ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 004.031.4; 025.4.036
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-47-54

ПОВЕРХНОСТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

SURFACE STATES IN NONLINEAR HALF-SPACE

С.Е. Савотченко
S.E. Savotchenko

Белгородский государственный технологический университет
имени В.Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, Белгород, Россия

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov,
Kostyukova Str., 46, 308012, Belgorod, Russia

E-mail: savotchenkose@mail.ru

Аннотация
Рассмотрены вопросы существования поверхностных колебательных состояний в полуограниченных ангармонических кристаллах с различными знаками нелинейности. Предложена модель, математическая формулировка которой представляет собой одномерную краевую задачу для нелинейного уравнения Шредингера на полуоси. В рассматриваемой системе в зависимости от значения частоты получены несколько типов стационарных колебательных состояний, описывающих локальные возбуждения вблизи поверхности. Получены дисперсионные соотношения, определяющие значения частот таких состояний. В предельных случаях получены выражения для частоты стационарных колебательных состояний в явном виде.

Abstract
The problems of the existence of surface vibrational states in semibounded anharmonic crystals with different signs of nonlinearity are considered. A model is proposed whose mathematical formulation is a one-dimensional boundary-value problem for the nonlinear Schrödinger equation on the half-axis. In the system under consideration, depending on the frequency value, several types of stationary vibrational states are obtained that describe local excitations near the surface. Dispersion relations that determine the frequencies of such states are obtained. In limiting cases, expressions for the frequency of stationary vibrational states are obtained in explicit form.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, поверхность, солитон, локализованные состояния.
Keywords: nonlinear Schrödinger equation, surface, soliton, localized states.

Введение

Изучение различных поверхностных состояний в кристаллах, в том числе в ангармонических, проводится достаточно давно [1-8]. Нелинейные свойства, которые демонстрируют поверхностные волны, наблюдались во многих экспериментах [9, 10]. Интерес к исследованию нелинейных поверхностных состояний возрастает в связи с интенсивным развитием физики нелинейных явлений и их применением в технических приложениях. Для технических приложений нелинейных поверхностных состояний важна возможность распространения устойчивых слабозатухающих импульсов или волновых пакетов [11].

При теоретическом изучении нелинейных поверхностных волн звуковой природы в упругих средах, как правило, используются уравнения Буссинеска и различные его обобщения [4-6]. В тоже время, нелинейные волны электромагнитной природы в оптических средах с показателем преломления, зависящим квадратично от модуля амплитуды напряженности электрического поля, описываются нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) [2, 11-13].

НУШ широко используется при формулировке математических моделей описания локализованных вблизи дефектов малоамплитудных нелинейных колебаний в ангармонических кристаллах [14]. Решения НУШ описывают локализованные колебательные состояния с частотами вне зоны сплошного спектра, зависящими от амплитуды колебаний, в ангармоническом кристалле с точечным дефектом [15].

Для описания возбуждений в средах с пространственной дисперсией и коллективных возбуждений молекулярных цепочках используются обобщения НУШ с производными четвертого порядка [16-22]. В [23-25] было предложено модифицировать потенциал взаимодействия возбуждения в нелинейной среде с дефектом, обладающего внутренней структурой, при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия. В [26] на основе НУШ были проанализированные особенности взаимодействия локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред.

В данной работе предлагается описать различные виды стационарных колебательных состояний, которые возникают вблизи поверхности нелинейной среды. Для этого предлагается простая модель, использующая НУШ. В рамках данной модели предполагается, что возбуждение свободно распространяется вдоль поверхности кристалла, а неличные свойства среды существенны в направлении, перпендикулярном поверхности. Тогда задача сводится к одномерной. В результате появляется возможность аналитически описать локализацию возбуждений вблизи поверхности солитонными решениями НУШ, форма которых зависит от знака параметра нелинейности, а амплитуда и частота определяются характеристиками среды и поверхности как плоского дефекта.

1. Формулировка математической модели

Рассмотрим ангармонический полубесконечный кристалл в дальнейшем который будем называть нелинейной средой. Плоская поверхность кристалла лежит в плоскости yOz и проходит через начало координат перпендикулярно оси Ox. Кристалл занимает полупространство в области $x > 0$.

Будем предполагать, что возмущение параметров кристалла, создаваемое его поверхностью как плоским дефектом, сосредоточено на расстояниях, существенно меньших размеров изучаемых возбуждений, и поэтому считается локальным. Будем рассматривать процессы локализации возбуждений вблизи поверхности на основе НУШ (принято $\hbar$=1):

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\Delta\psi-\gamma|\psi|^2\psi\,, \tag{1}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трехмерный оператор Лапласа, m – эффективная масса возбуждений, γ – параметр нелинейности среды (может иметь различные знаки), характеризующий ангармонизм взаимодействия элементарных возбуждений в кристалле.

Если считать, что возбуждение в форме волны свободно может распространяться вдоль поверхности, то задача нахождения стационарных состояний с энергией E сводится к одномерной с помощью подстановки в НУШ

$$\psi(x,y,z,t)=u(x)\exp(k_y y+k_z z-iEt)\,.$$

Поскольку нас будут интересовать стационарные колебательные состояния, то удобно ввести обозначения: $\omega^2 = E$ – квадрат частоты колебаний, $s^2 = 1/2m$ – скорость распространения возбуждения. В результате НУШ (1) становится одномерным и принимает вид:

$$s^2 u''(x) + (\omega^2 - \omega_0^2)u(x) + \gamma|u(x)|^2 u(x) = 0, \tag{2}$$

где $\omega_0^2 = (k_y^2 + k_z^2)s^2$ – значение уровня дна энергетической зоны в сечении изоэнергетической поверхности.

Поскольку НУШ (2) рассматривается на полуоси $x > 0$, то для определения поверхностных стационарных состояний следует задать граничные условия, которые целесообразно выбрать в виде:

$$u(+0) = u_0; \tag{3}$$

$$u'(+0) = Q, \tag{4}$$

где параметры u_0 и Q описывают возмущение характеристик кристалла вблизи поверхности. В частности, они характеризуют изменение массы атомов поверхностного слоя и силового взаимодействия между атомами поверхностного и приповерхностного слоев. В силу локальности такого возмущения характеристик кристалла вблизи поверхности данные величины можно считать постоянными.

Таким образом, математическая формулировка нахождения стационарных колебательных состояний в рамках предложенной модели сводится к решению краевой задачи на полуоси для НУШ (2) с граничными условиями (3), (4). Искомое решение данной краевой задачи должно быть ограничено: $|u(x)| < const \ \forall \ x \in (0; \infty)$.

В линейном бесконечном одномерном кристалле без дефектов распространяются свободные волны с квадратичным законом дисперсии. В ангармоническом кристалле без дефектов могут распространяться локализованные возбуждения – солитоны, и нелинейные волны, описываемые периодическими решениями НУШ, которые выражаются через эллиптические функции, называемые кноидальными волнами. В зависимости от знака параметра нелинейности существуют различные типы решений. В данной работе рассматриваются только локализованные состояния НУШ.

2. Поверхностные состояния в кристалле с отрицательным ангармонизмом

Сначала рассмотрим случай отрицательного ангармонизма, когда $\gamma < 0$. Для удобства обозначим параметр нелинейности $g = -\gamma > 0$. В рассматриваемой модели существует несколько типов локализованных колебательных состояний в различных частотных диапазонах.

2.1. Поверхностное состояние первого типа

В области частот $\omega > \omega_0$ уравнение (2), имеет решение вида:

$$u(x) = A_t \operatorname{th} q_t (x - x_0), \tag{5}$$

параметры которого получаются после подстановки (5) в уравнение (2). Волновое число имеет вид:

$$q_t^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)/2s^2, \tag{6}$$

а амплитуда решения (5):

$$A_t^2 = 2s^2 q_t^2 / g. \tag{7}$$

Такое решение справедливо и ограничено всюду на всей числовой оси при $-\infty < x < \infty$ и описывает свободно распространяющееся возбуждение в форме ступени. Для такого случая бесконечного кристалла частота ω и положение «центра» возбуждения x_0 являются свободными параметрами. Если $A_t>0$, то решение (5) называют кинком, а если $A_t<0$, то – антикинком. Именно антикинк удовлетворяет требованию $|u| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Для случая полуограниченного кристалла функция (5) является решением уравнения (2) на полуоси $x > 0$, но ее параметры теперь должны определяться из граничных условий (3) и (4). Волновое число и амплитуда определяются такими же выражениями (6) и (7).

Подстановка (5) в граничные условия (3) и (4) позволяет получить в явном виде частоту колебаний данного стационарного состояния:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_b^2, \tag{8}$$

где $\omega_b^2 = \sqrt{g}(Qs\sqrt{2} + u_0^2\sqrt{g})$, а также выражение, определяющее параметр x_0:

$$x_0 = -\frac{s\sqrt{2}}{\omega_b}\,\mathrm{Arth}\left(\sqrt{\frac{g}{s}}\frac{u_0}{\omega_b}\right). \tag{9}$$

Подстановка (8) в (6) и (7) позволяет выразить волновое число и амплитуду через параметры полуограниченного кристалла:

$$q_t^2 = \omega_b^2 / 2s^2, \tag{10}$$

$$A_t^2 = \omega_b^2 / g. \tag{11}$$

Из (8) и (9) следует, что поверхностное состояние рассматриваемого вида, которое описывается функцией (5), существует при $Q > 0$.

Из (9) следует, что при $u_0 < 0$ положение центра возбуждения $x_0 > 0$, то есть будет находиться в области, занимаемой полуограниченным кристаллом. В противоположной ситуации при $u_0 > 0$, приводящей к $x_0 < 0$, решение (5) будет удовлетворять требованию исчезновения возбуждения при удалении от поверхности кристалла на бесконечности.

Для ненагруженной, то есть свободной от примесей поверхности, параметр $u_0 = 0$, тогда из (9) следует, что $x_0 = 0$. В этом случае из (8) получается частота локализованного вблизи свободной поверхности состояния:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + Qs(2g)^{1/2}. \tag{12}$$

При этом волновое число и амплитуда выражаются через характеристики среды и дефекта и примут вид:

$$q_t^2 = (g/2)^{1/2} Q / s, \tag{13}$$

$$A_t^2 = sQ(2/g)^{1/2}. \tag{14}$$

Таким образом, решение вида (5), удовлетворяющее граничным условиям (3) и (4), является поверхностным состоянием с полностью определяемыми через характеристики кристалла параметрами.

2.2. Поверхностное состояние второго типа

В области частот $\omega < \omega_0$ уравнение (2) имеет решение вида:

$$u(x) = A_s / \mathrm{sh}\, q(x - x_0), \tag{15}$$

Параметры решения (15) имеют вид:

$$q^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)/s^2, \tag{16}$$

$$A_s^2 = 2s^2 q^2 / g. \tag{17}$$

Для бесконечного кристалла решение (15) будет всюду ограничено при выполнении требования: $x_0 \neq 0$. Как и для решения (5) на всей числовой оси, частота ω и положение «центра» возбуждения x_0 являются свободными параметрами решения (15). В силу такого требования обычно при построении физических моделей в безграничных кристаллах решение вида (15) не используется. Однако оно находит применение для описания эффектов локализации возбуждений вблизи дефектов [15].

В случае полубесконечного кристалла для ограниченности решения (15) должно выполняться требование: $x_0 < 0$. Тогда решение (15) ограничено на полуоси $x > 0$ и удовлетворяет условию на бесконечности: $|u| \to 0$ при $x \to +\infty$.

Подстановка (15) в граничные условия (3) и (4) приводит к соотношениям:

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2(u_0^2 g/2+\omega_0^2-\omega^2)^{1/2}=-u_0^3 Qs(g/2)^2, \tag{18}$$

$$\mathrm{sh}qx_0=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^{1/2}}{u_0}\left(\frac{2}{g}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Выражение (18) представляет собой дисперсионное соотношение, определяющее частоту поверхностных колебательных состояний с функцией вида (15), а выражение (19) определяет параметр x_0.

В предельном случае малых значений $qx_0 \ll 1$ из (19) можно получить параметр x_0 в явном виде: $x_0=(2/g)^{1/2}s/u_0$. Поверхностное состояние данного типа реализуется при $u_0<0$.

Таким образом, решение вида (15), удовлетворяющее граничным условиям (3) и (4), является поверхностным состоянием с полностью определяемыми через характеристики кристалла параметрами в отличие от свободно распространяющих возбуждений в бесконечном кристалле.

3. Поверхностные состояния в кристалле с положительным ангармонизмом

Рассмотрим теперь случай положительного ангармонизма, когда $\gamma>0$. Для такого знака параметра нелинейности НУШ (2) имеет решение солитонного типа в диапазоне частот $\omega<\omega_0$:

$$u(x)=A/\mathrm{ch}q(x-x_0). \tag{20}$$

Волновое число q в (20) определяется выражением (16), а амплитуда имеет вид:

$$A^2=2s^2q^2/\gamma. \tag{21}$$

Решение (20) без наложения дополнительных требований всюду ограничено и удовлетворяет условию на бесконечности: $|u|\to 0$ при $x\to\infty$.

Для случая полуограниченного кристалла функция (20) является решением уравнения (2) на полуоси $x>0$, но ее параметры теперь должны определяться из граничных условий (3) и (4).

Подстановка (20) в граничные условия (3) и (4) приводит к соотношениям:

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2(\omega_0^2-\omega^2-u_0^2\gamma/2)^{1/2}=u_0^3 Qs(\gamma/2)^2, \tag{22}$$

$$\mathrm{ch}qx_0=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^{1/2}}{u_0}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Выражение (22) представляет собой дисперсионное соотношение, определяющее частоту поверхностных колебательных состояний с функцией вида (20), а выражение (23) определяет параметр x_0.

Из (22) следует, что максимальная частота такого колебательного состояния ниже значения ω_0, и она определяется выражением $\omega_{max}^2=\omega_0^2-u_0^2\gamma/2$. Другими словами, локализованные поверхностные состояния в среде с положительной нелинейностью существуют в диапазоне частот $\omega<\omega_{max}$. Получается, что в полуограниченном кристалле допустимый диапазон существования стационарных состояний НУШ с положительной нелинейностью ограничивается более низкой частотой, чем в бесконечном кристалле.

В предельном случае малых значений $qx_0 \ll 1$ из (23) вытекает, что частота поверхностного колебательного состояния (20) приближается к наибольшему возможному значению $\omega=\omega_{max}$.

Заключение

На основе модели полуограниченного ангармонического кристалла, возбуждения в котором описываются НУШ, рассмотрены вопросы существования различных видов стационарных локализованных вдоль поверхности состояний в широком интервале частот. Рассмотрены случаи как положительной, так и отрицательной нелинейности сред.

Математическая формулировка модели представляет собой краевую задачу для НУШ на полуоси. Получены решения сформулированной краевой задачи, описывающие локализацию возбуждений вблизи поверхности.

Параметры модели можно разделить на две группы. Первая – это параметры, характеризующие свойства среды, в которой распространяется возбуждение. К ним относятся скорость распространения возбуждения s, параметр нелинейности γ, граничная частота ω_0. Вторая группа – это характеристики поверхности как плоского дефекта, описывающие изменение вблизи поверхности таких свойств кристаллической решетки как массы атомов поверхностного слоя u_0 и константы силового взаимодействия между атомами поверхностного и приповерхностного слоев Q.

В случае бесконечного кристалла без дефектов в нелинейных средах, возбуждения в которых описываются НУШ, могут распространяться свободные солитоны, форма которых определяется знаком нелинейности и частотой. Такие солитоны являются двухпараметрическими в том смысле, что соответствующее решение НУШ содержит два свободных параметра, как правило, в качестве которых выступают частота ω и положение максимума x_0. Остальные параметры солитоны выражаются через них, а также через характеристики среды, то есть параметры первой группы. Если же рассматривать полуограниченный кристалл, то за счет наличия поверхности как плоского дефекта параметры поверхностных состояний будут определяться полностью все через параметры первой и второй группы. Другими словами, поверхностные состояния описываются солитонными решениями НУШ, не имеющими свободных параметров.

Показано, что в зависимости от частоты в среде с отрицательным ангармонизмом могут существовать два вида стационарных колебательных поверхностных состояний, а в среде с положительным ангармонизмом – одного вида. При частотах, ниже граничного значения ω_0 могут существовать поверхностные колебательные состояния как в средах с отрицательным ангармонизмом, так и в средах с положительным ангармонизмом. При частотах, выше граничного значения ω_0 поверхностные колебательные состояния могут существовать только в средах с отрицательным ангармонизмом.

В среде с положительным ангармонизмом меняется диапазон существования стационарных состояний НУШ. В полубесконечном кристалле он ограничивается сверху более низкой частотой, чем в бесконечном кристалле.

Полученные в данной работе теоретические результаты дополняют исследования поверхностных упругих нелинейных волн, распространяющихся вблизи свободной поверхности [3], а также поверхностных магнитных поляритонов в ферромагнитной полуограниченной среде [27], поскольку в них приведены решения НУШ на полуоси одного типа только для самофокусирующей среды с кубической нелинейностью для нулевых граничных условий на поверхности.

Список литературы
References

1. Павло В.И., Солодов И.Ю. 1977. Нелинейные свойства поверхностных волн в твердых телах. ФТТ, 19, 10: 2948-2954.

Pavlo V.I., Solodov I.Ju. 1977. Nelinejnye svojstva poverhnostnyh voln v tverdyh telah. FTT, 19, 10: 2948-2954

2. Михалаке Д., Назмитдинов Р.Г., Федянин В.К. 1989. Нелинейные оптические волны в слоистых структурах. Физика элементарных частиц и атомного ядра, 20, 1: 198-253.

Mihalake D., Nazmitdinov R.G., Fedjanin V.K. 1989. Nelinejnye opticheskie volny v sloistyh strukturah. Fizika jelementarnyh chastic i atomnogo jadra, 20, 1: 198-253.

3. Горенцвейг В.И., Кившарь Ю.С., Косевич А.М., Сыркин Е.С. 1990. Самоиндуцированные нелинейные сдвиговые поверхностные акускические волны в кристаллах. ФНТ, 16, 11: 1472-1482.

Gorencvejg V.I., Kivshar' Ju.S., Kosevich A.M., Syrkin E.S. 1990. Samoinducirovannye nelinejnye sdvigovye poverhnostnye akuskticheskie volny v kristallah. FNT, 16, 11: 1472-1482

4. Mayer A.P. 1995. Surface acoustic waves in nonlinear elastic media. Physics Reports, 256, 4-5: 237-366.

5. Ковалев А.С., Сыркин Е.С., Можен Ж.А. 2002. Многомерные и поверхностные солитоны в нелинейной упругой среде. ФНТ, 28, 6: 635–647.

Kovalev A.S., Syrkin E.S., Mozhen Zh.A. 2002. Mnogomernye i poverhnostnye solitony v nelinejnoj uprugoj srede. FNT, 28, 6: 635–647

6. Ковалев А.С., Майер А.П., Соколова Е.С., Экль К. 2002. Солитоны в упругих пластинах. ФНТ, 28, 10: 1092–1102.

Kovalev A.S., Majer A.P., Sokolova E.S., Jekl' K. 2002. Solitony v uprugih plastinah. FNT, 28, 10: 1092–1102

7. Федоров Л.В., Ляхомская К.Д. 1997. Нелинейные поверхностные волны при учете эффекта насыщения. Письма в ЖЭТФ, 23, 23: 36-39.

Fedorov L.V., Ljahomskaja K.D. 1997. Nelinejnye poverhnostnye volny pri uchete jeffekta nasyshhenija. Pis'ma v ZhJeTF, 23, 23: 36-39

8. Коровай О.В., Хаджи П.И. 2003.Нелинейные поверхностные волны в симметричной трехслойной структуре, обусловленные генерацией экситонов и биэкситонов в полупроводниках. ФТТ,45, 2: 364-368.

Korovaj O.V., Hadzhi P.I. 2003.Nelinejnye poverhnostnye volny v simmetrichnoj trehslojnoj strukture, obuslovlennye generaciej jeksitonov i bijeksitonov v poluprovodnikah. FTT,45, 2: 364-368

9. Наянов В.И. 1986. Поверхностные акустические кноидальные волны и солитоны в структуре LiNbO3-пленка SiO. Письма в ЖЭТФ, 44: 245-249.

Najanov V.I. 1986. Poverhnostnye akusticheskie knoidal'nye volny i solitony v strukture LiNbO3-plenka SiO. Pis'ma v ZhJeTF, 44: 245-249

10. Усиевич Б. А., Нурлигареев Д.Х., Сычугов В.А., Ивлева Л.И., Лыков П.А., Богодаев Н.В. 2010. Нелинейные поверхностные волны на границе фоторефрактивного кристалла. Квантовая электроника, 40, 5: 437-440.

Usievich B. A., Nurligareev D.H., Sychugov V.A., Ivleva L.I., Lykov P.A., Bogodaev N.V. 2010. Nelinejnye poverhnostnye volny na granice fotorefraktivnogo kristalla. Kvantovaja jelektronika, 40, 5: 437-440

11.Kivshar U.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. 1990. Radiative effects in the theory of beam propagation at nonlinear interfaces. Phys. Rev. A. :41: 3: 1677-1688.

12.Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Кузьменко Ю.В. 1985. Возбуждение нелинейных поверхностных волн гауссовыми световыми пучками. ЖЭТФ, 88, 1: 107-115.

Ahmediev N.N., Korneev V.I., Kuz'menko Ju.V. 1985. Vozbuzhdenie nelinejnyh poverhnostnyh voln gaussovymi svetovymi puchkami. ZhJeTF, 88, 1: 107-115

13.Abdullaev F.Kh., Baizakov B.B., Umarov B.A. 1998. Resonance phenomena in interaction of a spatial soliton with the modulated interface of two nonlinear media. Optics Communications, 156: 341–346.

14.Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 2000. Локализация нелинейных волн в слоистых средах. ФНТ, 26, 8: 799−809.

Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 2000. Lokalizacija nelinejnyh voln v sloistyh sredah FNT, 26, 8: 799−809

15.Богдан М.М., Герасимчук И.В., Ковалев А.С. 1997. Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами. ФНТ, 23, 2: 197-207.

Bogdan M.M., Gerasimchuk I.V., Kovalev A.S. 1997. Dinamika i ustojchivost' lokalizovannyh mod v nelinejnyh sredah s tochechnymi defektami. FNT, 23, 2: 197-207.

16.Косевич А.М., Савотченко С.Е. 1999. Особенности динамики одномерных дискретных систем с взаимодействием не только ближайших соседей и роль высшей дисперсии в солитонной динамике. ФНТ, 25, 7: 737-747.

Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 1999. Osobennosti dinamiki odnomernyh diskretnyh sistem s vzaimodejstviem ne tol'ko blizhajshih sosedej i rol' vysshej dispersii v solitonnoj dinamike. FNT, 25, 7: 737-747.

17.Kosevich A.M., Savotchenko S.E. 2000.Forced vibrations and resonance wave scattering on impurity in 1D discrete lattice with nearest- and next-nearest neighbors interaction. Physica B, 284-288: 1551-1552.

18. Савотченко С.Е. 2000. Рассеяние волн дефектами в средах с пространственной дисперсией и безызлучательные динамические солитоны. Известия высших учебных заведений. Физика, 43, 10: 876-881.

Savotchenko S.E. 2000. Rassejanie voln defektami v sredah s prostranstvennoj dispersiej i bezyzluchatel'nye dinamicheskie solitony. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 43, 10: 876-881

19.Савотченко С.Е. 2004. Локализация волн вблизи интерфейса нелинейных сред с пространственной дисперсией. Известия высших учебных заведений. Физика, 47, 5: 79-84.

Savotchenko S.E. 2004. Lokalizacija voln vblizi interfejsa nelinejnyh sred s prostranstvennoj dispersiej. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika, 47, 5: 79-84.

20. Krasilnikov V.V., Savotchenko S.E. 2004. Peculiarities of solito n motion in molecular systems with high dispersion. Phys. Stat. Sol. (c), 1, 11: 2757-2760.

21. Савотченко С.Е. 2005. Нелинейные коллективные возбуждения в квазиодномерных структурах при наличии пространственной дисперсии. Известия вузов. Физика, 48, 9: 24-27.

Savotchenko S.E. 2005. Nelinejnye kollektivnye vozbuzhdenija v kvaziodnomernyh strukturah pri nalichii prostranstvennoj dispersii. Izvestija vuzov. Fizika, 48, 9: 24-27.

22. Савотченко С.Е. 2006. Особенности нелинейной динамики квазичастиц в молекулярных структурах с водородными связями при наличии взаимодействия не только ближайших соседей. Известия вузов. Физика, 49, 2: 52-56.

Savotchenko S.E. 2006. Osobennosti nelinejnoj dinamiki kvazichastic v molekuljarnyh strukturah s vodorodnymi svjazjami pri nalichii vzaimodejstvija ne tol'ko blizhajshih sosedej. Izvestija vuzov. Fizika, 49, 2: 52-56.

23. Красильников В.В., Савотченко С.Е. 2015. Особенности рассеяния частиц точечным дефектом с внутренней структурой. Известия тульского государственного университета. Естественные науки, 4: 178-183.

Krasil'nikov V.V., Savotchenko S.E. 2015. Osobennosti rassejanija chastic tochechnym defektom s vnutrennej strukturoj. Izvestija tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki, 4: 178-183.

24. Савотченко С.Е. 2016. Особенности взаимодействия волны с точечным дефектом в среде с пространственной дисперсией. Известия Воронежского государственного педагогического университета, 1(270): 196-199.

Savotchenko S.E. 2016. Osobennosti vzaimodejstvija volny s tochechnym defektom v srede s prostranstvennoj dispersiej. Izvestija Voronezhskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 1(270): 196-199.

25. Савотченко С.Е. 2016. Особенности локализации нелинейных возбуждений вблизи дефекта с внутренней структурой. Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 4: 51-59.

Savotchenko S.E2016.. Osobennosti lokalizacii nelinejnyh vozbuzhdenij vblizi defekta s vnutrennej strukturoj. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Fizika. Matematika, 4: 51-59.

26. Савотченко С.Е. 2017. Взаимодействие локализованных состояний вблизи границы раздела нелинейных сред. Конденсированные среды и межфазные границы, 2: 291-295.

Savotchenko, S.E. 2017. Vzaimodejstvie lokalizovannyh sostojanij vblizi granicy razdela nelinejnyh sred. Kondensirovannye sredy i mezhfaznye granicy, 2: 291-295.

27. Дикштейн И.Е. Никитов Д.С., Никитов С.А. 1998. Нелинейные самолокализованные поверхностные магнитные поляритоны в ферромагнитной среде. ФТТ, 40, 10: 1885-1889.

Dikshtejn I.E. Nikitov D.S., Nikitov S.A. 1998. Nelinejnye samolokalizovannye poverhnostnye magnitnye poljaritony v ferromagnitnoj srede. FTT, 40, 10: 1885-1889.