УДК 517.984.5

ТЕОРЕМА ОБ ОГРАНИЧЕННОМ ВЛОЖЕНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В СМЫСЛЕ МАРШО НА ОСИ

THEOREM ABOUT BOUNDED EMBEDDING OF THE ENERGETIC SPACE GENERATED BY THE OPERATOR OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION IN THE SENSE OF MARCHAUD ON THE AXIS

М.В. Кукушкин
M.V. Kukushkin

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89a Shortanova St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: kukushkinmv@rambler.ru;

Аннотация
В данной работе построено энергетическое пространство, порожденное оператором дробного дифференцирования в смысле Маршо на оси, что в свою очередь дает возможность сформулировать аналоги классических теорем теории положительно определенных операторов. Показано, что в комплексном случае оператор дробного дифференцирования в смысле Маршо на оси обладает свойством сильной аккретивности.

Abstract
In this paper we construct the energetic space generated by the operator of fractional differentiation in the sense of Marchaud on the axis, this in turn enables us to formulate analogues of classical theorems of the theory positive defined operators. It is shown that in the complex case, the operator of fractional differentiation in the sense of Marchaud on the axis has a strong accretive property .

Ключевые слова: дробная производная, теоремы вложения, энергетическое пространство.
Keywords: Fractional derivative, embedding theorems, energetic space.

Введение

Основополагающими в теории дробного исчисления считаются работы таких математиков как Риман Б., Лиувилль Ж., Вейль Г. В наше время теория операторов дробного дифференцирования получила развитие в работах Киприянова И.А., Джрбашана М.М., Самко С.Г., Нахушева А.М. Последний из перечисленных авторов внес значительный вклад в развитие качественной теории операторов дробного дифференцирования, в частности им было доказано свойство положительности оператора дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля на отрезке [1].

В данной работе рассматривается возможность построения гильбертова пространства путем пополнения унитарного пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования в смысле Маршо на оси. Способ построения пространства является в некотором смысле обобщением [2, с. 44]. Доказывается теорема вложения построенного гильбертова пространства в весовое пространство Лебега суммируемых с квадратом функций. Одним из следствий данного результата, является априорная оценка решения сингулярного дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной в смысле Маршо на оси в младших членах.

Если это не оговорено дополнительно, всюду будем использовать обозначения [3], будем полагать $0<\alpha<1$. Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Определим соответственно лево-сторонний и правосторонний дробные интегралы в смысле Римана-Лиувилля на вещественной оси R^1 (далее оси)

$$(I_+^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt,\quad (I_-^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f(x+t)}{t^{1-\alpha}}dt,$$

будем рассматривать класс функций представимых дробным интегралом

$$I^{\alpha}(L_{\theta})\overset{def}{=}I_+^{\alpha}(L_{\theta}(R^1))=I_-^{\alpha}(L_{\theta}(R^1)),\ 1<\theta<1/\alpha.$$

Определим усеченные дробные производные в смысле Маршо на оси с помощью выражений

$$(\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^{\alpha}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{\alpha+1}}dt,$$

следуя определению (5.60) [3, с. 96], дробные производные в смысле Маршо на оси будем понимать как условно сходящиеся интегралы

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha}f=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^{\alpha}f,$$

где сходимость понимается в смысле нормы $L_r(R^1)$, r – некоторое фиксированное число, $1<r<1/\alpha$. В предположениях относительно весовой функции $\rho\in I^{\alpha}(L_q)$, $\rho(x)>0$, определим на вещественном линейном пространстве $I^{\alpha}(L_{\theta})$ билинейную форму формальным выражением

$$\langle u,v\rangle_{\alpha,\rho}=\frac{1}{2}\langle u,\mathbf{D}_+^{\alpha}v\rangle_{L_2(R^1,\rho)}+\frac{1}{2}\langle v,\mathbf{D}_-^{\alpha}u\rangle_{L_2(R^1,\rho)}. \tag{1}$$

Вспомогательные утверждения

Заметим, что в силу преемственности свойств скалярного произведения пространства $L_2(R^1,\rho)$, не возникает сомнения в верности выполнения аксиом скалярного произведения для формы (1), кроме быть может аксиомы

$$\langle u,u\rangle_{\alpha,\rho}>0,\ u\neq 0. \tag{2}$$

Утверждения доказанные ниже дают возможность убедиться в выполнении аксиомы скалярного произведения (2) для формы (1), при заданных условиях для весовой функции.

Лемма 1. Пусть $v\in C_0^{\infty}(R^1)$, тогда на оси имеет место равенство

$$\frac{d^n}{dx^n}(I_+^{\alpha}v)(x)=(I_+^{\alpha}v^{(n)})(x),\ n=1,2,\dots. \tag{3}$$

Доказательство. Положим $n=1$, покажем равномерную относительно x на любом отрезке оси сходимость несобственных интегралов

$$I_1(x)=\int_0^1\frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt,\quad I_2(x)=\int_1^{\infty}\frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt. \tag{4}$$

Имеем следующие оценки

$$\left|\int_{\varepsilon}^1\frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt-\int_0^1\frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt\right|\le\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha}\|v'\|_{L_{\infty}(R^1)}; \tag{5}$$

$$\left|\int_1^A \frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt - \int_1^\infty \frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt\right| = \left|t^{\alpha-1}v(x-t)\Big|_A^\infty + (1-\alpha)\int_A^\infty \frac{v(x-t)}{t^{2-\alpha}}dt\right| \le 2A^{\alpha-1}\|v\|_{L_\infty(\mathrm{R}^1)}. \quad (6)$$

Оценки (5), (6) доказывают равномерную сходимость интегралов (4). В силу теоремы 5.3 [3, с. 91] $I_+^\alpha v \in L_p(\mathrm{R}^1)$, $p = \theta/(1-\alpha\theta)$, $1 < \theta < 1/\alpha$, значит на любом отрезке оси существует точка x_0 в которой $(I_+^\alpha v)(x_0) < \infty$. Следовательно в силу известной теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, получим справедливость (3) при $n = 1$ для любого отрезка оси, а значит и для всей оси, причем $I_+^\alpha v \in C^1(\mathrm{R}^1)$. Применяя метод математической индукции завершим доказательство равенства (3). *Лемма доказана.*

Лемма 2. Пусть $u \in I_+^\alpha(C_0^\infty(\mathrm{R}^1))$, тогда $u^2 \in I^\alpha(L_r)$.

Доказательство. Введем обозначение $u^2 = g$. Покажем, что при $\varepsilon \downarrow 0$ семейство функций $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha g$ обладает свойством фундаментальности в пространстве $L_r(\mathrm{R}^1)$, $1 < r < 1/\alpha$. Покажем, что функция $g' \in L_r(\mathrm{R}^1)$, для этого докажем, что $u \in L_\infty(\mathrm{R}^1)$, $u' \in L_r(\mathrm{R}^1)$. В силу условия теоремы имеем $u(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty v(x-t)t^{\alpha-1}dt$, $v \in C_0^\infty(\mathrm{R}^1)$. при этом заметим, что $v(x) = 0, |x| \ge M$ для некоторого числа $M > 0$, следовательно функцию u можно представить в виде

$$u(x) = \begin{cases} I_1(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_{x-M}^{x+M} v(x-t)t^{\alpha-1}dt, \; x \ge M, \\ I_2(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^{2M} v(x-t)t^{\alpha-1}dt, \; x < M. \end{cases}$$

Оценим I_1, I_2, имеем

$$\Gamma(\alpha)|I_1(x)| \le \left|\int_{x-M}^{x+M} v(x-t)t^{\alpha-1}dt\right| \le \|v\|_{L_\infty(\mathrm{R}^1)}\left|\int_{x-M}^{x+M} t^{\alpha-1}dt\right| = \frac{1}{\alpha}\|v\|_{L_\infty(\mathrm{R}^1)}\left|(x+M)^\alpha - (x-M)^\alpha\right| < \frac{2M}{\alpha}\|v\|_{L_\infty(\mathrm{R}^1)},$$

$$|I_2(x)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|v\|_{L_\infty(\mathrm{R}^1)}\left|\int_0^{2M} t^{\alpha-1}dt\right|.$$

Из последних оценок следует, что $u \in L_\infty(\mathrm{R}^1)$. Используя (3), неравенство Минковского, имеем

$$\Gamma(\alpha)\|u'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} \le \left(\int_{-\infty}^\infty \left|\int_0^A \frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_{-\infty}^\infty \left|\int_A^\infty \frac{v'(x-t)}{t^{1-\alpha}}dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = I_3 + I_4, \; A > 0,$$

применив обобщенное неравенство Минковского к I_3, получим:

$$I_3 \le \int_0^A t^{\alpha-1}\left(\int_{-\infty}^\infty |v'(x-t)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} dt = \frac{A^\alpha}{\alpha}\|v'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} < \infty.$$

Применяя формулу интегрирования по частям к внутреннему интегралу выражения I_4, затем используя неравенство Минковского, обобщенное неравенство Минковского, имеем следующую оценку

$$I_4 = \left(\int_{-\infty}^\infty \left|t^{\alpha-1}v(x-t)\Big|_A^\infty + (1-\alpha)\int_A^\infty \frac{v(x-t)}{t^{2-\alpha}}dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\int_{-\infty}^\infty \left|A^{\alpha-1}v(x-A)\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + (1-\alpha)\left(\int_{-\infty}^\infty \left|\int_A^\infty \frac{v(x-t)}{t^{2-\alpha}}dt\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le A^{\alpha-1}\left(\int_{-\infty}^\infty |v(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + (1-\alpha)\int_A^\infty t^{\alpha-2}\left(\int_{-\infty}^\infty |v(x-t)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} dt = 2A^{\alpha-1}\|v\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} < \infty,$$

из полученных оценок для I_3, I_4 следует, что $u' \in L_r(\mathrm{R}^1)$. Следовательно

$$\|g'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} = 2\|uu'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} \le 2\|u\|_{L_\infty(\mathrm{R}^1)}\|u'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} < \infty. \quad (7)$$

Далее используя последовательно обобщенное неравенство Минковского, неравенство Гельдера, теорему Фубини, имеем для произвольных $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$

$$\left\| \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{g(x)-g(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt - \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{g(x)-g(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt \right\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{g(x)-g(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)-g(x-t)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} dt = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^t g'(x-\tau) d\tau \right|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} dt \le$$

$$\le \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t |g'(x-\tau)|^r d\tau \left(\int_0^t d\tau \right)^{\frac{r}{r'}} dx \right)^{\frac{1}{r}} dt = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1+1/r'} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^t |g'(x-\tau)|^r d\tau \right)^{\frac{1}{r}} dt =$$

$$= \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1+1/r'} \left(\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x-\tau)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} dt = \|g'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1+1/r'+1/r} dt = \frac{\varepsilon_1^{1-\alpha} - \varepsilon_2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|g'\|_{L_r(\mathrm{R}^1)}.$$

Учитывая (7), из последней оценки делаем вывод, что при $\varepsilon \downarrow 0$ семейство функций $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} g$ обладает свойством фундаментальности, следовательно в силу полноты пространства $L_r(\mathrm{R}^1)$ сходится по норме пространства $L_r(\mathrm{R}^1)$. Покажем, что $g \in L_p(\mathrm{R}^1)$ для конечного $p > 1/(2-2\alpha)$, для этого достаточно заметить, что из теоремы 5.3 [3, с. 91] следует оценка $\|g\|_{L_p(\mathrm{R}^1)} \le C\|v\|_{L_\theta(\mathrm{R}^1)}^2 < \infty$, $\theta = 2p/(1+2\alpha p)$, $C > 0$. В силу сказанного можно утверждать, что выполнены условия теоремы 6.2 [3, с.107], следовательно функция $g(x)$ представима дробным интегралом на оси от функции из класса $L_r(\mathrm{R}^1)$. *Лемма доказана.*

Основная теорема

Теорема 1. Пусть действительные числа θ и q удовлетворяют условиям

$$\frac{2}{\theta} + \frac{1}{q} = 1 + 2\alpha, \quad 1 < q < \frac{1}{\alpha}, \quad \theta < \frac{1}{\alpha}, \tag{8}$$

в отношении весовой функции ρ выполнены следующие условия: $\rho = I_-^{\alpha}(\varphi), \varphi \in L_q(\mathrm{R}^1), \varphi > 0$. Тогда: 1. Пара билинейная форма (1) и линейное пространство $I^{\alpha}(L_\theta)$ образует унитарное пространство $\tilde{N}_{\alpha}(L_\theta(\mathrm{R}^1), \rho)$, 2. Полученное в результате пополнения гильбертово пространство $N_{\alpha}(L_\theta(\mathrm{R}^1), \rho)$ ограниченно вложено в пространство $L_2(\mathrm{R}^1, \varphi)$.

Доказательство. 1. Доказав, что имеет место (2) мы докажем первую часть данной теоремы, так как выполнение остальных аксиом скалярного произведения для билинейной формы (1) очевидно. Положим $u_n = I_+^{\alpha}(\psi_n)$, $\{\psi_n\} \subset C_0^{\infty}(\mathrm{R}^1)$, тогда в силу леммы 2 $\{u_n^2\} \subset I^{\alpha}(L_r)$. Следовательно согласно теореме 6.1 [3, с. 106] $\mathbf{D}_+^{\alpha} u_n, \mathbf{D}_+^{\alpha} u_n^2 \in L_r(\mathrm{R}^1)$, и почти всюду справедливо неравенство

$$u_n(x)(\mathbf{D}_+^{\alpha} u_n)(x) - \frac{1}{2}(\mathbf{D}_+^{\alpha} u_n^2)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{u_n^2(x) - u_n(x) u_n(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt -$$

$$- \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{u_n^2(x) - u_n^2(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\left(u_n(x) - u_n(x-t)\right)^2}{t^{\alpha+1}} dt \ge 0. \tag{9}$$

Выберем $r = q/(q(1+\alpha)-1)$, это возможно поскольку легко видеть, что из условия теоремы следует $1 < q/(q(1+\alpha)-1) < 1/\alpha$. Тогда в силу неравенства (9), следствия 2 теоремы 6.2 [3, с. 108], теоремы 6.1 [3, с. 106], имеем следующую оценку

$$\langle u_n, u_n \rangle_{\alpha,\rho} = \langle u_n, \mathbf{D}_+^{\alpha} u_n \rangle_{L_2(\mathrm{R}^1,\rho)} \ge \frac{1}{2} \langle \rho, \mathbf{D}_+^{\alpha} u_n^2 \rangle_{L_2(\mathrm{R}^1)} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{D}_-^{\alpha} \rho, u_n^2 \rangle_{L_2(\mathrm{R}^1)} = \frac{1}{2} \|u_n\|_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}^2. \tag{10}$$

Покажем, что неравенство (10), осуществив предельный переход, можно распространить на класс $I^{\alpha}(L_{\theta})$. Для определенности представим функцию u в виде левостороннего дробного интеграла $u=I_{+}^{\alpha}(\psi)$, $\psi\in L_{\theta}(\mathrm{R}^1)$, при этом данный выбор не ограничивает общности дальнейших рассуждений. Воспользуемся плотностью множества $C_0^{\infty}(\mathrm{R}^1)$ в пространстве $L_{\theta}(\mathrm{R}^1)$, положим, что $\|\psi_n-\psi\|_{L_{\theta}(\mathrm{R}^1)}\to 0$. Заметим, что согласно теореме 5.3 [3, с. 91] имеет место неравенство

$$\left\|I_{+}^{\alpha}(\psi_n-\psi)\right\|_{L_p(\mathrm{R}^1)}\le C\|\psi_n-\psi\|_{L_{\theta}(\mathrm{R}^1)},\quad p=\frac{\theta}{1-\alpha\theta},\quad C=\mathrm{const}. \tag{11}$$

Рассмотрим

$$\left|\|u_n\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}-\|u\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}\right|=\left|\left\langle u_n^2,\varphi\right\rangle_{L_2(\mathrm{R}^1)}-\left\langle u^2,\varphi\right\rangle_{L_2(\mathrm{R}^1)}\right|\le$$
$$\le\|u_n-u\|_{L_p(\mathrm{R}^1)}\|(u_n+u)\varphi\|_{L_{\gamma}(\mathrm{R}^1)}\le\|u_n-u\|_{L_p(\mathrm{R}^1)}\|(u_n+u)\|_{L_{\gamma t}(\mathrm{R}^1)}\|\varphi\|_{L_{\gamma s}(\mathrm{R}^1)}, \tag{12}$$

где p,γ и $t,s>1$ соответственно взаимно сопряжены. Для доказательства ограниченности правой части (12) преобразуем условие (8) к виду $1/\theta-\alpha=1+\alpha-1/\theta-1/q$. После умножения левой и правой части последнего равенства на θq и элементарных преобразований, имеем

$$\frac{q}{q(\theta(1+\alpha)-1)-\theta}=\frac{1}{1-\alpha\theta},$$

умножим левую и правую части на $\theta(1+\alpha)-1$, получим равенство

$$\frac{q(\theta(1+\alpha)-1)}{q(\theta(1+\alpha)-1)-\theta}=\frac{\theta(1+\alpha)-1}{1-\alpha\theta}.$$

Выберем $t=(\theta(1+\alpha)-1)/(1-\alpha\theta)$, с помощью элементарных преобразований получим

$$1-\frac{1}{t}=\frac{\theta}{q(\theta(1+\alpha)-1)},\quad s=\frac{t}{t-1}=\frac{q(\theta(1+\alpha)-1)}{\theta}.$$

С учетом (11) выразим γ, имеем

$$\frac{1}{\gamma}=1-\frac{1}{p}=\frac{\theta(1+\alpha)-1}{\theta},\quad \gamma=\frac{\theta}{\theta(1+\alpha)-1}.$$

В силу сказанного соответственно для: t,s,γ,p имеем равенства $\gamma t=p,\ \gamma s=q.$ Из чего следует ограниченность правой части (12). Применив неравенство (11) к первому и второму сомножителям правой части неравенства (12), очевидно из полученной оценки следует

$$\|u_n\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}\to\|u\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}.$$

Существование предела в правой части (10) доказано. Рассмотрим левую часть (10). С учетом равенства почти всюду $\mathbf{D}_{+}^{\alpha}(u_n-u)=\psi_n-\psi$ (теорема 6.1 [3, с. 106]), используя неравенство Гельдера имеем оценку

$$\left|\left\langle u_n,u_n\right\rangle_{\alpha,\rho}-\left\langle u,u\right\rangle_{\alpha,\rho}\right|=\left|\left\langle u_n-u,u_n\right\rangle_{\alpha,\rho}+\left\langle u,u_n-u\right\rangle_{\alpha,\rho}\right|\le\|(u_n-u)\rho\|_{L_{\mu}}\|\psi_n\|_{L_{\theta}}+\|u\rho\|_{L_{\mu}}\|\psi_n-\psi\|_{L_{\theta}}\le$$
$$\le\|\rho\|_{L_{\mu t}}\left\{\|u_n-u\|_{L_{\mu s}}\|\psi_n\|_{L_{\theta}}+\|u\|_{L_{\mu s}}\|\psi_n-\psi\|_{L_{\theta}}\right\}, \tag{13}$$

где μ,θ и $s,t>1$ соответственно взаимно сопряжены. Покажем, что правая часть (13) стремится к нулю, для этого преобразуем условие (8) к виду $1/q-\alpha=1+\alpha-2/\theta$. Умножим левую и правую части последнего равенства на $\theta/(\theta-1)$, получим

$$\frac{\theta(1-\alpha q)}{q(\theta-1)}=\frac{\theta(1+\alpha)-2}{\theta-1}.$$

Положим

$$t=\frac{q(\theta-1)}{\theta(1-\alpha q)}=\frac{\theta-1}{\theta(1+\alpha)-2},$$

тогда имеем

$$\mu t=\frac{\theta t}{\theta-1}=\frac{q}{1-\alpha q},\ \mu s=\frac{\theta}{\theta-1}\cdot\frac{t}{t-1}=\frac{\theta}{1-\alpha\theta}=p.$$

Учитывая оценку (11) делаем вывод, что правая часть (13) стремится к нулю, следовательно

$$\langle u_n,u_n\rangle_{\alpha,\rho}\to\langle u,u\rangle_{\alpha,\rho}.$$

Осуществив предельный переход в левой и правой части (10), имеем следующее неравенство

$$\langle u,u\rangle_{\alpha,\rho}\geq\frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)},\ u\in I^\alpha(L_\theta), \tag{14}$$

из чего очевидно следует (2). Также заметим, что из оценки (13) следует ограниченность левой части (14). Первая часть теоремы доказана.

Унитарное пространство образованное парой: билинейной формой (2) и линейным пространством $I^\alpha(L_\theta)$ будем обозначать $\tilde{N}_\alpha(L_\theta(\mathrm{R}^1),\rho)=\tilde{N}_\alpha(L_\theta,\rho)$. Полученное в результате пополнения гильбертово пространство обозначим через $N_\alpha(L_\theta(\mathrm{R}^1),\rho)=N_\alpha(L_\theta,\rho)$.

2. Полностью повторяя ход доказательства теоремы 1.2 [4] докажем, что между элементами пространства $N_\alpha(L_\theta,\rho)$ и $L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)$ можно установить линейное соответствие такое, что: а) каждому элементу $u\in N_\alpha(L_\theta,\rho)$ приводится в соответствие единственный элемент $u'\in L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)$, б) если элементам $u,v\in N_\alpha(L_\theta,\rho)$ приведены в соответствие $u',v'\in L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)$, то линейной комбинации $\eta u+\mu v\in N_\alpha(L_\theta,\rho)$, $\eta,v\in\mathrm{R}^1$ приводится в соответствие элемент $\eta u'+\mu v'\in L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)$. Линейность соответствия доказана.

Выше было получено неравенство (14) справедливое для элементов унитарного пространства $\tilde{N}_\alpha(L_\theta,\rho)$. Покажем, что это неравенство верно для любого элемента пространства $u\in N_\alpha(L_\theta,\rho)$. Допустим, что $u\in N_\alpha(L_\theta,\rho)$, тогда существует последовательность элементов $u_n\in\tilde{N}_\alpha(L_\theta,\rho)$, такая, что

$$\|u_n-u'\|_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}\to 0,\ \|u_n-u_m\|_{\alpha,\rho}\to 0,\ n,m\to\infty,$$

где u' образ u определенный однозначно, как было доказано в подпункте (а). Используя общие свойства нормы, осуществим предельный переход в (14). Получим справедливость (14) для элементов $N_\alpha(L_\theta,\rho)$. Это означает, что $N_\alpha(L_\theta,\rho)$ ограничено вложено в $L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)$. *Теорема доказана.*

Следствие 1. При условиях теоремы 1 в случае комплексного линейного пространства $L_\theta(\mathrm{R}^1)$ имеет место аналог неравенства сильной аккретивности

$$\mathrm{Re}\left\langle f,\mathbf{D}^\alpha_+f\right\rangle_{L_2(\mathrm{R}^1,\rho)}\geq\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)},\ f\in I^\alpha(L_\theta). \tag{15}$$

Действительно неравенство (15) следует из теоремы 1 если учесть следующие очевидные равенства

$$\mathrm{Re}\left\langle f,\mathbf{D}^\alpha_+f\right\rangle_{L_2(\mathrm{R}^1,\rho)}=\left\langle u,\mathbf{D}^\alpha_+u\right\rangle_{L_2(\mathrm{R}^1,\rho)}+\left\langle v,\mathbf{D}^\alpha_+v\right\rangle_{L_2(\mathrm{R}^1,\rho)},\ \|f\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}=\|u\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)}+\|v\|^2_{L_2(\mathrm{R}^1,\varphi)},$$
$$u=\mathrm{Re}f,\quad v=\mathrm{Im}f.$$

Замечание 1. Теорема 1 находит применение в доказательстве единственности решения сингулярного уравнения второго порядка с дробной производной в смысле Маршо на оси в младших членах. Если рассмотреть задачу на оси с оператором L (3.23) [5, с. 344], имеющим в качестве дополнительного члена дробную производную в смысле Маршо на оси, то из теоремы 1 будет следовать неравенство аналогичное (3.25) [5, с. 344], которое по сути является априорной оценкой решения задачи.

Заключение

В настоящей работе построено энергетическое пространство порожденное оператором дробного дифференцирования в смысле Маршо на оси, в следствии чего можно сформулировать аналоги классических теорем теории положительно определенных операторов [4]. Энергетическое неравенство (14) доказанное в теореме 1 находит применение в доказательствах теорем единственности решений для сингулярных дифференциальных уравнений второго порядка с дробной производной в смысле Маршо на оси (Римана-Лиувилля на оси) в младших членах, при этом используется метод априорных оценок примененный в работах [6], [7] к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка с дробной производной в смысле Римана-Лиувилля на отрезке и замкнутой области.

Список литературы
References

1. Нахушев А.М. 1998. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференци-рования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа . Дифференциальные уравнения, 34 (1): 101-109.

Nahushev A.M. 1998. About positive of operators of continuous and discrete differentiation and integration, are very important in fractional calculus and theory of equations of mixed type. Differential equations. 34 (1): 101-109.

2. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 272.

Nahushev A.M. 2003. Fractional calculus and its application. M.: Fizmatlit, 272.

3. Самко С.Г. Килбас А.А. Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения .Минск "Наука и техника", 688.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integrals and derivatives of fractional order, and some applications. Minsk "Science and Technology", 688.

4. Кукушкин М.В. 2016. О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. № 6 (227), 42: 60-70.

Kukushkin M.V. 2016. About the weighted spaces of fractionally differentiable functions.// Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. №6 (227), 42: 60-70.

5. Като Т. 1972. Теория возмущений линейных операторов . Москва."Мир", 740.

Kato T. 1966. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 740.

6.Кукушкин М.В. 2015. Обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной. Доклады Национальной академии наук Республики Армения. 155 (3): 185–193.

Kukushkin M.V. 2015. Generalized boundary value problem for a second order equation with fractional derivative. Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, 155(3): 185–193.

7. Кукушкин М.В. 2015. Метод фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для приближенного решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах . Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. № 17 (214), 40: 88–93.

Kukushkin M.V. 2015. Fictitious domains method with continuation with respect to leading coefficients for numerical solution of boundary-value problem of the second order differential equation with fractional derivatives in lower terms. Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. 2015. №17(214), 40: 88–93.