УДК 517.987
DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-80-87

РАЗВИТИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕНЕНИЯ АГРЕГАТНЫХ СОСТОЯНИЙ СРЕД

DEVELOPMENT OF THE STATISTICAL THEORY OF AGGREGATE STATES CHANGE IN MEDIA

Л.П. Данилова
L.P. Danilova

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия,
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail: virch@bsu.edu.ru

Аннотация
Дается исторический обзор развития раздела равновесной статистической механики, посвященного исследованию термодинамических фазовых переходов в средах, связанных с изменением их агрегатных состояний. Формулируются нерешенные проблемы этой теории.

Abstract
Historical review is proposed which is devoted to the development of spacial theme of equilibrium statistical mechanics. Thermodynamic phase transitions in media which is connected with change in their aggregate states are under consideration. Unresolved problems of this theory are formulated.

Ключевые слова: агрегатное состояние, фазовый переход, критическая точка, тройная точка, решеточный газ, конденсация, кристаллизация.
Keywords: aggregation states, phase transition, critical point, triple point, lattice gas, condensation, crystallization.

Введение

Настоящая работа посвящена обзору развития статистической теории фазовых превращений в средах, которые представляют собой изменения их агрегатных состояний. Это предполагает, что основой для такого изучения являются методы равновесной статистической механики. Равновесная статистическая механика, как наиболее глубокий и последовательный подход к изучению термодинамически равновесных состояний сред на микроскопическом уровне их описания, возникший в развитие основополагающей работе Дж.К. Максвелла [1], окончательно оформился в идейном отношении к началу 20-го столетия [2]. Согласно канонам статистической механики каждая система, состоящая из большого числа одинаковых частиц, описывается полностью заданием своего фазового пространства Ω и гамильтонина H системы, определяющего энергию системы для каждой конфигурации из Ω . При этом общая задача равновесной статистической механики состоит в том, как по заданному фазовому пространству системы многих частиц и заданному гамильтониану H вычислить термодинамические функции системы, включая ее уравнение состояния и связанные с ним фазовые диаграммы, а также любые экспериментально проявляющиеся статистические характеристики.

Однако, несмотря на имеющиеся большие успехи статистической физики в теоретическом описании физических сред как находящихся в газообразном состоянии, так и конденсированных, продолжает оставаться нерешенной, хотя бы в первом приближении, задача построения, на основе представлений статистической механики, конструктивного аналитического подхода к изучению происходящих в конденсированных средах различного рода фазовых переходов. Эта задача оказалась крайне сложной с математической точки зрения. Для того чтобы пояснить, что мы понимаем в контексте этого утверждения, обратимся к истории научного направления, которое возникло в связи с решением указанной проблемы.

Уже сразу после утверждения общих концепций статистической механики, в 20-х годах прошлого столетия появились сомнения в применимости принципов статистической механики для описания фазовых переходов. Не в последнюю очередь это было связано с тем резонансом, который был вызван у физиков-теоретиков появлением работы Э.Изинга [3]. В своей работе Изинг попытался описать на языке статистической механики один из простейших фазовых переходов: появление ферромагнитного упорядочения при достаточно низких температурах в ионных кристаллах, у которых ионы, составляющие кристаллическую решетку, обладают собственным магнитным моментом, и взаимодействие между которыми является притягивающим. Он сконструировал очень простой гамильтониан взаимодействия ионов, предположив, что их взаимодействие обладает очень сильной одноосной анизотропией. Оказалось, что статистическая сумма системы ионов кристаллической решетки с таким гамильтонианом взаимодействия вычисляется в явном виде в терминах элементарных функций в том случае, когда кристалл является «одномерным», т.е. ионы решетки выстроены в цепочку. Оказалось, что намагниченность такой системы ионов в нулевом магнитном поле равна нулю при любой ненулевой температуре, несмотря на то, что при нулевой температуре имеется вырождение состояния системы с минимальной энергией.

Несмотря на то, что система допускающая такое простое с математической точки зрения исследование не является физической, полученный Изингом результат оказал шокирующее воздействие на современников. Дело в том, что переход в ферромагнитное состояние с феноменологической точки зрения является фазовым переходом 2-го рода, и поэтому по отношению к нему не справедливы рассуждения об отсутствии разделения фаз в одномерном случае, то есть с точки зрения формализма статистической механики заранее не очевидно, почему в одномерном случае невозможно проявление фазового перехода второго рода. В частности, почему в модели Изинга не может возникнуть неравная нулю намагниченность в отсутствие внешнего магнитного поля. Кроме того, для рассмотренной Изингом системы большого числа взаимодействующих частиц, в полной мере, применимы качественные рассуждения работы П.Вейсса, где он ввел понятие «среднего поля», на котором была основана его теория ферромагнетизма [4]. Теория Вейсса была уже достаточно известной к моменту появления работы Изинга. Создавшееся положение усугубилось появлением работы Г.Бете [5]. Он показал, что квантовая система магнитных моментов ионов, аналогичная системе Изинга, с отталкивающим взаимодействием между ними, которая, по замыслу автора, должна описывать появление в ней антиферромагнитного упорядочения, не только не обладает таким упорядочением при любой ненулевой температуре, но такое упорядочение отсутствует также в ее состоянии с минимальной энергией при температуре равной нулю . Создавшееся положение в теории фазовых переходов продержалось до появления работы Р.Пайерлса [6], где он на качественном уровне объяснил посредством сравнения величин энтропии одномерных и двумерных конфигураций магнитных моментов, которые приводят к появлению ферромагнитного упорядочения, что отсутствие ферромагнитного упорядочения в работе Изинга связано именно с тем, что его система была одномерной.

Таким образом, на повестку дня встал вопрос о создании математически корректного аналитического метода расчета характеристик модели Изинга, который бы, с одной стороны, подтвердил рассуждения Пайерлса, а, с другой стороны, позволил бы анализировать простейшие системы статистической механики, аналогичные модели Изинга. В 1938г. появилась работа Дж.Г. Кирквуда [7], в которой он предложил приближенный метод расчета характеристик системы статистической механики, описывающий структурный фазовый переход в бинарных сплавах. Система статистической механики на кристаллической решетке, которую он анализировал, была аналогична системе Изинга. Она интересна тем, что примененный Кирквудом метод анализа показал, каким образом в рамках этой системы статистической механики зависимость намагниченности от температуры, полученная Вейссом на основе рассуждений о среднем поле намагниченности, может рассматриваться естественным приближением к точной зависимости. Однако, работа Кирквуда не вызвала большого резонанса среди физиков, так как его метод был в равной степени применим и к одномерным системам, а для таких систем она также приводила к результату, который указывал на наличие у них фазовых переходов. Однако, в последующем, идея построения приближения посредством выделения среднего поля оказалась доминирующей при анализе конкретных систем статистической механики, имеющих прикладное значение. Предложенный Кирквудом метод является аналитически прозрачным и он сводит анализ фазового перехода в системе большого числа частиц к вполне осязаемой задаче математической физики, минуя компьютерное моделирование самой системы. Это дает эталон решения задач теории фазовых переходов. Оно должно состоять в построении и математическом обосновании аналитических алгоритмов, аналогичных приближению среднего поля, которые позволяют давать обоснованные ответы на правильно поставленные с физической точки зрения вопросы относительно фазовых переходов, происходящих в конкретных физических системах.

Важной исторической вехой в развитии теории фазовых переходов является работа Л.Онсагера [8], в которой ему удалось точно вычислить, на основе довольно изощренной алгебраической техники, точное выражение свободной энергии для двумерного варианта модели Изинга с нулевым магнитным полем. Оказалось, что в аналитической функции, полученной Онсагером в качестве решения, содержится особенность у зависимости свободной энергии от обратной температуры. Вторая производная по T свободной энергии имела точку разрыва. Это еще не означало, что эта особенность является критической точкой фазового перехода 2-го рода, но показывало, что модели статистической механики могут, в принципе, приводить при т.н. *термодинамическом предельном переходе* к неаналитической зависимости математических ожиданий, вычисляемых на основе присущих им распределений вероятностей, от параметров моделей, несмотря на то, что сами распределения вероятностей зависят от этих параметров аналитически. Для того чтобы показать, что точке неаналитичности, действительно, соответствует фазовый переход, нужно было вычислить намагниченность в нулевом магнитном поле. Эту задачу Л.Онсагер также, по-видимому, решил, но не успел опубликовать результат, а доложил его на конференции по фазовым переходам. Полное решение задачи представил Янг Чжэньнин [9], и полученная им формула совпала с формулой, доложенной Онсагером. Наконец, в завершение этого краткого исторического обзора о развитии теоретических представлений о фазовых переходах на основе статистической механики в контексте создания и анализа модели Изинга, укажем, что для трехмерного варианта модели, несмотря на то, что ее решение не удается выразить аналитически с применением стандартных специальных функций математической физики, Р.Л. Добрушину удалось дать математически корректное доказательство существования у нее фазового перехода [10, 11], использовав для этого построения, аналогичные тем, которые были предложены в [6].

2. Развитие статистической механики изменения агрегатных состояний.

Обратимся теперь к обзору развития теории изменения агрегатных состояний в средах, состоящих из одноатомных молекул, основанной на представления статистической механики.

Даже при наложении условия одноатомности молекул соответствующие системы статистической механики оказываются гораздо более сложными по сравнению с решеточными системами, к которым, в частности, относится модель Изинга. Именно поэтому мы, прежде чем обратиться к анализу состояния статистической теории фазовых превращений в таких системах, привели выше краткий исторический обзор становления теоретической концепции описания и исследования термодинамических фазовых переходов на основе статистической механики.

Изучение термодинамики системы большого числа взаимодействующих между собой молекул и, в частности, перехода «газ – жидкость» в таких системах началось с диссертации Ван-дер-Ваальса [12]. Ввиду того, что к моменту возникновения этой работы общая концепция статистической механики еще полностью не оформилась, рассуждения Ван-дер-Ваальса, хотя и использовали микроскопические молекулярно-кинетические представления, нельзя признать полностью статистическими. Тем не менее, мы упоминаем здесь эту работу, так как результат полученный в ней, оказался, с одной стороны, хорошо описывающим экспериментальные данные, а, с другой стороны, есть основания ожидать, что он также является осмысленным в контексте последовательных статистико-механических построений.

После формирования общих принципов статистической механики [2] и развития на их основе общего математического формализма исследования статистических систем одноатомных молекул [13], а также после приобретения некоторого опыта описания в рамках статистической механики фазовых переходов в более простых с математической точки зрения системах теории магнетизма, о которых речь шла выше, возник вопрос о построении статистической теории фазовых переходов, описывающих изменения агрегатных состояний. Для этого потребовалось выяснить природу математического механизма, посредством которого появлялось неаналитические зависимости термодинамических функций от температуры, соответствующие фазовым переходам в решетчатых магнитных системах.

Ответ на указанный вопрос был дан в работах [14,15]. В первой работе была развита общая концепция, каким образом могут проявиться неаналитические зависимости термодинамических функций от температуры. Во второй работе (см. также [16]) была доказана теорема о расположении нулей статистических сумм решетчатых систем со взаимодействием ферромагнитного типа. Оказалось, что нули статистических сумм, рассматриваемые как аналитические суммы от специального параметра z, которые в этом случае являются полиномами от этого параметра, располагаются на единичной окружности в комплексной плоскости z. С увеличением объема системы число нулей на единичной окружности возрастает неограниченно, так как возрастает степень полинома. Поэтому в термодинамическом пределе, нули статистической суммы начинают плотно заполняют определенную дугу единичной окружности, которая не пересекается с положительной полуосью изменения параметра z. При изменении температуры происходит изменение дуги, на которой расположены нули, такое, что при переходе температуры при ее понижении через некоторую величину T_c происходит смыкание концов дуги друг с другом в точке $z=1$. Эта точка является предельной для множества всех нулей. В результате, комплексная плоскость изменения параметра z расщепляется на две несвязанных друг с другом области, в которых аналитические зависимости термодинамических функций, выражающиеся через логарифмические производные от статистической суммы, становятся совершенно различными. Это обстоятельство как раз и указывает на то, что описанное поведение нулей статистической суммы обуславливает появление у исследуемых решетчатых систем фазового перехода.

На основе проделанного математического исследования Ли и Янг построили общую математически обоснованную теорию конденсации т.н. «решетчатого газа» той системы статистической механики, которая, с одной стороны, оказывается более простой в математическом отношении, чем исходная статистическая система одноатомных молекул, допускающая непрерывное пространственное расположение молекул, а, с другой стороны, она «очень похожа» на решетчатые системы теории магнетизма. Поэтому многие результаты, полученные для магнитных систем, допускают свою переформулировку и интерпретацию для этой системы. Результаты, а также методы, использованные при их получении, обусловили то обстоятельство, что в дальнейшем развитие теории конденсации происходило на основе модели решеточного газа. Настоящее исследование также, в значительной степени, основано на использовании этой модели. Мы называем эту модель решеточным приближением к системе статистической механики с непрерывным пространственным расположением молекул.

Важные в идейном отношении результаты, которые можно отнести к обсуждаемому направлению исследований, были получены в работах [17-27]. В работе [18] было доказано наличие критической точки в общих двумерных моделях решеточного газа, у которых доминирует притягивающая составляющая взаимодействия, а в работе [19] этот результат был распространен на трехмерный случай. В работах [20, 21] при тех же ограничениях на потенциал взаимодействия было доказано наличие скачка плотности в уравнении состояния решеточного газа при температурах, меньших критической, то есть наличие фазового перехода 1-го рода. Наконец, в работах [17] и [23-26] было исследовано явление разделения фаз в решеточном газе при $T < T_c$, а работы [22] и [27] посвящены распространению результатов о существовании фазовых переходов в решеточном газе в случае потенциалов взаимодействия общего вида.

Заметим, что во всех цитированных работах, посвященных исследованию фазового перехода «газ-жидкость», несмотря на то, что наличие фазового перехода устанавливалось посредством нахождения подходящих математически точных оценок на значения термодинамических функций, не предлагалось никаких конструктивных методов для приближенного вычисления термодинамических функций с какой-либо контролируемой точностью области изменения интенсивных термодинамических параметров, где происходит фазовый переход и, в частности, не предлагалось методов расчета фазовых диаграмм. Более того, во всех указанных работах не затрагивался вопрос о наличии в исследуемых моделях фазового перехода, соответствующего переходу решеточного в «твердую фазу» и, в частности, в «кристаллическое состояние». Иными словами, не удавалось обнаружить в исследуемых моделях наличия трех различных фаз и связанную с этим т.н. *тройную точку*, которая присутствует на фазовых диаграммах, описывающих изменение агрегатных состояний (см., например, [28]). Что касается статистического описания фазового перехода в кристаллическое состояние, то в настоящее время разработан только подход на основе идеи о введении некоторого среднего кристаллического поля, идейно аналогичный теории Вейсса в теории магнетизма. В рамках такого подхода удается сформулировать нелинейное интегральное уравнение для одночастичной пространственной плотности распределения частиц, у которого имеются периодические решения ниже некоторой температуры, интерпретируемую как температуру кристаллизации (см, например, [29]). Неизвестно никаких работ об описании кристаллизации в рамках равновесной статистической механики, не использующих концепции среднего поля.

3. Аналитический подход к изучению изменений агрегатных состояний

В связи с описанной ситуацией в теории изменения агрегатных состояний в системах, состоящих из большого числа одноатомных молекул, является очень актуальным развитие количественной теории для описания таких фазовых переходов, которая бы позволяла производить приближенные вычисления термодинамических характеристик состояния среды с контролируемой, хотя бы в асимптотическом смысле, точностью. Для решения такой задачи необходимо указать такой параметр, что в предположении его малости, при разложении термодинамических функций по степеням этого параметра, исследуемые изменения агрегатных состояний в системе проявлялись бы уже в низших приближениях. Подсказкой к выбору такого параметра являются работы [30-32] и [34,35]. В серии статей [30-32] (перевод этих статей см. в книге [33]) авторы предложили вычисление термодинамических характеристик специальной одномерной системы статистической механики с непрерывным пространством расположения конфигураций молекул, у которой притягивающая область потенциала парного взаимодействия обладала большим радиусом взаимодействия так, что в конце вычислений этот радиус r_0 устремлялся к бесконечности. Эта процедура, надо полагать, соответствует приближению «среднего поля» в теории конденсации. В результате, оказалось, что в указанном пределе уравнение состояния приобретает вид уравнения Ван-дер-Ваальса с наличием горизонтального участка у зависимости давления от плотности, который соответствует фазовому переходу первого рода. Соответствующим образом ведут себя многочастичные функции распределения конфигураций молекул. Причем, горизонтальный участок (скачок плотности), подчинялся т.н. *правилу Максвелла.* В работах [34, 35] аналогичный технический прием был применен для исследования фазового переходов к статистической системе, описывающей термодинамику идеального ферромагнетика. И в этом случае в гамильтониан системы был введен радиус взаимодействия r_0, который предполагался большим параметром. В пределе $r_0 \to \infty$ в решении задачи с таким гамильтонианом приводило к уравнению состояния ферромагнетика, которое получается в теории Вейсса [4]. В обоих случаях исследуемый фазовый переход проявляется в нулевом приближении по параметру r_0^{-1}.

Описанное выше обстоятельство дает основание предположить, что последовательное построение членов степенных рядов по параметру r_0^{-1} должно приводить к требуемым приближенным значениям термодинамических характеристик, которые учитывают наличие фазового перехода. Неприятным обстоятельством является лишь то, что парные взаимодействия в реальных системах одноатомных молекул не обладают большим радиусом. В связи с этим мы предлагаем некоторое видоизменение при выборе малого параметра. За основу возьмем тот факт, что, в отличие от радиуса взаимодействия, зависящий от температуры корреляционный радиус $r_c(T)$ действительно становится большим в области значений температуры, где происходит фазовый переход, так, что в критической точке он возрастает неограниченно, и поэтому, для количественного описания фазовых переходов при построении степенных разложений для термодинамических характеристик предпочтительно использование отношения r_0 / r_c.

4. Замечание о статистической теории критического поведения

В конце этого обзора развития статистической теории изменения агрегатных состояний, укажем на то, что это направление не связано со статистической теорией критических явлений, в которой был достигнут определенный прогресс 80-е годы прошлого столетия. Эта теория основана на идее возникновения самоподобного поведения системы большого числа частиц вблизи критической точки. Математически эта идея реализуется в виде введения т.н. ренорм-преобразований системы. Для построения таких преобразований для описания пространственного самоподобия вводится конструкция Л.Каданова [36], а для построение преобразований в пространстве волновых векторов основано на конструкции К. Вильсона [37].

Считается, что алгоритм применения ренорм-преобразований выявляет вид асимптотического поведения термодинамических характеристик при стремлении интенсивных термодинамических параметров, описывающих состояние системы, к своим критическим значениям. На этом пути было получено множество результатов с точки зрения применения ренорм-преобразований к конкретным физическим системам. Однако, этот метод нуждается в серьезном обосновании с точки зрения статистической механики, что до настоящего времени не было проделано. Было замечено [38, 39], что совокупность реному-преобразований в обоих случаях образует полугруппу, аналогичную той, посредством которой вводятся т.н. *устойчивые законы* в теории одномерных вероятностных распределений [40]. В связи с этим Р. Добрушиным, для обоснования метода реном-преобразований, была предложена программа исследования [41] соответствующих распределений вероятностей (в $\mathbf{x}$ - и $\mathbf{k}$ -пространствах) в бесконечномерном случае, что соответствует системам статистической механики. Некоторое продвижение в реализации этой программы было сделано в работе [42]. Однако, вплоть до настоящего времени, существенного прогресса здесь не достигнуто.

Список литературы
References

1. Maxwell J.C. 1890. On the Dynamical Theory of Gases / Philosophical Transactions.-- 1866.-- CLVII. The Scientific papers of James Clerk Maxwell. V.2 / New York: Dover Publications, Inc.: 26-78.

2.Gibbs J.W. 1902. Elementary principles in statistical mechanics / New York: Scribner's Sons,207p.

3. Ising E. 1925. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Zeitschrift fur Physik, 31: 253-258.

4. Weiss P. 1907. L'hypothese du champ moleculaire et la propriete ferromagne. J. Phys. Theor. Appl, 6: 661-690.

5. H. Bethe. 1931. Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. Zeitschrift fur Physik, 71: 205–226.

6. Peierls R. 1936. On Ising's model of ferromagnetism. Proc. Camb.Phil.Soc, 32: 477-481.

7. Kirkwood J.G. 1938. Order and disorder in binary solid solutions. Journ.Chem.Phys., 6, №1: 70-75.

8. Onsager L. 1944. Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition. Phys. Rev., 65: 117-149.

9. Yang C.N. 1952. The Spontaneous Magnetization of a Two-Dimensional Ising Model. Phys. Rev. , 85: 808-816.

10. Dobrushin R.L. 1965. Existence of phase transition in two- and three dimensional Ising model. USSR Academy of Sciences, 160 (5): 1046-1048.

11. Dobrushin R.L. 1965. Existence of phase transition in two- and three dimensional Ising model. Probability theory and its applications, 10: 209-230.

12. Van der Waals J.D. 1873. Phys. D. Thesis, Univ. Leiden.

13. Mayer J.E., Goeppert-Mayer M. 1977. Statistical mechanics. New York: John Wiley \& Sons, Inc.

14. Yang C.N., Lee T.D. 1952. Statistical Theory of Equation of State and Phase Transitions. I. Theory of Condensation. Phys. Rev., 87: .404-409.

15. Yang C.N., Lee T.D. 1952. Statistical Theory of Equation of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. Phys. Rev., 87: 410-419.

16. Ruelle D. 1969. Statistical Mechanics. Rigorous Results. Ney York-Amsterdam: W.A.Benjamin, Inc..

17. Fisher M.E. 1965. Correlation Functions and the Coexistence of Phases. J. Math. Phys., 6: 1643-1653.

18. Ginibre J. Grossman A., Ruelle D. 1966. Condensation of Lattice Gases. Commun. Math. Phys., 3: 187-193.

19. Fisher M.E. 1967. The Theory of Condensation and the Critical Point. Physics, 3: 255-283.

20. Dobrushin R.L. 1967. Existence of phase transition in models of a lattice gas. Proc. V Berk. Symp. Mat. Stat. Prob., VII A: 73-87.

21. Berezin F.A., Sinai G.Ya. 1967. Existence of phase transition in lattice gas with attraction between particles. Moscow mathematical community, 17: 197-212.

22. Gallavotti G., Miracle-Sole S., Robinson D.W. 1967. Analiticity Properties of a Lattice Ga. Physics Letters, 25A: 493-494.

23. Minlos R.A., Sinai G.Ya. 1967. Phase decomposition at low temeperatures in some lattice gas models. USSR Academy of Sciences, 175, №2: 323-326.

24. Minlos R.A., Sinai G.Ya. 1967. Phase decomposition at low temeperatures in some lattice gas models I. Moscow mathematical community, 73, №2: P.375-448.

25. Minlos R.A., Sinai G.Ya. 1968. Phase decomposition at low temeperatures in some lattice gas models II // Moscow mathematical communit, 19: 113-178.
26. Minlos R.A., Sinai G.Ya. 1967. New results about phase transitions of 1-st order in lattice gas models with attraction between particles. Moscow mathematical community, 17: 213-242.
27. Dobrushin R.L. 1968. Gibbs' random fields of lattice systems with pair interacrtion. Functional analysis and its applications, 4: 31-43.
28. Stanley H.E. 1971. Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press.
29. Vlasov A.A. 1966. Statistical distribution functions, Moscow: Nauka, 356p.
30. Kac M., Uhlenbeck G.E., Hemmer P.C. 1963. On the van der Waals theory of the vapor-liquid equilibrium. I. Discussion of a onedimensional model. J.Math .Phys., 4.—2: 216-228.
31. Kac M., Uhlenbeck G.E., Hemmer P.C. 1963. On the van der Waals theory of the vapor-liquid equilibrium. II. Discussion of the distribution functions. J.Math .Phys., 4.—2: 229-247.
32. Kac M., Uhlenbeck G.E., Hemmer P.C. 1964. On the van der Waals theory of the vapor-liquid equilibrium. III. Discussion of the critical region. J.Math .Phys., 5.—1: 60-74.
33. Kac M. 1958. Probability and Related Topics in Physical Sciences. New York: Interscience Publishers, Inc.
34. Wax V.G., Larkin A.I., Pikin S.A. 1966. On the selfconsistent field method of phase rtransitions description. ZhETP, 51, 1(7): 361-375.
35. Wax V.G., Larkin A.I., Pikin S.A. 1967. Thermodynamics of ideal ferromagnetics. ZhETP, 53: 281.
36. Kadanoff L.P. 1966. Scaling laws for Ising models near Tc. Physics, 2, №6: 263-272.
37. Wilson K.G., Kogut J. 1974. The Renormalization Group and ε-Expansion. Physics Reports, 12(2): 75-199.
38. Yona-Lasinio G. 1974. The renormalization group: a probabilistic view. Inst. Fis. Univ. Padova.
39. Yona-Lasinio G. 1975. The renormalization group: a probabilistic view. Nuovo Cimento, 26 B, №1: 99-119.
40. Zolotariov V.M. 1983. One-dimensional stable distributions, Moscow: Nauka, 1983.
41. Dobrushin R.L. 1978. Automodelity and renormgroup of generalized randon fields. Many-dimensional random systems, Moscow: Nauka: 179-213.
42. Blekher P.M. 1978. ε-decomposition of automoldel random fields~// Many-dimensional random systems. Moscow: Nauka: 47-82.