



УДК 621.397

## О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ СУБИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦ КОСИНУСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## ABOUT THE EIGENVALUES OF COSINE TRANSFORM SUBINTERVAL MATRICES

**Е.В. Болгова**  
**E.V. Volgova**

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85*

*Belgorod State National Research University, 85 Pobeda St, Belgorod, 308015, Russia*

*e-mail: bolgova\_e@bsu.edu.ru*

**Аннотация.** В статье рассмотрено построение субполосных и субинтервальных матриц для одних из наиболее распространенных унитарных преобразований – преобразования Фурье и косинусного преобразования. Приведено оценивание количества близких к единице собственных чисел соответствующих субполосных и субинтервальных матриц. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что с точки зрения количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения, для субполосного скрытного внедрения данных в изображения предпочтительнее применять субинтервальные матрицы, что обеспечивает больший объем внедряемой информации.

**Resume.** The article deals with the construction of the subband and subinterval matrices for some of the most common unitary transformations - Fourier transform and cosine transform. It is shown evaluating of the amount of the eigenvalues closed to 1 of the corresponding subband and subinterval matrices. Conducted computing experiments show that in terms of the number of eigenvalues closed to 1 based on  $\varepsilon$ -approximation for the subband embedding of data in the images is more preferable to use the subinterval matrices that provides a greater volume of data being embedded.

**Ключевые слова:** подобласть пространственных частот, субполосная матрица, субинтервальная матрица, косинусное преобразование, собственные числа.

**Keywords:** subdomain spatial frequencies, subband matrix, subinterval matrix, cosine transform, eigenvalues.

В настоящее время для контроля за распространением и использованием визуального контента (статических изображений, видеоданных) широко используется стеганографическое (скрытное) внедрение контрольной, идентифицирующей информации в изображения [Грибунин и др., 2009; Конахович, Пузыренко, 2006].

Наряду с распространенными известными методами стеганографии в цифровых изображениях [Грибунин и др., 2009; Конахович, Пузыренко, 2006; Черноморец, Болгова, 2012] одним из перспективных направлений является скрытное внедрение контрольной информации на основе субполосных преобразований [Жиляков, Черноморец, 2012; Жиляков и др., 2014; Жиляков, Черноморец, 2013а; Жиляков и др., 2015; Жиляков и др., 2014б], в основе которых лежат различные унитарные преобразования: преобразование Фурье, косинусное и синусное преобразования, преобразования Хартли, Уолша-Адамара, Хаара и др. [Черноморец и др., 2015б; Черноморец, Болгова, 2015].

Рассмотрим одни из наиболее распространенных унитарных преобразований – преобразование Фурье [Черноморец и др., 2015б; Черноморец, Болгова, 2015; Черноморец и др., 2015в] и косинусное преобразование [Черноморец, Болгова, 2015а; Черноморец, Болгова, 2015б; Черноморец и др., 2015а].

Базисные функции преобразования Фурье(FT) имеют вид:

$$w_u^{FT}(i) = e^{-ju(i-1)}, \quad (1)$$

$$-\pi \leq u < \pi, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где  $N$  – размерность изображения  $\Phi$ , заданного в виде матрицы яркостей пикселей  $\Phi = (f_{ik})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .



Для построения субполосного преобразования на основе преобразования Фурье, учитывая, что преобразование Фурье является периодическим с периодом  $2\pi$ , в качестве субполосы используется центрально-симметричная подобласть  $V_{r_1 r_2}$  пространственных частот (ППЧ) вида [Жиляков, Черноморец, 2010; Жиляков, Черноморец, 2013б; Жиляков и др., 2014в]:

$$V_{r_1 r_2} = \{ (u, v) | (u \in [-u_{r_1 2}, -u_{r_1 1}] \cup [u_{r_1 1}, u_{r_1 2}]) \cap (v \in [-v_{r_2 2}, -v_{r_2 1}] \cup [v_{r_2 1}, v_{r_2 2}]) \},$$

$$u_{11} = 0, u_{R_1, 2} = \pi, u_{r_1+1, 1} = u_{r_1, 2}, v_{11} = 0, v_{R_2, 2} = \pi, v_{r_2+1, 1} = v_{r_2, 2},$$

$$r_1 = 1, 2, \dots, R_1, r_2 = 1, 2, \dots, R_2.$$

Если ввести субполосы  $S_{r_1}$  и  $S_{r_2}$  плоскости пространственных частот (ПЧ),

$$S_{r_1} = [-u_{r_1 2}, -u_{r_1 1}] \cup [u_{r_1 1}, u_{r_1 2}], \tag{3}$$

$$S_{r_2} = [-v_{r_2 2}, -v_{r_2 1}] \cup [v_{r_2 1}, v_{r_2 2}], \tag{4}$$

то подобласть  $V_{r_1 r_2}$  может быть представлена в виде

$$V_{r_1 r_2} = S_{r_1} \cap S_{r_2}. \tag{5}$$

В работе [Жиляков, Черноморец, 2010; Жиляков и др., 2007] показано, что элементы субполосной матрицы  $A_{r_1}$ , соответствующей субполосе  $S_{r_1}$ , определяются на основании соотношения

$$a_{in}^{r_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{u \in S_{r_1}} e^{-ju(i-n)} du = \begin{cases} \frac{\sin(u_{r_1 2}(i-n)) - \sin(u_{r_1 1}(i-n))}{\pi(i-n)}, & i \neq n, \\ \frac{u_{r_1 2} - u_{r_1 1}}{\pi}, & i = n, \end{cases} \tag{6}$$

элементы субполосной матрицы  $A_{r_2} = (a_{in}^{r_2})$ ,  $i, n = 1, 2, \dots, N$ , соответствующей субполосе  $S_{r_2}$ , определяются аналогично.

Известно [Жиляков, Черноморец, 2010; Жиляков и др., 2007; Жиляков, Черноморец, 2013б], что субполосные матрицы с элементами вида (6) являются симметричными, теплицевыми матрицами, имеют полный набор ортонормированных собственных векторов, их собственные числа являются положительными и не превышают единицу

$$0 < \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N. \tag{7}$$

Базисные функции косинусного преобразования (СТ) имеют вид:

$$w_u^{CT}(i) = \cos(u(i - \frac{1}{2})), \tag{8}$$

$$0 \leq u < \pi, i = 1, 2, \dots, N. \tag{9}$$

Для построения субинтервального преобразования на основе косинусного преобразования в качестве субполосы используется подобласть  $V_{r_1 r_2}^{CT}$  пространственных частот вида [Черноморец, Болгова, 2015а; Черноморец, Волчков, 2012]:

$$V_{r_1 r_2}^{CT} = S_{r_1}^{CT} \cap S_{r_2}^{CT}, \tag{10}$$

где субполосы  $S_{r_1}^{CT}$  и  $S_{r_2}^{CT}$  плоскости ПЧ имеют вид

$$S_{r_1}^{CT} = [u_{r_1 1}, u_{r_1 2}], \tag{11}$$

$$S_{r_2}^{CT} = [v_{r_2 1}, v_{r_2 2}], \tag{12}$$

то есть

$$V_{r_1 r_2}^{CT} = \{ (u, v) | (u \in [u_{r_1 1}, u_{r_1 2}]) \cap (v \in [v_{r_2 1}, v_{r_2 2}]) \},$$

$$u_{11} = 0, u_{R_1, 2} = \pi, u_{r_1+1, 1} = u_{r_1, 2}, v_{11} = 0, v_{R_2, 2} = \pi, v_{r_2+1, 1} = v_{r_2, 2},$$

$$r_1 = 1, 2, \dots, R_1, r_2 = 1, 2, \dots, R_2.$$

Элементы субинтервальной матрицы  $G_{r_1} = (g_{in}^{r_1})$ ,  $i, n = 1, 2, \dots, N$ , соответствующей субполосе  $S_{r_1}^{CT}$ , определяются на основании соотношения [Черноморец, Болгова, 2015а; Черноморец, Волчков, 2012]





Приведенные в таблице 1 значения собственных чисел субполосных  $A_{r_1}$  и субинтервальных  $G_{r_1}$  матриц,  $r_1 = 1,2,3,4$ , показывают, что в соответствующих подобластях пространственных частот субинтервальные матрицы имеют большее количество собственных чисел близких к единице по сравнению с субполосными матрицами. Также значения собственных чисел субинтервальных матриц быстрее убывают до близкого к нулю значения.

В таблице 2 приведены первые 14 значений собственных чисел субполосных и субинтервальных матриц, соответствующих различным ППЧ при разбиении области пространственных частот на  $8 \times 8$  равновеликих подобласти.

Таблица 2  
Table 2

**Значения собственных чисел субполосных и субинтервальных матриц, соответствующих различным ППЧ,  $N=64, R_1=8$  (первые 14 значений)**  
**The values of the eigenvalues of the subband and subinterval matrices corresponding to various SSF,  $N=64, R_1=8$**

№ собствен-ного числа	Собственные числа субполосной матрицы $A_{r_1}$								Собственные числа субинтервальной матрицы $G_{r_1}$							
	$r_1$								$r_1$							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0,999	0,964	0,961	0,960	0,960	0,961	0,964	0,999	1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1	1
6	0,993	0,958	0,959	0,960	0,960	0,959	0,958	0,993	1	0,994	0,993	0,993	0,993	0,993	0,992	1
7	0,937	0,730	0,725	0,723	0,723	0,725	0,730	0,937	0,998	0,936	0,937	0,937	0,938	0,939	0,942	0,985
8	0,700	0,720	0,722	0,723	0,723	0,722	0,720	0,700	0,915	0,705	0,701	0,700	0,699	0,699	0,698	0,681
9	0,299	0,276	0,275	0,274	0,274	0,275	0,276	0,299	0,319	0,300	0,299	0,299	0,298	0,297	0,294	0,086
10	0,063	0,268	0,272	0,273	0,273	0,272	0,268	0,063	0,015	0,058	0,062	0,063	0,064	0,064	0,065	0,002
11	7,95E-03	4,41E-02	4,29E-02	4,24E-02	4,24E-02	4,29E-02	4,41E-02	7,95E-03	2,32E-04	8,51E-03	8,16E-03	8,02E-03	7,87E-03	7,57E-03	6,58E-03	2,31E-05
12	7,20E-04	3,72E-02	4,09E-02	4,19E-02	4,19E-02	4,09E-02	3,72E-02	7,20E-04	7,20E-04	2,03E-06	5,22E-04	6,62E-04	7,07E-04	7,31E-04	7,54E-04	8,03E-04
13	5,19E-05	3,68E-03	3,45E-03	3,36E-03	3,36E-03	3,45E-03	3,68E-03	5,19E-05	5,19E-05	1,13E-08	5,99E-05	5,55E-05	5,30E-05	5,04E-05	4,56E-05	3,24E-05
14	3,08E-06	2,43E-03	3,06E-03	3,26E-03	3,26E-03	3,06E-03	2,43E-03	3,08E-06	3,08E-06	4,32E-11	1,66E-06	2,57E-06	2,96E-06	3,18E-06	3,39E-06	3,61E-06
...																

Приведенные в таблице 2 значения собственных чисел субполосных  $A_{r_1}$  и субинтервальных  $G_{r_1}$  матриц,  $r_1 = 1,2,\dots,8$ , также как и в таблице 1, показывают, что в соответствующих подобластях пространственных частот субинтервальные матрицы имеют большее количество собственных чисел близких к единице по сравнению с субполосными матрицами.

В таблице 3 приведены первые 10 значений собственных чисел субполосных матриц  $A_{r_1}$ ,  $r_1 = 1,2,\dots,16$ , соответствующих различным ППЧ при разбиении области пространственных частот на  $16 \times 16$  равновеликих подобласти.

Таблица 3  
Table 3

**Значения собственных чисел субполосных матриц, соответствующих различным ППЧ,  $N_1=64, R_1=16$  (первые 10 значений)**  
**The values of the eigenvalues of the subband matrices corresponding to various SSF,  $N_1=64, R_1=16$**

№ собствен-ного числа	Собственные числа субполосной матрицы $A_{r_1}$															
	$r_1$															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0,984	0,982	0,982	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,982	0,982	0,984	1
2	0,998	0,980	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,980	0,998
3	0,960	0,760	0,753	0,751	0,751	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,751	0,751	0,753	0,760	0,960



Окончание табл. 3

4	0,722	0,747	0,749	0,749	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,750	0,749	0,749	0,747	0,722
5	0,274	0,246	0,244	0,244	0,244	0,244	0,243	0,243	0,243	0,243	0,244	0,244	0,244	0,244	0,246	0,274
6	0,043	0,236	0,241	0,242	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,242	0,241	0,236	0,043
7	0,003	0,026	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,024	0,024	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,026	0,003
8	1,83E-04	1,94E-02	2,27E-02	2,37E-02	2,40E-02	2,42E-02	2,43E-02	2,44E-02	2,44E-02	2,43E-02	2,42E-02	2,40E-02	2,37E-02	2,27E-02	1,94E-02	1,83E-04
9	7,20E-06	1,23E-03	1,12E-03	1,08E-03	1,07E-03	1,06E-03	1,05E-03	1,05E-03	1,05E-03	1,05E-03	1,06E-03	1,07E-03	1,08E-03	1,12E-03	1,23E-03	7,20E-06
10	2,20E-07	5,44E-04	8,53E-04	9,52E-04	9,94E-04	1,02E-03	1,03E-03	1,04E-03	1,04E-03	1,03E-03	1,02E-03	9,94E-04	9,52E-04	8,53E-04	5,44E-04	2,20E-07
...																

В таблице 4 приведены первые 10 значений собственных чисел субинтервальных матриц  $G_{r_1}$ ,  $r_1 = 1, 2, \dots, 16$ , соответствующих различным ППЧ при разбиении области пространственных частот на  $16 \times 16$  равновеликих подобластей.

Таблица 4  
Table 4

**Значения собственных чисел субинтервальных матриц, соответствующих различным ППЧ,  $N_1=64$ ,  $R_1=16$  (первые 10 значений)**  
The values of the eigenvalues of the subinterval matrices corresponding to various SSF,  $N_1=64$ ,  $R_1=16$

№ собствен- ного числа	Собственные числа субинтервальной матрицы $G_{r_1}$															
	$r_1$															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	1
2	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,997	0,999
3	0,999	0,958	0,959	0,959	0,959	0,959	0,959	0,960	0,960	0,960	0,960	0,960	0,961	0,964	0,993	
4	0,937	0,729	0,724	0,723	0,723	0,722	0,722	0,722	0,722	0,722	0,722	0,722	0,721	0,720	0,699	
5	0,299	0,276	0,275	0,275	0,275	0,275	0,275	0,274	0,274	0,274	0,274	0,274	0,272	0,268	0,064	
6	0,008	0,037	0,041	0,042	0,042	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043	0,045	0,001	
7	5,52E-05	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,002	3,37E-06	
8	1,74E-07	1,01E-04	1,50E-04	1,67E-04	1,74E-04	1,78E-04	1,81E-04	1,82E-04	1,83E-04	1,85E-04	1,86E-04	1,87E-04	1,90E-04	1,96E-04	2,11E-04	7,78E-09
9	3,02E-10	8,29E-06	7,96E-06	7,64E-06	7,48E-06	7,38E-06	7,31E-06	7,24E-06	7,16E-06	7,06E-06	6,91E-06	6,66E-06	6,22E-06	5,27E-06	3,07E-06	1,03E-11
10	3,13E-13	7,98E-08	1,41E-07	1,77E-07	1,96E-07	2,07E-07	2,13E-07	2,18E-07	2,22E-07	2,25E-07	2,28E-07	2,33E-07	2,40E-07	2,50E-07	2,16E-07	8,91E-15
...																

Приведенные в таблицах 3 и 4 значения собственных чисел субполосных  $A_{r_1}$  и субинтервальных  $G_{r_1}$  матриц,  $r_1 = 1, 2, \dots, 16$ , также как и в предыдущих таблицах, показывают, что в соответствующих подобластях пространственных частот субинтервальные матрицы имеют большее количество собственных чисел близких к единице по сравнению с субполосными матрицами. При этом количество близких к единице собственных чисел анализируемых матриц уменьшается с увеличением количества подобластей, на которые разбивается область пространственных частот. В тоже время количество близких к нулю собственных чисел возрастает с ростом количества подобластей.

В таблицах 5 и 6 для изображений размерности  $64 \times 64$ ,  $128 \times 128$ ,  $256 \times 256$  и  $512 \times 512$  пикселей приведены значения количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения:

$$\lambda_k > 1 - \varepsilon, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (16)$$

для различных разбиений области пространственных частот на равновеликие подобластей:  $R_1 = \{4, 8, 16, 32\}$ .

В таблицах 5 и 6 приведены значения минимального и максимального количества собственных чисел близких к единице в смысле (16) среди всех подобластей при заданном разбиении на подобластей.



Таблица 5  
Table 5

**Количество собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения (N=64 и N=128)**  
**The eigenvalues amount in terms of  $\epsilon$ -approximation to 1 (N=64&N=128)**

R <sub>1</sub>	$\epsilon$	Минимальное количество близких к 1 собственных чисел				Максимальное количество близких к 1 собственных чисел			
		Субполосные матрицы		Субинтервальные матрицы		Субполосные матрицы		Субинтервальные матрицы	
		N=64	N=128	N=64	N=128	N=64	N=128	N=64	N=128
4	10 <sup>-2</sup>	12	26	12	28	12	28	14	30
	10 <sup>-3</sup>	10	24	12	28	12	28	14	30
	10 <sup>-4</sup>	8	22	10	26	10	26	14	28
	10 <sup>-5</sup>	6	20	10	24	10	26	12	28
	10 <sup>-6</sup>	4	18	8	24	8	24	12	28
8	10 <sup>-2</sup>	4	12	6	12	6	12	6	14
	10 <sup>-3</sup>	2	10	4	12	4	12	6	14
	10 <sup>-4</sup>	2	8	4	10	4	10	6	14
	10 <sup>-5</sup>	0	6	2	10	2	10	4	12
	10 <sup>-6</sup>	0	4	2	8	2	8	4	12
16	10 <sup>-2</sup>	0	4	2	6	2	6	2	6
	10 <sup>-3</sup>	0	2	0	4	0	4	2	6
	10 <sup>-4</sup>	0	2	0	4	0	4	2	6
	10 <sup>-5</sup>	0	0	0	2	0	2	2	4
	10 <sup>-6</sup>	0	0	0	2	0	2	0	4
32	10 <sup>-2</sup>	0	0	0	2	0	2	0	2
	10 <sup>-3</sup>	0	0	0	0	0	0	0	2
	10 <sup>-4</sup>	0	0	0	0	0	0	0	2
	10 <sup>-5</sup>	0	0	0	0	0	0	0	2
	10 <sup>-6</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0
10 <sup>-7</sup>	0	0	0	0	0	0	0	0	

Приведенные в таблице 5 данные показывают, что минимальное и максимальное количество собственных чисел как субполосных, так и субинтервальных матриц, близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения (16), при значении  $\epsilon$  порядка 10<sup>-2</sup>-10<sup>-3</sup> различаются незначительно – на 2 собственных числа, а при значениях  $\epsilon$  порядка 10<sup>-4</sup>-10<sup>-7</sup> анализируемые величины различаются на 4 собственных числа.

В таблице 6 для изображений размерности 256×256 и 512×512 пикселей приведены значения минимального и максимального количества близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения (16) собственных чисел субполосных и субинтервальных матриц для различных разбиений области пространственных частот на подобласти.

Таблица 6  
Table 6

**Количество собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения (N=256 и N=512)**  
**The eigenvalues amount in terms of  $\epsilon$ -approximation to 1 (N=256& N=512)**

R <sub>1</sub>	$\epsilon$	Минимальное количество близких к 1 собственных чисел				Максимальное количество близких к 1 собственных чисел			
		Субполосные матрицы		Субинтервальные матрицы		Субполосные матрицы		Субинтервальные матрицы	
		N=256	N=512	N=256	N=512	N=256	N=512	N=256	N=512
4	10 <sup>-2</sup>	58	122	60	124	60	124	62	126
	10 <sup>-3</sup>	56	118	58	122	58	122	62	124
	10 <sup>-4</sup>	54	116	58	120	58	120	60	124
	10 <sup>-5</sup>	50	114	56	120	56	120	60	124
	10 <sup>-6</sup>	48	110	54	118	54	118	60	122
8	10 <sup>-2</sup>	46	108	54	116	54	116	58	122
	10 <sup>-3</sup>	26	58	28	60	28	60	30	62
	10 <sup>-4</sup>	24	56	28	58	28	58	30	62
	10 <sup>-5</sup>	22	52	26	58	26	58	28	60
	10 <sup>-6</sup>	20	50	24	56	24	56	28	60
10 <sup>-7</sup>	18	48	24	54	24	54	28	58	
10 <sup>-7</sup>	18	46	22	54	22	54	26	58	



16	$10^{-2}$	12	26	12	28	12	28	14	30
	$10^{-3}$	10	24	12	28	12	28	14	30
	$10^{-4}$	8	22	10	26	10	26	14	28
	$10^{-5}$	6	20	10	24	10	24	12	28
	$10^{-6}$	4	18	8	24	8	24	12	28
32	$10^{-2}$	4	12	6	12	6	12	6	14
	$10^{-3}$	2	10	4	12	4	12	6	14
	$10^{-4}$	2	8	4	10	4	10	6	14
	$10^{-5}$	0	6	2	10	2	10	4	12
	$10^{-6}$	0	4	2	8	2	8	4	12
	$10^{-7}$	0	4	2	8	2	8	4	12

Приведенные в таблице 6 данные для  $N=256$  и  $N=512$  показывают, что минимальное и максимальное количество собственных чисел как субполосных, так и субинтервальных матриц, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения (16), при значении  $\varepsilon$  порядка  $10^{-2}$  различаются незначительно – на 2 собственных числа, а при значениях  $\varepsilon$  порядка  $10^{-3}$ - $10^{-7}$  анализируемые величины различаются на 6-8 собственных чисел.

Данные таблиц 5 и 6 для более детального анализа представлены на рисунках 1 и 2 в виде графиков зависимостей количества близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения собственных чисел субполосных и субинтервальных матриц от величины  $\varepsilon$ .

На рис. 1 представлена зависимость от величины  $\varepsilon$  минимального количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения, субполосных и субинтервальных матриц.

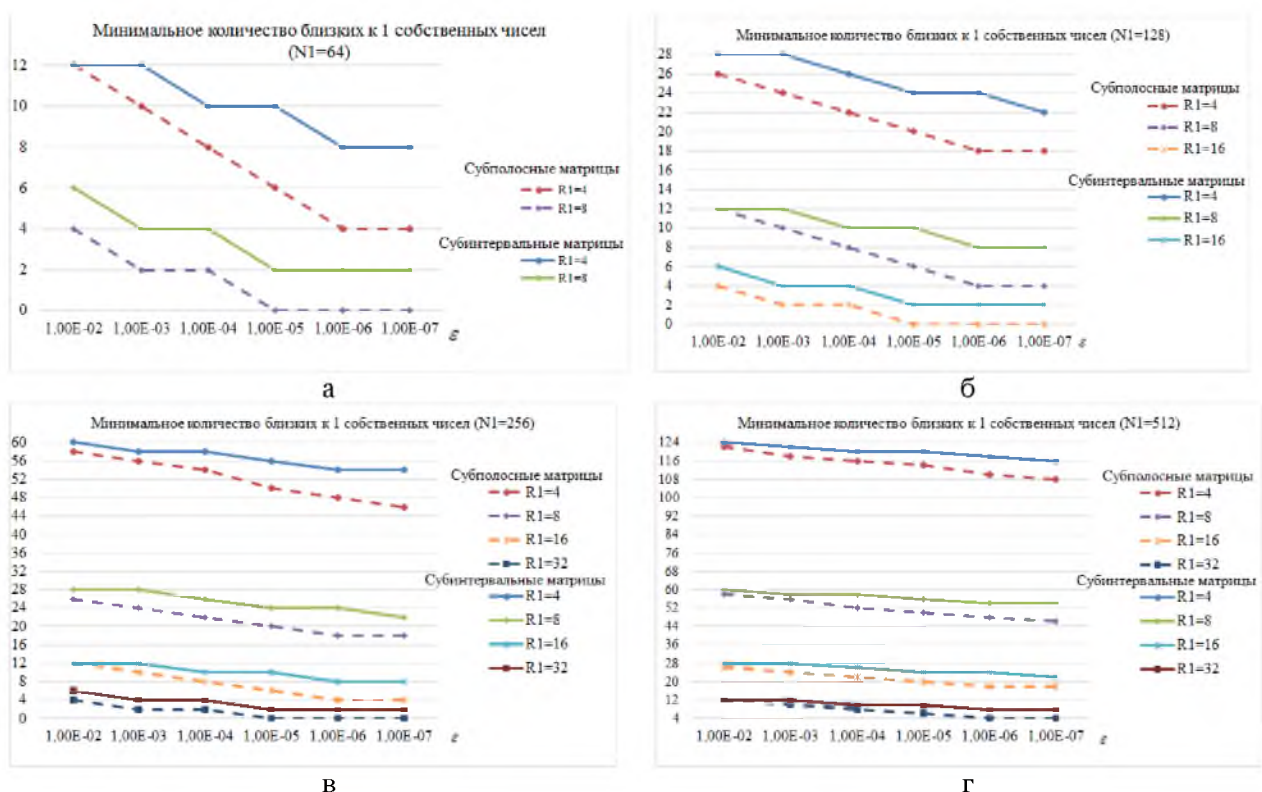


Рис. 1. Зависимость минимального количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения, субполосных и субинтервальных матриц от величины  $\varepsilon$ : а)  $N=64$ , б)  $N=128$ , в)  $N=256$ , г)  $N=512$   
 Fig. 1. The dependence of the minimum number of eigenvalues amount in terms of  $\varepsilon$ -approximation to 1 subband and subinterval matrices on the value of  $\varepsilon$ : а)  $N=64$ , б)  $N=128$ , в)  $N=256$ , г)  $N=512$

На графиках, приведенных на рисунке 1, наглядно видно, что различие в величине минимального количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения, увеличивается с ростом значения  $\varepsilon$ . При этом для субинтервальных матриц соответствующее количество собственных чисел субинтервальных матриц превышает соответствующее количество собственных чисел субполосных матриц.

На рис. 2 представлена зависимость от величины  $\varepsilon$  максимального количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\varepsilon$ -приближения, субполосных и субинтервальных матриц.

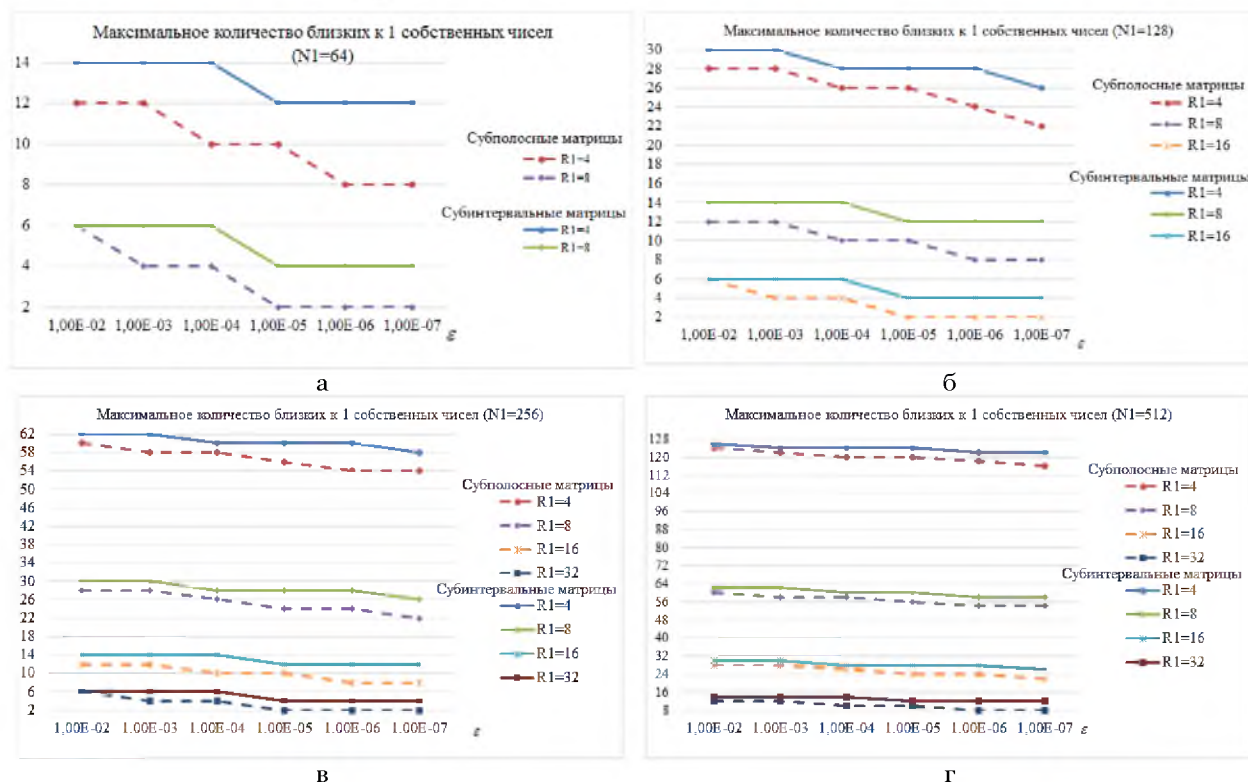


Рис. 2. Зависимость максимального количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения, субполосных и субинтервальных матриц от величины  $\epsilon$ : а)  $N=64$ , б)  $N=128$ , в)  $N=256$ , г)  $N=512$   
 Fig. 2. The dependence of the maximum number of eigenvalues amount in terms of  $\epsilon$ -approximation to 1 subband and subinterval matrices on the value of  $\epsilon$ : а)  $N=64$ , б)  $N=128$ , в)  $N=256$ , д)  $N=512$

На графиках, приведенных на рисунке 2, видно, что различие в величине максимального количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения, увеличивается с ростом значения  $\epsilon$ . При этом также как и в случае определения минимального количества собственных чисел для субинтервальных матриц соответствующее количество собственных чисел субинтервальных матриц превышает соответствующее количество собственных чисел субполосных матриц.

Таким образом, проведенные вычислительные эксперименты показывают, что с точки зрения количества собственных чисел, близких к 1 в смысле  $\epsilon$ -приближения, для субполосного скрытного внедрения данных в изображения предпочтительнее применять субинтервальные матрицы вида (13), что обеспечивает больший объем внедряемой информации.

**Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-07-01570-а.**

**Список литературы  
References**

Грибунин В.Г., Оков И.Н., Туринцев И.В., 2009. Цифровая стеганография. М., СОЛОН-ПРЕСС, 265.  
 Gribov V.G., Okov I.N., Turincev I.V., 2009. Digital steganography. Moscow, SOLON-PRESS, 265. (in Russian)  
 Конахович Г.Ф., Пузыренко А.Ю., 2006. Компьютерная стеганография. Теория и практика. К., МК-Пресс, 288.  
 Konahovich G.F., Puzyrenko A.Ju., 2006. Computer steganography. Theory and practice. K., MK-Press, 288. (in Russian)  
 Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., 2012. Субполосный метод скрытного внедрения информации в изображении. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 13(132): 216-221.  
 Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2012. Subband method of information secretive embedding into images. Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika. [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 13(132): 216-221. (in Russian)  
 Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В., Гахова Н.Н., 2014а. О субполосном внедрении информации в подобласти пространственных частот изображения-контейнера. Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 9: 85-87.  
 Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Gahova N.N., 2014. About information subband embedding into space frequencies subareas of image-container. Nejkomp'jutery: razrabotka, primenenie [Neurocomputers: development, application] 9: 85-87. (in Russian)  
 Черноморец А.А., Болгова Е.В., 2012. О погрешности стеговнедрений в изображение на основе метода относительной замены коэффициентов ДКП. Информационные системы и технологии. 6(74): 125-131.





Chernomorets A.A., Bolgova E.V., 2012. About the accuracy of steganographic embedding in the image using method of relative replacement of det coefficients. *Informacionnye sistemy i tehnologii* [Information systems and technologies] 6(74): 125-131. (in Russian)

Жилияков, Е.Г., Черноморец А.А., 2013а. Об устойчивости субполосного стеговнесения изображений к сжатию данных на основе алгоритма JPEG. *Вопросы радиоэлектроники, Сер. ЭВТ.* 1: 115-126.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2013. Stability of images sub-band stego embedding to data compression of the JPEG algorithm. *Voprosy radioelektroniki* [Problems of Radio Electronics] 1: 115-126. (in Russian)

Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В., Голошчапова В.А., 2015. О субполосном внедрении в цветные изображения. *Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика.* 1(198): 158-162.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Goloshchapova V.A., 2015. About subband embedding in colored images. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika.* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 1(198): 158-162. (in Russian)

Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В., Голошчапова В.А., 2014б. Оценка эффективности субполосного внедрения данных в изображение. *Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика.* 8(179): 200-206.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Goloshchapova V.A., 2014. Assessment of efficiency of subband embedding of data in the image. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika.* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 8(179): 200-206. (in Russian)

Черноморец А.А., Болгова Е.В., 2015а. Об анализе данных на основе косинусного преобразования. *Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика.* 1(198): 68-73.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., 2015. On the analysis of data based on the cosine transformation. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika.* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 1(198): 68-73. (in Russian)

Черноморец А.А., Болгова Е.В., 2015б. Об интегральных оценках косинусного преобразования Фурье. *Общество, наука и инновации: сборник статей Международной научно-практической конференции (Стерлитамак, 4 апреля 2015 г.) Стерлитамак, РИЦ АМИ.* 45-48.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., 2015. About integral estimates of cosine transform Fourier. *Obshchestvo, nauka i innovacii: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencija* [Society, science and innovation: a collection of articles of the International Scientific and Practical Conference (Sterlitamak, 4 April, 2015)] *Sterlitamak, RIC AMI:* 45-48. (in Russian)

Черноморец А.А., Болгова Е.В., Коваленко А.Н., 2015а. Об оценках косинусного преобразования. *Теоретические и практические вопросы науки XXI века: сборник статей Международной научно-практической конференции (Уфа 18 июня 2015 г.). Уфа, РИО МЦИИ ОМЕГА САЙНС.* 38-42.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Kovalenko A.N., 2015. About estimates cosine transform. *Teoreticheskie i prakticheskie voprosy nauki XXI veka: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii* [Theoretical and practical questions of science of the XXI century: a collection of articles of the International scientific-practical conference (Ufa, 18 June, 2015)] *Ufa, OMEGA RIO MTSII Sayns:* 38-42. (in Russian)

Черноморец А.А., Болгова Е.В., Черноморец Д.А., 2015б. Обобщенный субполосный анализ на основе унитарных преобразований. *Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика.* 7(204): 97-104.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Chernomorets D.A., 2015. The generalized subband analysis on the basis of unitary transformations. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika.* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 7(204): 97-104. (in Russian)

Черноморец А.А., Болгова Е.В., Петина М.А., 2015в. Об использовании унитарных преобразований для субполосного анализа сигналов и изображений. *Новая наука: стратегия и вектор развития: сборник статей Международной научно-практической конференции (Стерлитамак 19 июня 2015 г.). Стерлитамак, РИЦ АМИ.* 80-83.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., Petina M.A., 2015. On the use of unitary transformations for the signal and image subband analysis. *Novaja nauka: strategija i vektor razvitija: sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii* [The new science strategy and direction of development: a collection of articles of the International scientific-practical conference (Sterlitamak, 19 June, 2015)] *Sterlitamak, RIC AMI:* 80-83. (in Russian)

Черноморец А.А., Болгова Е.В., 2015. Об обобщенных субполосных матрицах при анализе сигналов на основе унитарных преобразований. *Актуальные вопросы развития инновационной деятельности в новом тысячелетии, Международный независимый институт математики и систем (МиС).* 7(18): 28-32.

Chernomorets A.A., Bolgova E.V., 2015. About generalized subband matrices in signals analysis on the basis of unitary transformations. *Aktual'nye voprosy razvitija innovacionnoj dejatel'nosti v novom tysjacheletii, Mezhdunarodnyj nezavisimyj institut matematiki i sistem (MiS)* [Actual questions of development of innovative activity in the new millennium, the International Independent Institute of Mathematics and Systems (M&S)] 7(18): 28-32. (in Russian)

Черноморец А.А., Волчков В.П., 2012. О свойствах квазисубполосных и G-субполосных матриц. *Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика.* 1(120): 126-134.

Chernomorets A.A., Volchkov V.P., 2012. About properties of quasisubband and G-subband matrices. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika.* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 1(120): 126-134. (in Russian)

Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., 2010. О частотном анализе изображений. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ.* 1: 94-103.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2010. About the frequency image analysis. *Voprosy radioelektroniki* [Problems of Radio Electronics] 1: 94-103. (in Russian)

Жилияков Е.Г., Черноморец А.А., Лысенко И.В., 2007. Метод определения точных значений долей энергии изображений в заданных частотных интервалах. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. РЛТ.* 4: 115-123.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Lysenko I.V., 2007. The method of determining the exact values of the image of energy shares in specified frequency ranges. *Voprosy radioelektroniki* [Problems of Radio Electronics] 4: 115-123. (in Russian)



Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., 2013б. Об оптимальном выделении субполосных компонент изображений. Информационные системы и технологии. 1(75): 5-11.

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., 2013. Optimal separation of image subband components. *Informacionnyye sistemy i tehnologii* [Information systems and technologies] 1(75): 5-11. (in Russian)

Жиляков Е.Г., Черноморец А.А., Болгова Е.В., 2014в. О разложении изображений по собственным векторам субполосных матриц. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15(186): 185-189 (DOI: 10.17686/sced\_rusnauka\_2014-1548).

Zhilyakov E.G., Chernomorets A.A., Bolgova E.V., 2014. About decomposition of images to the eigenvectors of subband matrix. *Nauchnye vedomosti BelGU. Ekonomika. Informatika*. [Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics Information technologies]. 15(186): 185-189 (DOI: 10.17686/sced\_rusnauka\_2014-1548). (in Russian)