



УДК 681.511.42

**КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ
ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ НАГРЕВАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ**

**QUASI-PERIODICITY IN A TEMPERATURE FIELD CONTROL SYSTEM
OF A HEATING UNIT**

**Ж.Т. Жусубалиев¹, В. Г. Рубанов², Ю. А. Гольцов², О.О. Яночкина¹,
С.А. Поляков¹**
**Zh.T. Zhusubaliyev¹, V.G. Rubanov², Yu.A. Gol'tsov², O.O. Yanochkina¹,
S.A. Polyakov¹**

¹ Юго-западный государственный университет, Россия,
305040, г. Курск, ул.50 лет Октября, 94

² Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Россия, 308012,
Белгород, ул. Костюкова, 46

¹ Southwest State University, 94, 50 let Oktyabrya St., Kursk, 305040, Russia

² Belgorod State Technological University named after V.G. Shoukhov,
46 Kostyukov St., Belgorod, 308012, Russia

E-mail: zhanybai@gmail.com, vgrubanov@gmail.com, umin@mail.ru, yanoolga@gmail.com,
sergpol@yandex.ru

Аннотация

Изучаются нелинейные явления в импульсной системе управления температурным полем нагревательной установки, поведение которой описывается неавтономными дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Исследование такой системы сведено к двумерному кусочно-гладкому непрерывному отображению. Показано, что переход от периодических колебаний к квазипериодическим происходит через бифуркацию Неймарка-Сакера. Описаны особенности перехода от резонансной динамики к квазипериодической. Внутри каждого резонансного языка существует притягивающая замкнутая инвариантная кривая. На этой кривой имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые, а сама инвариантная кривая образована замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. При изменении параметров устойчивый цикл сливается с седловым и исчезает через бифуркацию «складка» граничного столкновения. Так что, резонансные языки в кусочно-гладких системах ограничены не кривыми седло-узловой бифуркации, как в случае гладких динамических систем, а линиями бифуркации граничного столкновения.

Abstract

In this paper we study the nonlinear phenomena that can be observed in a temperature field pulse modulated control system of a heating unit. The behavior of such a system is described by nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand sides. We reduce the investigation of this system to the studying of a two-dimensional piecewise-smooth map. We demonstrate how a quasiperiodic dynamics can arise from a stable periodic motion through a Neimark-Sacker bifurcation. The paper also discusses the specific features of the transition from phase-locked dynamics to quasiperiodicity. Within each resonance tongue there is an attracting closed invariant curve. This closed curve includes two cycles, a saddle and a stable, and is formed by the saddle-node connection composed of the unstable manifolds of the saddle cycle. As the parameters of the system are changed, the stable and saddle cycles collide and disappear in a bordercollision fold bifurcation. In this way the resonance tongues in piecewise-smooth systems are bounded by border-collision fold bifurcation curves, rather than by the saddle-node bifurcation lines known from smooth systems.

Ключевые слова: система управления температурным полем нагревательной установки, квазипериодичность, кусочно-гладкое отображение, бифуркация Неймарка-Сакера, бифуркация граничного столкновения, двумерный тор, замкнутая инвариантная кривая.

Keywords: temperature field control system of a heating unit, quasi-periodicity, piecewise-smooth map, Neimark-Sacker bifurcation, border-collision bifurcation, two-dimensional torus, closed invariant curve.

Введение

Регулирование температуры является одной из важнейших задач во многих теплотехнологических процессах, таких как производство строительных материалов, цветного стекла, выращивание кристаллов и других, поскольку даже незначительное отклонение от заданной температуры приводит к нарушению необходимых параметров технологического процесса и ухудшению качества получаемой продукции.

Так, например, при выращивании кристалла синтетического сапфира необходимо обеспечить закон изменения температуры в тигле от 25°C до 2050°C с определённой степенью наращивания и спада температуры, что требует применения автоматической системы управления с возможностью программного задания изменения температуры в тигле с заданной точностью. Современный уровень получения монокристаллов сапфира является достаточно энергозатратным, начальная стадия предполагает получение из исходного сырья оксида алюминия расплава при температуре 2040°C и дальнейшее поддержание температуры на необходимом уровне в соответствии с технологическим регламентом [Лодиз Р., Паркер Р. 1974; Rubanov V. G. et al., 2015].

Схема нагревательной установки включает следующие зоны: внутреннее печное пространство 1, заполненное воздухом или газом, нихромовый электронагреватель 2, равномерно распределённый во внутреннем слое футеровки 3, состоящей из магнезитового кирпича и внешнего слоя футеровки 4 из минеральной ваты в цилиндрическом стакане из оцинкованной стали (рис. 1). Геометрическая форма печи - ограниченный цилиндр, сверху и снизу которого располагается футеровка.

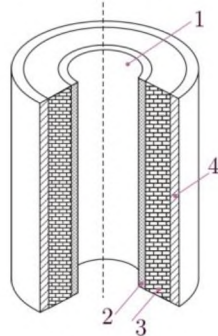


Рис. 1. Схема нагревательной установки
Fig. 1. Schematic diagram of the heating unit

Для решения задачи синтеза закона управления, с учетом особенностей теплообменных процессов, была экспериментально определена передаточная функция нагревательной установки [Кариков Е.Б. и др., 2012; Gol'tsov Yu. A. et al., 2016]:

$$W(s) = \frac{K}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)}, \quad (1)$$

где K , T_1 , T_2 – коэффициент передачи и постоянные времени объекта, соответственно.

Используемые в настоящее время регуляторы температуры с тиристорными преобразователями электрической энергии существенно искажают форму кривой потребляемого тока, приводя к возникновению в питающей сети несинусоидальных режимов.

Для устранения указанных недостатков авторами работ [Гольцов Ю. А. и др., 2016] спроектирована и реализована система управления нагревателем высокой мощности,

построенная на основе высокочастотного преобразователя электрической энергии с широтно-импульсным регулированием.

Однако, реализация положительных свойств систем с импульсной модуляцией является сложной задачей. Это обусловлено тем, что в импульсных системах при вариации параметров возможно возникновение колебаний на пониженных частотах, кратных частоте модуляции, квазипериодических и хаотических режимов [Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003]. При этом наиболее опасны жесткие переходы, связанные мультистабильностью, [Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003; Жусубалиев и др., 2010; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2015; Zhusubaliyev et al., 2015], проявляющиеся в скачкообразном изменении динамики в ответ на малые изменения параметров или воздействие случайных помех. Следствием этого является не только снижение показателей качества управления и нарушение хода технологического процесса, но и внезапные отказы технологического оборудования.

В настоящей работе изучаются динамические режимы и бифуркации в широтно-импульсной системе управления температурным полем нагревательной установки. Исследования проводились на модели, представляемой в форме кусочно-гладкого непрерывного отображения. Показано, что рассматриваемая динамическая система демонстрирует большое многообразие нелинейных явлений, таких как квазипериодическое поведение, резонансы на замкнутой инвариантной кривой через бифуркацию граничного столкновения и мультистабильность.

2. Математическая модель

Система управления нагревательной установкой с передаточной функцией (1), описывается дифференциальным уравнением с разрывной частью

$$T_1 T_2 \frac{d^2 T}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dT}{dt} + T = \Gamma \cdot K_F(\xi), \tag{2}$$

$$\Gamma = K \cdot U,$$

где T – температура в нагревательной установке; T_1, T_2 – постоянные времени; U – напряжение питания; $K_F(\xi), \xi$ – выходной и входной сигналы модулятора соответственно.

Введем обозначения $x_1 = T, x_2 = dT/dt$. Тогда уравнение движения (2) можно записать в форме

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x + \mathbf{b} \cdot K_F. \tag{3}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K \cdot U}{T_1 T_2} \end{bmatrix}.$$

Импульсы K_F формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода [Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003]:

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\xi)],$$

$$\xi = \alpha(V_{ref} - \beta x_1(k \cdot a)) - V_0(t/a - [t/a]), k = 0, 1, 2, \dots,$$

где a – период модуляции, $[\cdot]$ – функция, выделяющая целую часть аргумента, V_{ref} – сигнал задания температуры нагревательной установки, β – коэффициент передачи датчика температуры, α – коэффициент усиления; V_0 – опорный сигнал модулятора.

Параметры: $T_1 T_2 = 10240$ с; $T_1 + T_2 = 352$ с; $K = 328,7$ °C/V; $a = 10$ с; $2 < U < 24$ В; $\beta = 0,01$ В/°C; $V_0 = 5$ В; $V_{ref} = 5$ В; $\alpha > 0$.

От переменных x_1, x_2 в (3) перейдем к безразмерным переменным x, y следующей заменой:



$$x_1 = \frac{K \cdot U \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (x - \mathcal{G}y), \quad x_2 = \frac{K \cdot U \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (x - y). \quad (4)$$

Здесь $\lambda_1 = -1/T_1$, $\lambda_2 = -1/T_2$ – собственные числа матрицы \mathbf{A} . Подставляя (4) в (3) и разрешая относительно производных, получим [Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003]:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 (x - K_F); \quad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 (y - K_F), \quad (5)$$

$$K_F = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}[\varphi_k - \eta(t)]], \quad \varphi_k = \varphi(t)|_{t=ka}, \quad \varphi(t) = q + x(t) - \mathcal{G}y(t),$$

$$\eta(t) = \frac{P}{\alpha} (t/a - [t/a]), \quad \mathcal{G} = \lambda_1 / \lambda_2, \quad q = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\beta \cdot K \cdot U \cdot \lambda_2} V_{ref}, \quad P = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\beta \cdot K \cdot U \cdot \lambda_2} V_0 = \frac{V_0}{V_{ref}} q.$$

Динамическую систему (5) можно свести к двумерному кусочно-гладкому отображению:

$$x_{k+1} = cx_k - c + c^{1-z_k}; \quad y_{k+1} = dy_k - d + d^{1-z_k}, \quad (6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

где $z_k = t_k / (a - k)$ – коэффициент заполнения импульсов $0 \leq z_k \leq 1$, $c = e^{a\lambda_1}$, $d = e^{a\lambda_2}$.

Коэффициент заполнения импульсов z_k определяется в соответствии с алгоритмом:

$$z_k = \begin{cases} 0, & \varphi_k < 0, \\ 1, & \varphi_k > \frac{P}{\alpha}, \\ \frac{\alpha}{P} \cdot \varphi_k, & 0 \leq \varphi_k \leq \frac{P}{\alpha}, \end{cases}$$

$$\varphi_k = q + x_k - \mathcal{G}y_k.$$

3. Поиск периодических движений и исследование их локальной устойчивости

Период T_* периодического движения динамической системы (3) или (5) является кратным периоду внешнего воздействия: $T_* = ma$, $m = 1, 2, \dots$. Движение с таким периодом будем называть m -циклом или циклом периода m . Задачу поиска m -цикла можно свести к расчету неподвижной точки.

Перепишем отображение (6) в векторной форме:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_k), \quad (7)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx - c + c^{1-z} \\ dy - d + d^{1-z} \end{pmatrix},$$

где

$$z = \begin{cases} 0, & \varphi < 0, \\ 1, & \varphi > \frac{P}{\alpha}, \\ \frac{\alpha}{P} \cdot \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{P}{\alpha}, \end{cases}$$

$$\varphi = q + x - \mathcal{G}y.$$

В дискретной системе (7) цикл – это конечное множество точек

$$\mathbf{y}_0, \mathbf{F}(\mathbf{y}_0), \mathbf{F}^2(\mathbf{y}_0), \dots, \mathbf{F}^m(\mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0. \quad (8)$$



Заметим, что каждая точка этого множества является неподвижной точкой m -ой итерации F^m функции F , т.е. удовлетворяет уравнению:

$$F^m(y) = y, \quad F^m = \underbrace{F(F(\dots F(y)\dots))}_{m \text{ - вложенных функций}}. \tag{9}$$

Уравнение (9) решалось численно с помощью гибридного алгоритма, основанного на методе Ньютона-Рафсона.

Пусть y_0^* неподвижная точка, т.е.

$$y_0^* = F^m(y_0^*).$$

Локальная устойчивость m -цикла

$$y_0 = y_0^*, \quad y_1 = F(y_0), \quad y_2 = F^2(y_0), \dots, \quad y_m = F^m(y_0) = y_0$$

определяется собственными числами ρ_1, ρ_2 (мультипликаторами) матрицы монодромии Φ_m , т.е. корнями уравнения

$$\det(\Phi_m - \rho E) = 0,$$

где E – единичная матрица.

Матрица Φ_m рассчитывается по рекуррентной формуле:

$$\begin{cases} \Phi_{k+1} = DF(y_k)\Phi_k, \\ y_{k+1} = F(y_k), \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad \Phi_0 = E, \quad y_0 = y_0^*,$$

где $DF(y)$ - матрица Якоби:

$$DF(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Здесь частные производные

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = c, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = d, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -a\lambda_1 c^{1-z}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -a\lambda_2 d^{1-z}.$$

С учетом насыщения модулятора (см. (6), (7)):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\alpha}{P}, & 0 < z < 1, \\ 0, & z = 1 \text{ или } z = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \begin{cases} -g \frac{\alpha}{P}, & 0 < z < 1, \\ 0, & z = 1 \text{ или } z = 0. \end{cases}$$

Цикл периода m локально устойчив, когда $|\rho_i| < 1, i = 1, 2$.

4. Бифуркационный анализ

В качестве варьируемых параметров при бифуркационном анализе были выбраны напряжение питания U и коэффициент усиления α .

На рис. 2 изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма (карта динамических режимов) в плоскости параметров (α, U) , рассчитанная численно.

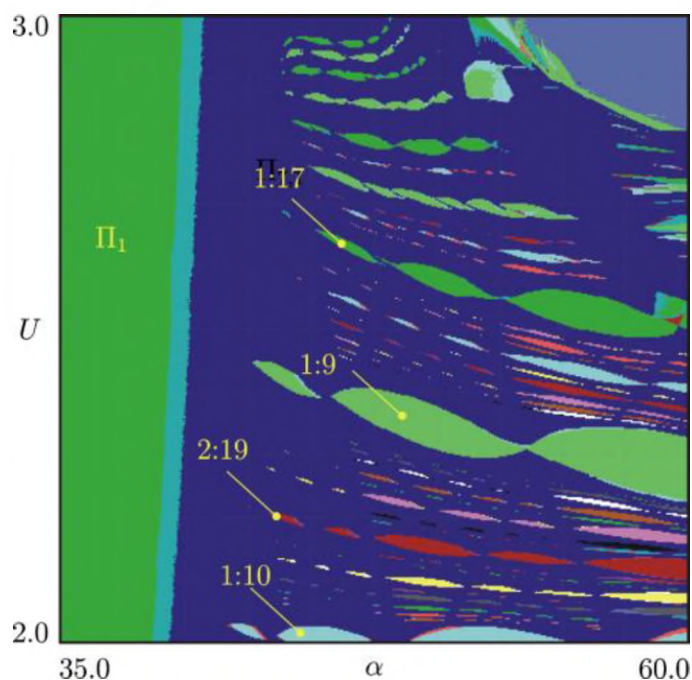


Рис. 2. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (α, U)
 Fig. 2. Two-dimensional bifurcation diagram in the parameter plane (α, U)

Через Π_1 на рис. 2 обозначена область существования устойчивого цикла периода 1 (неподвижной точки отображения (6)). Справа эта область ограничена кривой бифуркации Неймарка-Сакера, в точках которой из теряющей устойчивость 1-цикла возникает двухчастотный квазипериодический режим. В фазовом пространстве динамической системы с непрерывным временем (3), (5) этому режиму отвечает двумерный инвариантный тор, а на фазовой плоскости дискретного отображения (6) – замкнутая инвариантная кривая.

Характер движения на торе определяется числом вращения. Когда оно иррационально, инвариантный тор всюду плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую) и динамика квазипериодична. При рациональном числе вращения на торе лежит пара циклов: устойчивый и седловой. В этом случае инвариантный тор и соответствующая в отображении (6) замкнутая инвариантная кривая называются резонансными [Zhusubaliyev et al., 2002].

Справа области Π_1 располагаются области резонанса (или резонансные языки) на двумерном торе. На рис. 2 выделены резонансные языки относительно большой площади с числами вращения 1:9, 1:10, 1:17 и 2:19.

Важно отметить, что резонансные языки в кусочно-гладких системах ограничены не кривыми седло-узловой бифуркации, как в случае языков Арнольда гладких динамических систем, а линиями бифуркации граничного столкновения («border-collision») [Zhusubaliyev et al., 2002; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2008], в точках которых устойчивая периодическая орбита сливается с седловой и исчезает. В такой бифуркации с седловой периодической орбитой может сливаться гиперболический цикл, имеющий тип как устойчивого узла, так и устойчивого фокуса. Структура резонансных языков кусочно-гладких систем подробно изучена в [Zhusubaliyev et al., 2002; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003].

Прежде чем продолжить, сделаем небольшое отступление. Как известно, усложнение колебаний в кусочно-гладких системах связано с двумя типами бифуркаций. Первый тип точно такой же, как и в гладких системах. Это классические бифуркации, например, бифуркации седло-узел, удвоения периода, Неймарка-Саккера (или бифуркация Андронова-Хопфа) и глобальные – гомоклинические и гетероклинические бифуркации.

Второй тип не имеет аналогов в гладких системах и связан с ситуацией, когда при изменении параметров инвариантное множество (например, неподвижная точка, периодическое решение) сталкивается с многообразием переключения. Это вызывает нарушение условий существования инвариантного множества. Такие бифуркации для систем с непрерывным временем получили название С-бифуркаций и впервые были исследованы Фейгиным М.И. [Фейгин, 1970; Фейгин, 1974; Di Bernardo et al., 1999].

Для дискретных отображений используется название «border-collision bifurcation» (бифуркация граничного столкновения), которое было введено Nusse Н.Е. и Yorke J.A. в [Nusse, Yorke, 1992].

Простейшей бифуркационной картине соответствует непрерывный переход от одного типа цикла к другому без нарушения устойчивости (persistence border-collision). Возможны и более сложные ситуации, например, удвоение, «умножение» периода колебаний, рождение хаотического или квазипериодического аттрактора из периодической орбиты или неподвижной точки в результате единственной бифуркации (см., например, [Nusse, Yorke, 1992; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003; Zhusubaliyev et al., 2006; Di Bernardo et al., 2008; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2008; Avrutin et al., 2016], а также обзоры [Di Bernardo et al., 2008; Makarenkov, Lamb, 2012; Simpson, 2016] и цитируемую в них литературу).

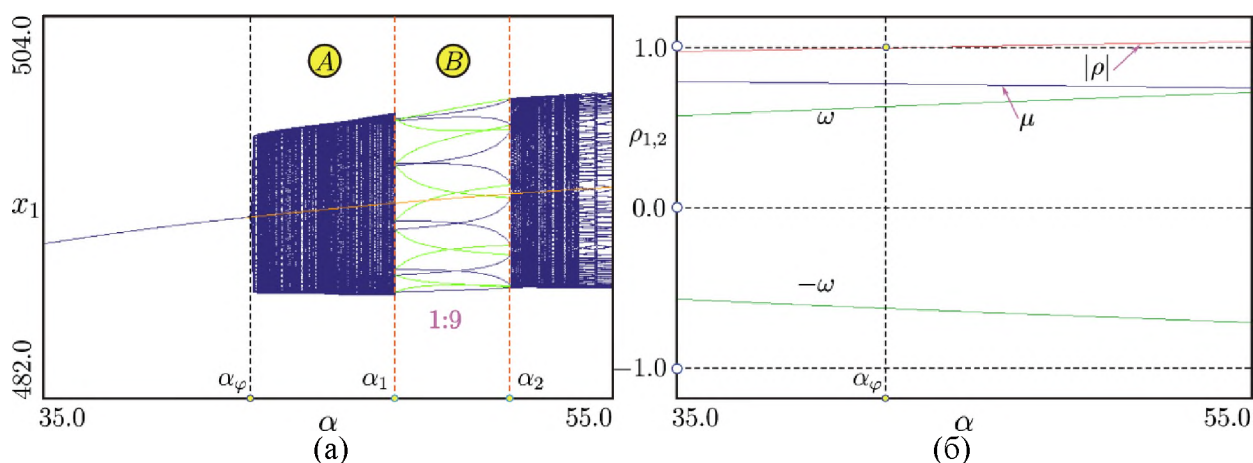


Рис. 3. Бифуркация Неймарка-Сакера:

- (а) – бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая возникновение замкнутой инвариантной кривой из теряющего устойчивость 1-цикла,
- (б) – зависимость комплексно-сопряженной пары мультипликаторов

1-цикла $\rho_{1,2} = \mu \pm i\omega$ от параметра α

Fig. 3. Neimark-Sacker bifurcation:

- (a) – bifurcation diagram illustrating the appearance of a closed invariant curve from a stable 1-cycle,
- (б) – variation of a pair complex-conjugated multipliers $\rho_{1,2} = \mu \pm i\omega$ for the 1-cycle

На рис. 3, (а) и (б) приведены бифуркационная диаграмма и зависимости мультипликаторов 1-цикла от параметра α при $U = 2,35$ В, иллюстрирующие рождение замкнутой инвариантной кривой из теряющей устойчивость неподвижной точки через бифуркацию Неймарка-Сакера. Как мы видим из рис. 3, (б), при увеличении α комплексно-сопряженная пара мультипликаторов $\rho_{1,2} = \mu \pm i\omega$ 1-цикла выходит из единичного круга в точке α_ϕ . Потеря устойчивости 1-цикла, когда $|\rho| = \sqrt{\mu^2 + \omega^2} > 1$ сопровождается мягким возникновением замкнутой инвариантной кривой (см. рис. 4, а), отвечающей двухчастотному квазипериодическому режиму. При дальнейшем изменении коэффициента α в точке α_1 реализуется бифуркация граничного столкновения, при которой инвариантная кривая становится резонансной.

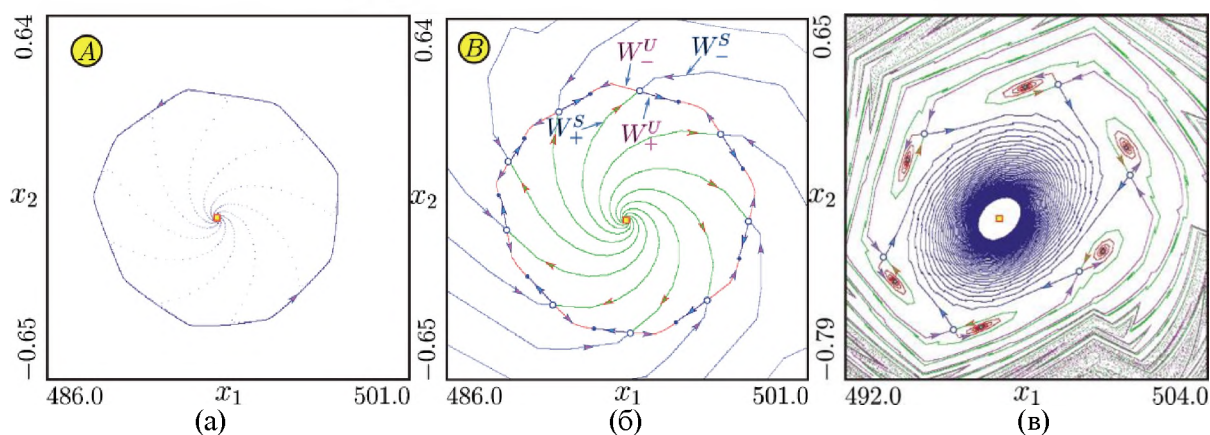


Рис. 4. Фазовые портреты отображения (6):

- (а) – инвариантная кривая, отвечающая квазипериодической динамике,
 (б) – замкнутая инвариантная кривая с резонансной структурой,
 (в) – сосуществование устойчивого 6-цикла и устойчивой замкнутой инвариантной кривой

Fig. 4. Phase portraits of the map (6):

- (а) – the invariant curve associated with a quasi-periodic dynamics,
 (б) – the closed invariant curve with a resonance structure,
 (в) – coexistence of a stable 6-cycle and a stable closed invariant curve

На рис. 4, (б) изображен фазовый портрет отображения (6) при значениях параметров $\alpha = 49$ и $U = 2,35$, лежащих внутри резонансного языка 1:9. Как мы отмечали ранее, при рациональном числе вращения на замкнутой инвариантной кривой имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые. Как можно видеть из рис. 4, (б), инвариантная кривая образована замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов. На этом рисунке черными точками обозначены точки устойчивого цикла, а белыми – седлового. Через W_{\pm}^U и W_{\pm}^S обозначены соответственно неустойчивые и устойчивые многообразия седловой периодической орбиты. Инвариантные множества W_{\pm}^U и W_{\pm}^S рассчитывались численно с помощью алгоритма [Жусубалиев и др., 2017]. При выходе из зоны резонанса 1:9 через точку бифуркации граничного столкновения α_2 динамика вновь становится квазипериодической.

При больших значениях напряжения питания U динамика усложняется за счет появления областей с мультистабильным поведением. Мультистабильность в кусочно-гладких динамических системах в контексте концепции скрытых аттракторов («hidden attractors») [Leonov, Kuznetsov, 2013; Dudkowski et al., 2016] исследована в работах [Zhusubaliyev, Mosekilde, 2015; Zhusubaliyev et al., 2015].

На рис. 4, (в) показан фазовый портрет в области мультистабильности, где устойчивый 6-цикл сосуществует с устойчивой замкнутой инвариантной кривой, отвечающей квазипериодическому режиму. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов является устойчивое многообразие седлового 6-цикла.

Заключение

В данной статье представлены результаты бифуркационного анализа математической модели системы управления температурным полем нагревательной установки. Система состоит из непрерывной линейной части, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями и модулятора, осуществляющего широтно-импульсную модуляцию первого рода. Исследование такой динамической системы сведено к изучению свойств двумерного кусочно-гладкого непрерывного отображения. Описаны алгоритмы поиска периодических движений и анализа их локальной устойчивости.



Рассматриваемая динамическая система демонстрирует квазипериодическое поведение и мультистабильность. Выявлено, что переход от периодического режима с частотой модуляции к квазипериодическим колебаниям происходит через классическую бифуркацию Неймарка-Сакера. В области квазипериодической динамики существуют многочисленные окна с периодической динамикой, отвечающие резонансным языкам. Показано, что переходы из зоны резонанса в область квазипериодической динамики и обратно происходят не через седло-узловую бифуркацию, как в случае гладких динамических систем, а через бифуркацию граничного столкновения («border-collision bifurcation»), при которой с седловой периодической орбитой может сливаться гиперболический цикл, имеющий тип, как устойчивого узла, так и устойчивого фокуса.

Работа выполнена в рамках программы развития опорного университета на базе БГТУ им. В.Г. Шухова.

This work was performed within a development program of the Base University on the basis of BSTU named after V. G. Shukhov.

Список литературы References

1. Avrutin V., Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. 2016. Border collisions inside the stability domain of a fixed point. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 321–322: 1–15.
2. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A. R., Kowalczyk P. 2008. *Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications*. London: Springer-Verlag, 483.
3. Di Bernardo M., Budd C., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Olivar G., Piiroinen P.T. 2008. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems. *SIAM Review*. 50: 629-701.
4. Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. 1999. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos Solitons & Fractals*. 10: 1881–1908.
5. Dudkowski D., Kapitaniak T., Yafari S., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A. 2016. Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*. 637: 1-50.
6. Gol'tsov Yu. A., Kizhuk A. S., Rubanov V. G. 2016. Control of high power thermal object in the class of fractional order regulators. *International Journal of Pharmacy & Technology*. 8(4): 24790–24800.
7. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. 2013. Hidden attractors in dynamical systems: from hidden oscillation in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 23: 1330002–1 – 1330002–69.
8. Makarenkov O., Lamb J.S.W. 2012. Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 241(22): 1826-1844.
9. Nusse H.E., Yorke J.A. 1992. Border-collision bifurcations Including “Period two to period three” for piecewise smooth systems. *Physica D*. 57: 39-57.
10. Rubanov V.G., Kizhuk A.S., Gol'tsov Yu.A. 2015. Microprocessor Control System of Sapphire Crystal’s Growth Temperature Regime. *International Journal of Soft Computing*. 10: 326-331.
11. Simpson D. J. W. 2016. Border-collision bifurcations in R^N . *SIAM Review*. 58(2): 177–226.
12. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. 2003. *Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems*. Singapore: World Scientific, 376.
13. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. 2008. Direct transition from a stable equilibrium to quasiperiodicity in non-smooth systems. *Physics Letters A*. 372: 2237–2246.
14. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. 2015. Multistability and hidden attractors in a multilevel DC/DC converter. *Mathematics and Computers in Simulation*. 109: 32-45.
15. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Maity S.M., Mohanan S., Banerjee S. 2006. Border collision route to quasiperiodicity: numerical investigation and experimental confirmation. *Chaos*. 16: 023122–1 – 023122–11.
16. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Rubanov V.G., Nabokov R.A. 2015. Multistability and hidden attractors in a relay system with hysteresis. *Physica D. Nonlinear Phenomena*. 306: 6-15.
17. Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterlin E.A., Mosekilde E. 2002. Border-collision bifurcations on a two-dimensional torus. *Chaos, Solitons & Fractals*. 13(9): 1889–1915.



18. Гольцов Ю.А., Жусубалиев Ж.Т., Кижук А.С., Коленченко В.В., Рубанов В.Г.. Патент № 2612311 РФ, МПК G05D 23/22. Устройство регулирования температуры электронагрева, опубл. 06.03.2017, бюл., № 7.

Gol'tsov Yu.A., Zhusubaliyev Zh.T., Kizhuk A.S., Kolenchenko V.V., Rubanov V.G.. Patent № 2612311 RF, МПК G05D 23/22. Ustrojstvo regulirovaniya temperatury jelektronagreva, opubl. 06.03.2017, bjul., № 7. (in Russia).

19. Жусубалиев Ж.Т., Рубанов В.Г., Гольцов Ю. А., Яночкина О.О. Программа расчета инвариантных многообразий седловых циклов двумерных обратимых кусочно-гладких отображений. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017661000 от 02.10.2017.

Zhusubaliyev Zh.T., Rubanov V.G., Gol'tsov Yu.A., Yanochkina O.O. Programma rascheta invariantnyh mnogoobrazij sedlovyh ciklov dvumernyh obratimyh kusochno-gladkih otobrazhenij. Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya JeVM № 2017661000 ot 02.10.2017 (in Russia).

20. Жусубалиев Ж.Т., Титов В.С., Чернецкая И.Е., Яночкина О.О. 2010. Электропривод с монозонным импульсным управлением для окомкователя сыпучих материалов. Электротехнические комплексы и системы управления. 2: 45–50.

Zhusubaliyev Zh.T., Titov V.S., Cherneckaya I.E., Yanochkina O.O. 2010. Jelektroprivod s monogozonnyim impul'snym upravleniem dlya okomkovatelya syupuchih materialov. Elektrotehnicheskie komplekсы i sistemy upravleniya. 2: 45–50. (in Russia).

21. Кариков Е.Б., Мишунин В.В., Рубанов В.Г., Гольцов Ю.А. 2012. Моделирование теплотехнологических объектов в классе дробно-иррациональных передаточных функций. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 13(132): 173-179.

Karikov E.B., Mishunin V.V., Rubanov V.G., Gol'tsov Yu.A. 2012. Modelirovanie teplotehnologicheskikh ob'ektov v klasse drobno-irracional'nyh peredatochnyh funkcij. Nauchnye vedomosti BelGU. Ser. Istorija. Politologiya. Ekonomika. Informatika. 13(132): 173-179. (in Russia).

22. Лодиз Р., Паркер Р. 1974. Рост монокристаллов. М., Мир, 540.

Lodiz R., Parker R. 1974. Rost monokristallov. M., Mir, 540. (in Russia).

23. Фейгин М.И. 1970. Удвоение периода колебаний при S-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах. Прикладная математика и механика. 34(5): 861-869.

Feigin M.I. 1970. Udvoenie perioda kolebanij pri S-bifurkacijah v kusochno-nepreryvnyh sistemah. Prikladnaya matematika i mekhanika. 34(5): 861-869. (in Russia).

24. Фейгин М.И. 1974. О рождении семейств субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе. Прикладная математика и механика. 38(5): 810-818.

Feigin M.I. 1974. O rozhdenii semejstv subgarmonicheskikh rezhimov v kusochno-nepreryvnoj sisteme. Prikladnaya matematika i mekhanika. 38(5): 810-818. (in Russia).