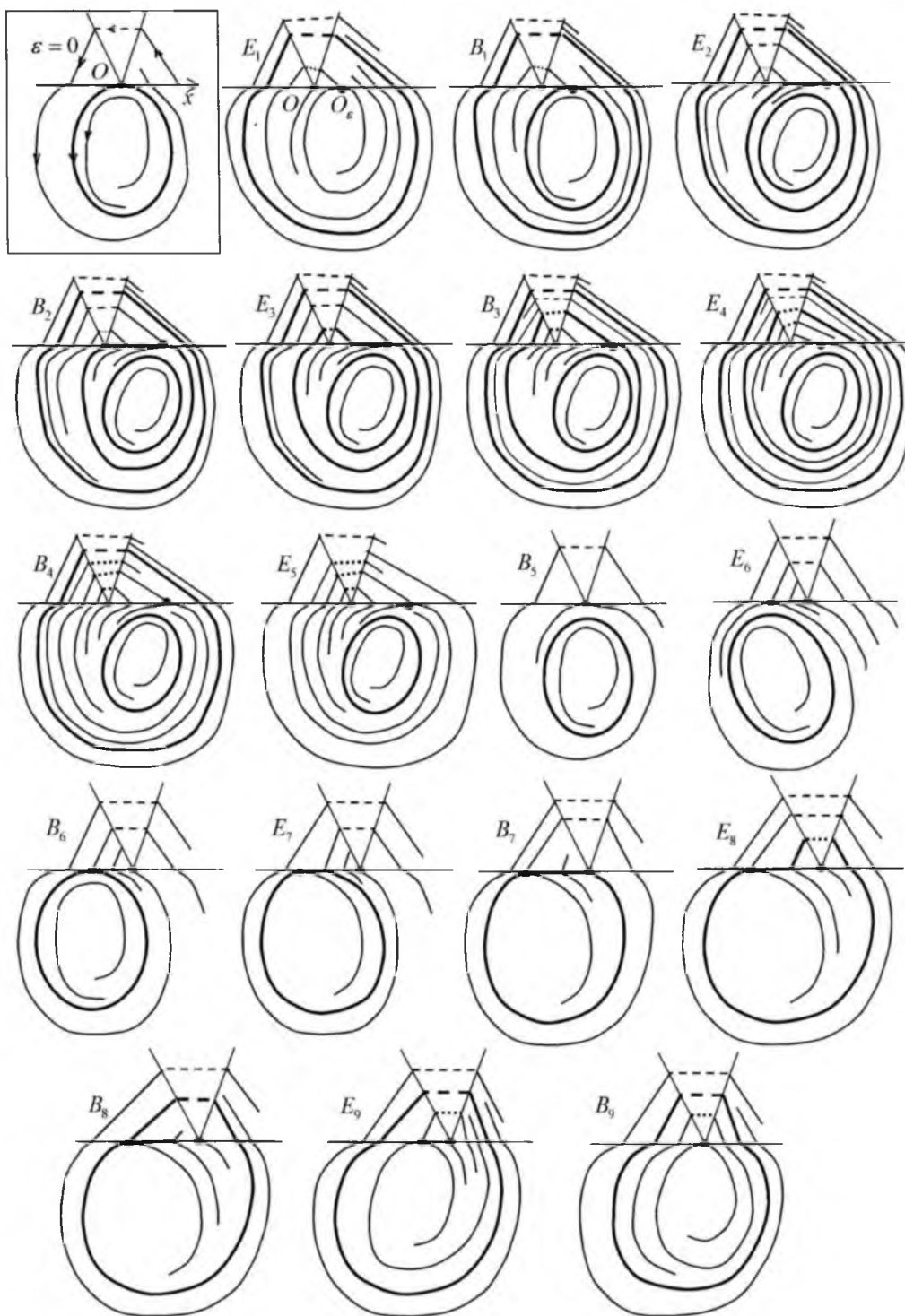


Рис. 3. Фазовые портреты векторных полей $X_\varepsilon|_U$, в случае $\mu_- < 1, \mu_+ < 1$

Fig.3. Phase portraits of vector fields $X_\varepsilon|_U$, in the case $\mu_- < 1, \mu_+ < 1$

Мы можем выбрать числа $v_* > 0$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ так, что траектория поля $X_\varepsilon, |\varepsilon| < \delta_2$, начинающаяся в точке $\eta_\varepsilon(v), v \in [-v_*, 0]$ следующий раз пересечет дугу $\eta(-v_1, v_1)$ в точке $\eta_\varepsilon(f_\varepsilon^-(v))$, где $f_\varepsilon^-(\cdot) \in C^r, (f_\varepsilon^-)'(v) > 0$,

$$f_\varepsilon^-(0) = -\varepsilon_2, \tag{8}$$

то есть на дуге $\eta_\varepsilon[-v_*, 0]$ определена функция f_ε^- последования по траекториям поля X_ε .

При $\varepsilon = 0$ она совпадает с ранее введенной функцией f_0^- . Так как $f_0^-(0) = 0$, $0 < (f_0^-)'(0) < 1$, то можно считать, что при $|\varepsilon| < \delta_2$

$$f_\varepsilon^-(-v_*) > -v_* , \tag{9}$$

$$0 < (f_\varepsilon^-)'(v) < 1 \text{ для } v \in [-v_*, 0]. \tag{10}$$

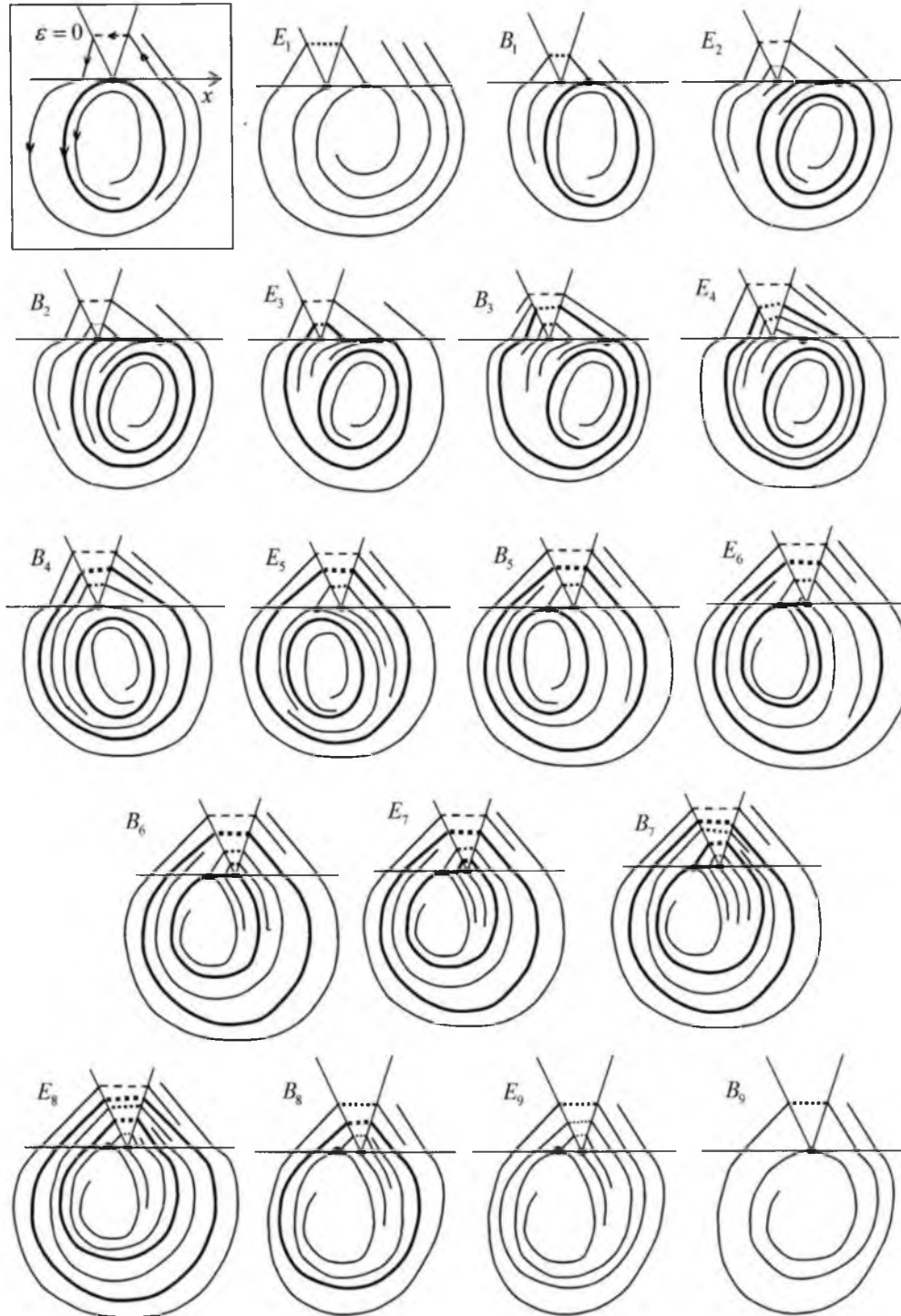


Рис. 4. Фазовые портреты векторных полей $X_\varepsilon|_U$, в случае $\mu_- < 1$, $\mu_+ > 1$

Fig.4. Phase portraits of vector fields $X_\varepsilon|_U$, in the case $\mu_- < 1$, $\mu_+ > 1$



Мы можем считать, что при выбранном δ_2 отображения $\theta_\varepsilon := -\theta_{2,\varepsilon} \circ \theta_{3,\varepsilon} \circ \dots \circ \theta_{n,\varepsilon}$, $|\varepsilon| < \delta_2$, определены на некотором промежутке $[0, \sigma)$. Определим функцию последования $f_\varepsilon^+(v) := \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1 + (\chi_\varepsilon^-)^{-1}(v)) - \varepsilon_1)$ и функцию расхождения $d(u, \varepsilon) := \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1 + u) - \varepsilon_1) - \chi_\varepsilon^-(u)$. Для достаточно малого $u_* > 0$ найдется такое $\delta_3 \in (0, \delta_2)$, что $d(u, \varepsilon)$ определена для $u \in [u_l(\varepsilon), u_*]$, $|\varepsilon| < \delta_3$, где $u_l(\varepsilon) = 0$, если $\varepsilon_1 \geq 0$ и $u_l(\varepsilon) = \theta_\varepsilon^{-1}(\varepsilon_1) - \varepsilon_1$, если $\varepsilon_1 \leq 0$. Соответственно, $f_\varepsilon^+(v)$ определена для $v \in [v_l(\varepsilon), v_r(\varepsilon)]$, где $v_r(\varepsilon) = \chi_\varepsilon^-(u_*)$, а $v_l(\varepsilon) = 0$, если $\varepsilon_1 \geq 0$ и $v_l(\varepsilon) = \chi_\varepsilon^-(-\varepsilon_1)$, если $\varepsilon_1 < 0$.

Поскольку $(f_0^+)'(v) = (\chi_0^+)'(\theta_0(u))(\theta_0)'(u) / (\chi_0^-)'(u)$, где $u = (\chi_0^-)^{-1}(v)$, то, учитывая (3)–(5) и используя правило Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned} (f_0^+)'(+0) &= \lim_{u \rightarrow +0} [(\chi_0^+)'(\theta_0(u))((\theta_0)'(u))^2 + (\chi_0^+)'(\theta_0(u))(\theta_0)''(u)] / (\chi_0^-)'(u) = \\ &= (\chi_0^+)'(0)((\theta_0)'(0))^2 / (\chi_0^-)'(0) = (f_0^-)'(0)((\theta_0)'(0))^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $(f_0^+)'(0) = (f_0^+)'(+0) = \mu_+$.

Так как при $|\varepsilon| < \delta_3$ $\theta_\varepsilon(s)$ можно продолжить до функции $\bar{\theta}_\varepsilon(u)$, $u \in (-\sigma, \sigma)$, а $\chi_\varepsilon^-(u)$ и $\chi_\varepsilon^+(u)$ – до функций $\bar{\chi}_\varepsilon^-(u)$ и $\bar{\chi}_\varepsilon^+(u)$, $u \in (-\bar{u}, \bar{u})$, с сохранением C^r -гладкости по (u, ε) , то и $d(u, \varepsilon)$ можно считать продолженной до C^r -функции $\bar{d}(u, \varepsilon)$, определенной на $[-u_*, u_*] \times (-\delta_3, \delta_3)^2$.

Из (3) – (5), неравенства $\mu_+ - 1 < 0$ и равенств $\theta_0(0) = 0$,

$$\bar{d}'_u(u, \varepsilon) := (\bar{\chi}_\varepsilon^+)'(\bar{\theta}_\varepsilon(\varepsilon_1 + u) - \varepsilon_1)(\bar{\theta}_\varepsilon)'(\varepsilon_1 + u) - (\bar{\chi}_\varepsilon^-)'(u), \tag{11}$$

$\bar{d}''_{uu}(u, \varepsilon) := (\bar{\chi}_\varepsilon^+)'(\bar{\theta}_\varepsilon(\varepsilon_1 + u) - \varepsilon_1)((\bar{\theta}_\varepsilon)'(\varepsilon_1 + u))^2 + (\bar{\chi}_\varepsilon^+)'(\bar{\theta}_\varepsilon(\varepsilon_1 + u) - \varepsilon_1)(\bar{\theta}_\varepsilon)''(\varepsilon_1 + u) - (\bar{\chi}_\varepsilon^-)''(u)$, получаем

$$d(0,0) = d'_u(0,0) = 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} d''_{uu}(0,0) &= (\chi_0^+)'(0)((\theta_0)'(0))^2 - (\chi_0^-)''(0) = (f_0^-)'(0)(\chi_0^-)''(0)((\theta_0)'(0))^2 - (\chi_0^-)''(0) = \\ &= (\chi_0^-)''(0)(\mu_+ - 1) < 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) следует, что числа u_* и δ_3 можно считать выбранными так, что

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) < 0, \text{ если } |\varepsilon| < \delta_3, u \in (u_l(\varepsilon), u_*). \tag{14}$$

Поскольку $d(\hat{u}, \varepsilon) = f_\varepsilon^+(\hat{v}) - \hat{v}$ при $\hat{v} = \chi_\varepsilon^-(\hat{u})$, $\hat{u} \in (0, u_*]$, то

$$d(\hat{u}, \varepsilon) = 0, d'_u(\hat{u}, \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow f_\varepsilon^+(\hat{v}) = \hat{v}, (f_\varepsilon^+)'(\hat{v}) < 1, \tag{15}$$

$$d(\hat{u}, \varepsilon) = d'_u(\hat{u}, \varepsilon) = 0, d''_{uu}(\hat{u}, \varepsilon) < 0 \Leftrightarrow f_\varepsilon^+(\hat{v}) = \hat{v}, (f_\varepsilon^+)'(\hat{v}) = 1, (f_\varepsilon^+)''(\hat{v}) < 0. \tag{16}$$

Из (12) и (14) вытекает, что

$$d(u,0) < 0, d'_u(u,0) < 0, \text{ если } u \in (0, u_*]. \tag{17}$$

Поэтому можно считать, что при выбранном δ_3

$$d(u_*, \varepsilon) < 0, d'_u(u_*, \varepsilon) < 0, \text{ если } |\varepsilon| < \delta_3. \tag{18}$$

Вследствие (2) $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^+(0) = -1$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^-(0) = 0$. Отсюда, из равенств $(\chi_\varepsilon^+)'(0) = 0$, $\theta_0(0) = 0$ и



$$\bar{d}'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \bar{\chi}_\varepsilon^+\right)(\bar{\theta}_\varepsilon(\varepsilon_1 + u) - \varepsilon_1) + (\bar{\chi}_\varepsilon^+)'(\bar{\theta}_\varepsilon(\varepsilon_1 + u) - \varepsilon_1) \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \bar{\theta}_\varepsilon\right)(\varepsilon_1 + u) - \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \chi_\varepsilon^-\right)(u)$$

получаем $\bar{d}'_{\varepsilon_2}(0, 0) = -1$, и потому можно считать

$$d'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) < -1/2 \text{ для } |\varepsilon| < \delta_3, u \in [u_l(\varepsilon), u_*]. \tag{19}$$

3. Окрестность U . Учитывая (9), (17) и используя теорему о трубке траекторий [11, с. 80–85], можно построить цилиндрическую окрестность U кривой Γ_0 , ограниченную двумя простыми замкнутыми кусочно-гладкими кривыми Γ^- и Γ^+ , со следующими свойствами: 1) Γ^- (Γ^+) состоит из гладких дуг, принадлежащих подмногообразиям M_i , трансверсальных ∂M_i , с концами, лежащими на ∂M_i , и таких, что в их точках векторное поле X_0^i им трансверсально и направлено внутрь U ; 2) Γ^- (Γ^+) трансверсально пересекает дугу $\eta(-v_1, v_1)$ в единственной точке $\gamma^- = \eta(f_0^-(v_*))$ ($\gamma^+ = \eta(f_0^+(v_r(0)))$); 3) в точках $U \cap \partial M_i$, отличных от O , векторное поле X_0^i трансверсально ∂M_i ; 4) векторные поля X_0^i не имеют в U особых точек.

Мы можем выбрать $\delta \in (0, \delta_3)$ столь малым, что при $|\varepsilon| < \delta$ 1) $\gamma^- \in \eta_\varepsilon(-v_*, 0)$, а $\gamma^+ \in \eta_\varepsilon(0, v_r(\varepsilon))$; 2) на каждой гладкой дуге Γ^- и Γ^+ , принадлежащей M_i , векторное поле X_ε^i трансверсально этой дуге и направлено внутрь U (тем самым, положительные полутраектории поля X_ε , начинающиеся в точках ∂U , входят в U); 3) любая положительная полутраектория X_ε , начинающаяся в точке U , пересекает дугу $\eta_\varepsilon(-v_*, v_r(\varepsilon))$.

4. Построение бифуркационной диаграммы при $\varepsilon_1 \geq 0$. Из (8) – (10) следует, что при $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times (-\delta, 0)$ функция f_ε^- не имеет неподвижных точек, а векторное поле X_ε периодических траекторий, пересекающих дугу $\eta_\varepsilon[-v_*, 0]$, при $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta)$ f_ε^- имеет единственную, причем устойчивую, неподвижную точку $v_-(\varepsilon) \in (-v_*, 0)$, а X_ε имеет единственную, причем устойчивую периодическую траекторию $\Gamma_s^-(\varepsilon)$, пересекающую дугу $\eta_\varepsilon[-v_*, 0]$ в ее внутренней точке $\eta_\varepsilon(v_-(\varepsilon))$, при $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times \{0\}$ f_ε^- имеет единственную, причем устойчивую, неподвижную точку $v = 0$, а X_ε имеет периодическую траекторию $\Gamma^-(\varepsilon)$, проходящую через особую точку O_ε , к которой ω -предельны все траектории, пересекающие дугу $\eta_\varepsilon[-v_*, 0]$.

При $\varepsilon \in (0, \delta) \times \{0\}$ $\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) < 0$. Ввиду (2) – (3) $d(0, \varepsilon) = \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1) > \chi_\varepsilon^+(0) = -\varepsilon_2$, и

$$d(0, \varepsilon) > 0 \text{ для } \varepsilon \in (0, \delta) \times \{0\}. \tag{20}$$

Пусть $\varepsilon \in B_5 = \{0\} \times (0, \delta)$ или $\varepsilon \in B_9 = \{0\} \times (-\delta, 0)$. Из (11), (3) и равенства $\theta_\varepsilon(0) = 0$ имеем $d'_u(0, \varepsilon) = 0$. Отсюда и из (14) следует, что $d'_u(u, \varepsilon) < 0$ при всех $u \in (0, u_*)$, $\varepsilon \in B_5 \cup B_9$. Ввиду (2) при рассматриваемых ε $d(0, \varepsilon) = -\varepsilon_2$. Поэтому

$$d(u, \varepsilon) \leq d(0, \varepsilon) < 0 \text{ при } u \in [0, u_*], \varepsilon \in B_5, \tag{21}$$

то есть при $\varepsilon \in B_5$ f_ε^+ не имеет неподвижных точек. При $\varepsilon \in B_9$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $\hat{u}(\varepsilon) \in (0, u_*)$, $d'_u(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. Вследствие (15) f_ε^+ имеет единственную, причем устойчивую, неподвижную точку.



Ввиду (21) при некотором $\delta_0 \in (0, \delta)$

$$d(u, \varepsilon) < 0 \quad \text{для } u \in [0, u_*], \quad \varepsilon \in (0, \delta_0) \times \{\delta/2\}. \quad (22)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \delta_0) \times (0, \delta)$. Из (11), (3) и неравенств $\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) < 0$, $(\theta_\varepsilon)'(\varepsilon_1) < 0$ получаем $d'_u(0, \varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)'(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1)(\theta_\varepsilon)'(\varepsilon_1) > 0$. Отсюда, из (18) и (14) следует, что существует такая C^r -функция $m: (0, \delta_0) \times (0, \delta) \rightarrow (0, u_*)$, что

$$d'_u(m(\varepsilon), \varepsilon) = 0, \quad (23)$$

$$d'_u(u, \varepsilon) > 0 \quad \text{при } u \in [0, m(\varepsilon)], \quad d'_u(u, \varepsilon) < 0 \quad \text{при } u \in (m(\varepsilon), u_*]. \quad (24)$$

Обозначим $M(\varepsilon) := d(m(\varepsilon), \varepsilon)$. Вследствие (19) и (23)

$$M'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) < 0. \quad (25)$$

Из (20) и (22) получаем, что $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_0) \quad M(\varepsilon_1, 0) > 0$, а $\forall \varepsilon \in (0, \delta_0) \times \{\delta/2\} \quad M(\varepsilon) < 0$. Отсюда и из (25) следует, что $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ существует число $\beta_4(\varepsilon_1) \in (0, \delta/2)$, такое, что

$$\text{sgn } M(\varepsilon) = -\text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_4(\varepsilon_1)). \quad (26)$$

По теореме о неявной функции $\beta_4(\cdot) \in C^r$. Покажем, что $\beta_4(+0) = 0$. Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $\tau_k \downarrow 0$ для которой $\beta_4(\tau_k) \rightarrow a \in (0, \delta/2]$. Обозначим $\varepsilon^{(k)} := (\tau_k, \beta_4(\tau_k))$. Ввиду (21) $d(u, (0, a)) \leq d(0, (0, a)) < 0$ для всех $u \in [0, u_*]$. В силу компактности $[0, u_*]$ $d(u, \varepsilon^{(k)}) \rightarrow d(u, (0, a))$ равномерно относительно $u \in [0, u_*]$. Следовательно, при некотором $k \quad \forall u \in [0, u_*] \quad d(u, \varepsilon^{(k)}) \leq d(0, (0, a))/2 < 0$ в противоречие с тем, что согласно (26) $M(\varepsilon^{(k)}) = d(m(\varepsilon^{(k)}), \varepsilon^{(k)}) = 0$. Итак, $\beta_4(+0) = 0$.

Из (24) и (26) вытекает, что $d(0, \varepsilon) < 0$ для $\varepsilon = (\varepsilon_1, \beta_4(\varepsilon_1))$. Вместе с (19) и (20) это влечет существование $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ такого числа $\beta_3(\varepsilon_1) \in (0, \beta_4(\varepsilon_1))$, что $\beta_3(\cdot) \in C^r$ и

$$\text{sgn } d(0, \varepsilon) = -\text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_3(\varepsilon_1)). \quad (27)$$

Так как при $\varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1) \quad \chi_\varepsilon^+(-\varepsilon_1) < \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1) = d(0, \varepsilon) = 0$, а при $\varepsilon_2 = 0 \quad \chi_\varepsilon^+(-\varepsilon_1) > \chi_\varepsilon^+(0) = -\varepsilon_2 = 0$, то, учитывая (6), получаем, что $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_0)$ существует число $\beta_2(\varepsilon_1) \in (0, \beta_3(\varepsilon_1))$, $\beta_2(\cdot) \in C^r$, для которого

$$\text{sgn } \chi_\varepsilon^+(-\varepsilon_1) = -\text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)). \quad (28)$$

Пусть $B_j := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta_0), \varepsilon_2 = \beta_j(\varepsilon_1)\}$, $E_k := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0, \delta_0), \beta_{k-1}(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_k(\varepsilon_1)\}$ $j = 1, \dots, 4$, $k = 1, \dots, 5$, где положили $\beta_0(\varepsilon_1) := -\delta$, $\beta_1(\varepsilon_1) := 0$, $\beta_5(\varepsilon_1) := \delta$. Из (14) – (16), (18), (23), (24), (26) и (27) получаем следующие утверждения.

При $\varepsilon \in E_1 \cup B_1 \cup E_2 \cup B_2 \cup E_3 \quad d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $u_1(\varepsilon) \in (0, u_*)$, причем $d'_u(u_1(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, соответственно, X_ε имеет устойчивую гиперболическую периодическую траекторию $\Gamma_s^+(\varepsilon)$, проходящую через точку $\eta_\varepsilon(u_1(\varepsilon))$, а все остальные траектории, пересекающие дугу $I_\varepsilon^+ := \eta_\varepsilon[0, v_r(\varepsilon)]$, ω -предельны к $\Gamma_s^+(\varepsilon)$.



При $\varepsilon \in B_3$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет два нуля $u_1(\varepsilon) \in (0, u_*)$, и $u = 0$, а X_ε имеет две периодические траектории, пересекающие дугу l_ε^+ – устойчивую гиперболическую траекторию $\Gamma_s^+(\varepsilon)$ и неустойчивую траекторию, проходящую через особую точку O_ε .

При $\varepsilon \in E_4$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет два нуля $0 < u_2(\varepsilon) < u_1(\varepsilon) < u_*$, где $d'_u(u_1(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, $d'_u(u_2(\varepsilon), \varepsilon) > 0$, а X_ε – две периодические траектории, пересекающие дугу l_ε^+ , устойчивый и неустойчивый гиперболические предельные циклы.

При $\varepsilon \in B_4$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $\hat{u}(\varepsilon) \in (0, u_*)$, причем $d'_u(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $d''_{uu}(\hat{u}(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, а X_ε имеет единственную периодическую траекторию, пересекающую дугу l_ε^+ , – двойной цикл.

При $\varepsilon \in E_5$ $d(u, \varepsilon) < 0$ для всех $u \in [0, u_*]$, а все траектории X_ε , проходящие через точки дуги l_ε^+ , пересекают дугу $\eta_\varepsilon(-v_*, 0)$ и потому ω -предельны к циклу $\Gamma_s^-(\varepsilon)$.

Выясним теперь поведение траекторий, пересекающихся с неустойчивой линейной особенностью – дугой OO_ε .

Ввиду (28) при $\varepsilon \in B_2$ положительная полутраектория поля X_ε , выходящая из точки O и начинающаяся как положительная полутраектория поля X_ε^1 , идет в точку O_ε , а далее по дуге OO_ε , образуя периодическую траекторию $\Gamma_u(\varepsilon)$. При $\varepsilon \in E_2$ из (28) и (2) получаем, соответственно, неравенства $\chi_\varepsilon^+(-\varepsilon_1) > 0$ и $\chi_\varepsilon^+(0) < 0$. Из них и из (3) следует существование единственного числа $u_-(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, 0)$, такого, что $\chi_\varepsilon^+(u_-(\varepsilon)) = 0$. При $\varepsilon \in E_3$ ввиду (27) и (28) $\chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1) = d(0, \varepsilon) > 0$, а $\chi_\varepsilon^+(-\varepsilon_1) < 0$. Отсюда, ввиду (3) и положительности $(\theta_\varepsilon)'(\varepsilon_1 + u)$, вытекает существование единственного числа $u_-(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, 0)$, такого, что $\chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1 + u_-(\varepsilon)) - \varepsilon_1) = 0$. Для векторного поля X_ε , $\varepsilon \in E_2$ ($\varepsilon \in E_3$) получаем, что положительная полутраектория, выходящая из точки $\zeta_\varepsilon(u_-(\varepsilon))$ и начинающаяся как положительная полутраектория поля X_ε^1 (X_ε^2), идет в точку O_ε , а далее по дуге $\zeta_\varepsilon[u_-(\varepsilon), 0]$, образуя периодическую траекторию $\Gamma_u(\varepsilon)$. Все траектории X_ε , $\varepsilon \in E_2 \cup B_2 \cup E_3$, проходящие через точки $U \setminus \Gamma_u(\varepsilon)$, ω -предельны либо к $\Gamma_s^+(\varepsilon)$, либо к $\Gamma_s^-(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in E_1$ $\chi_\varepsilon^+(u) \geq \chi_\varepsilon^+(0) > 0$, если $u \in [-\varepsilon_1, 0]$. Поэтому все траектории поля X_ε , начинающиеся в точках дуги OO_ε , ω -предельны к $\Gamma_s^+(\varepsilon)$. Как было показано выше, при $\varepsilon \in B_1$ через точку O_ε проходит периодическая траектория $\Gamma^-(\varepsilon)$, к которой ω -предельны все траектории, пересекающие дугу $\eta_\varepsilon(-v_*, 0)$. Поскольку при $\varepsilon \in B_1$ $\chi_\varepsilon^+(u) > \chi_\varepsilon^+(0) = 0$, если $u \in [-\varepsilon_1, 0)$, то все траектории, проходящие через точки дуги $OO_\varepsilon \setminus O_\varepsilon$, ω -предельны к $\Gamma_s^+(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in B_3$ и $\varepsilon \in E_4 \cup B_4 \cup E_5$ $\chi_\varepsilon^+(u) < \chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1) = d(0, \varepsilon) \leq 0$ для $u \in (\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1, 0]$. При $\varepsilon \in E_4 \cup B_4 \cup E_5$, кроме того, и $\chi_\varepsilon^+(\theta_\varepsilon(\varepsilon_1) - \varepsilon_1) < 0$. Поэтому при $\varepsilon \in B_3$ ($\varepsilon \in E_4 \cup B_4 \cup E_5$) все траектории поля X_ε , начинающиеся в точках дуги $OO_\varepsilon \setminus O_\varepsilon$ (OO_ε), ω -предельны к $\Gamma_s^-(\varepsilon)$.



Из (10) и (17) следует, что все траектории поля X_0 , начинающиеся в точках U , ω -предельны к Γ_0 .

5. Построение бифуркационной диаграммы при $\varepsilon_1 < 0$. Для $\varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta)$

$$d'_u(u_l(\varepsilon), \varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)'(0)(\theta_\varepsilon)'(\varepsilon_1 + u_l(\varepsilon)) - (\chi_\varepsilon^-)'(u_l(\varepsilon)) = -(\chi_\varepsilon^-)'(u_l(\varepsilon)), \quad (29)$$

и потому $d'_u(u_l(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. Отсюда и из (14) следует, что

$$d'_u(u, \varepsilon) < 0 \quad \text{при всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta), \quad u_l(\varepsilon) \leq u < u_*. \quad (30)$$

Так как $\forall \varepsilon \quad \theta_\varepsilon(0) = 0$, то $(u_l)_{\varepsilon_2}'(0) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \theta_\varepsilon^{-1}(\varepsilon_1)|_{\varepsilon=0} = 0$. Отсюда, из равенства $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) = d'_{\varepsilon_2}(u_l(\varepsilon), \varepsilon) + d'_u(u_l(\varepsilon), \varepsilon)(u_l)_{\varepsilon_2}'(\varepsilon)$, из (19) и (29) получаем, что δ и, соответственно, δ_0 можно считать выбранными так, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) < 0 \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta). \quad (31)$$

Ввиду (2)

$$d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) = \chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(u_l(\varepsilon)) = -\chi_\varepsilon^-(u_l(\varepsilon)) < 0 \quad \text{для всех } \varepsilon \in B_6 = (-\delta_0, 0) \times \{0\}. \quad (32)$$

С другой стороны, при $\varepsilon = (0, -\delta/2)$ $d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) = d(0, \varepsilon) = \delta/2 > 0$, и потому можно считать, что δ_0 выбрано столь малым, что

$$d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) > 0 \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times \{-\delta/2\}. \quad (33)$$

Из (31) – (33) получаем, что существует C^r -функция $\beta_8 : (-\delta_0, 0) \rightarrow (-\delta, 0)$, такая, что

$$\text{sgn } d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) = -\text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_8(\varepsilon_1)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta), \quad (34)$$

Равенство $\beta_8(-0) = 0$ доказывается аналогично равенству $\beta_4(+0) = 0$.

Обозначим $R(\varepsilon) := \chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) = -\varepsilon_2 - \chi_\varepsilon^-(-\varepsilon_1)$. Ввиду (2) и (3) мы можем считать

$$R'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) < 0 \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta). \quad (35)$$

Пусть $\varepsilon_1 \in (-\delta_0, 0)$. Если $\varepsilon_2 = 0$, то $R(\varepsilon) = -\chi_\varepsilon^-(-\varepsilon_1) > 0$, а если $\varepsilon_2 = \beta_8(\varepsilon_1)$, то $R(\varepsilon) > \chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(u_l(\varepsilon)) = d(u_l(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Из этих неравенств и из (35) следует, что

$$\text{sgn } R(\varepsilon) = -\text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_7(\varepsilon_1)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta, \delta), \quad (36)$$

где $\beta_8(\varepsilon_1) < \beta_7(\varepsilon_1) < 0$, $\beta_7(\cdot) \in C^r$, $\beta_7(-0) = 0$.

Пусть $B_j := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \varepsilon_2 = \beta_j(\varepsilon_1)\}$, $E_k := \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (-\delta_0, 0), \beta_k(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_{k-1}(\varepsilon_1)\}$ $j = 6, 7, 8$, $k = 6, \dots, 9$, где положили $\beta_5(\varepsilon_1) := \delta$, $\beta_6(\varepsilon_1) := 0$, $\beta_9(\varepsilon_1) := -\delta$. Из (8) – (10), (18), (30), (34), (36) и выбора окрестности U получаем следующие утверждения.

При $\varepsilon \in E_6$ ($\varepsilon \in B_6$) все положительные полутраектории, начинающиеся в точках U , ω -предельны к $\Gamma_s^-(\varepsilon)$ ($\Gamma^-(\varepsilon)$), а все отрицательные, начинающиеся в точках $U \setminus \Gamma_s^-(\varepsilon)$ ($U \setminus \Gamma^-(\varepsilon)$), выходят из U . При $\varepsilon \in E_k$ и $\varepsilon \in B_k$, $k = 7, 8, 9$, все положительные полутраектории начинающиеся в точках U , ω -предельны к периодической траектории $\Gamma_s^+(\varepsilon)$, а все отрицательные, начинающиеся в точках $U \setminus \Gamma_s^+(\varepsilon)$, выходят из U . При $\varepsilon \in E_7 \cup B_7$ $\Gamma_s^+(\varepsilon)$ - состоит из дуги между точками $O_\varepsilon = \zeta_\varepsilon(0)$ и $\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^+(0))$, дуги между точками $\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^+(0))$ и $\zeta_\varepsilon((\chi_\varepsilon^-)^{-1}(\chi_\varepsilon^+(0)))$ и дуги устойчивой линейной особенности OO_ε между точкой O_ε и точкой



$\zeta_\varepsilon((\chi_\varepsilon^-)^{-1}(\chi_\varepsilon^+(0)))$, совпадающей с O , если $\varepsilon \in B_7$. При $\varepsilon \in E_8 \cup B_8$ $\Gamma_s^+(\varepsilon)$ - состоит из дуги между точками O_ε и $\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^+(0))$, дуги между точками $\eta_\varepsilon(\chi_\varepsilon^+(0))$ и $\zeta_\varepsilon(f_\varepsilon^+(\chi_\varepsilon^+(0)))$ и дуги линейной особенности OO_ε между точкой O_ε и точкой $\zeta_\varepsilon(f_\varepsilon^+(\chi_\varepsilon^+(0)))$, совпадающей с O , если $\varepsilon \in B_8$. При $\varepsilon \in E_9 \cup B_9$ $\Gamma_s^+(\varepsilon)$ - гиперболическая траектория, проходящая через точку $\zeta_\varepsilon(\hat{u}(\varepsilon))$, где $\hat{u}(\varepsilon) \in (u_l(\varepsilon), u_*)$ - единственный нуль функции $d(\cdot, \varepsilon)$.

Из структуры фазовых портретов в U ясно, что разбиение $(-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$ на множества E_k, B_j соответствует разбиению множества векторных полей $X_\varepsilon|_U, \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-\delta, \delta)$, на классы топологической эквивалентности, то есть бифуркационной диаграммой.

Список литературы References

1. Филиппов А.Ф. 1985. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 224 с.
Filippov A.F. 1985. Differential equations with a discontinuous right-hand side. Moscow. Nauka. 224 pp.
2. di Bernardo M., Budd Ch. J., Carneys A.R., Kowalczyk P. 2008. Piecewise smooth dynamical systems. Appl. Math. Sci., 163. London: Springer-Verlag. 483 p.
3. Ройтенберг В.Ш. 2016. О рождении периодической траектории из точки пересечения линий разрыва векторного поля. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки, № 2: 34-38.
Roitenberg V.Sh. 2016. On the generation of a periodic trajectory out of a point of intersection of lines of discontinuity of a vector field. Bulletin of the Adyghe State University. Series: Natural-Mathematical and Technical Sciences, No. 2 (181): 34-38.
4. Ройтенберг В.Ш. 2016. О рождении периодической траектории из точки стыка линий разрыва кусочно-гладкого векторного поля. Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. Сб. трудов XXIX Междунар. науч. конференции, 3: 14-17.
Roitenberg V.Sh. 2016. On generation of a periodic orbit from a joining point of lines of discontinuity of a vector field. Mathematical methods in engineering and technologies: Proceedings of XXIX int. scientific conf. Saratov: SSTU Publishing House, 3: 14-17.
5. Ройтенберг В.Ш. 2016. О бифуркациях в окрестности точки стыка линий разрыва векторного поля. Научно-технический вестник Поволжья, № 5: 30-33.
Roitenberg V.Sh. 2016. On bifurcations in a neighborhood of a joining point of lines of discontinuity of a vector field. Scientific and Technical Bulletin of Volga Region, No.5: 30-33.
6. Ройтенберг В.Ш. 2016. О рождении странного аттрактора из точки пересечения линий разрыва векторного поля. Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки, № 4: 53-59.
Roitenberg V.Sh. 2016. On the generation of a strange attractor from a joining point of lines of discontinuity of a vector field. Bulletin of the Adyghe State University. Series: Natural-Mathematical and Technical Sciences, No. 4 (191): 53-59.
7. Ройтенберг В.Ш. 2017. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус». Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, № 2: 18–31.
Roitenberg V.Sh. 2017. On bifurcations in a neighborhood of a singular point of the triple sewn focus type. University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, No. 2. : 18–31.
8. Ройтенберг В.Ш. 2014. О бифуркациях сшитого тройного цикла. Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль: Изд-во ЯГПУ: 54-67.
Roitenberg V.Sh. 2014. On bifurcations of the sewn triple cycle. Mathematics and mathematic education. Theory and practice: coll. of scientific works. Iss. 9. Yaroslavl. YaSTU Publishing House: 78-91.



9. Ройтенберг В.Ш. 2012. О бифуркациях сшитого двойного цикла. Математика и физика, астрономия и экономика и совершенствование их преподавания. Материалы международной конференции "Чтения Ушинского". Ч.1. Ярославль: Изд-во ЯГПУ: 12-15.

Roitenberg V.Sh. 2012. On bifurcations of the sewn double cycle. Mathematics and physics, economics and technology and perfecting their teaching. Materials of international conference "Ushinsky Readings" Yaroslavl. YaSPU Publishing House: 12-15.

10. Ройтенберг В.Ш. 2016. О бифуркациях периодической траектории кусочно-гладкого векторного поля на плоскости, проходящей через точку «стыка» линий разрыва поля. Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд. дом ЯГТУ: 57-65.

Roitenberg V.Sh. 2016. On bifurcations of a periodic trajectory, passing through a junction point of lines of discontinuity of a vector field. Mathematics and natural sciences. Theory and practice: coll. of scientific works. Iss. 11. Yaroslavl. YaSTU Publishing House: 57-65.

11. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. 1966. Качественная теория динамических систем второго порядка, М.: Наука. 568 с.

Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. 1966. Qualitative theory of dynamical systems of second order, Moscow. Nauka. 568 p.