УДК 517.927.6

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

SPECTRAL PROPERTIES OF MULTIPOINT BOUNDARY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR OF ODD ORDER WITH SUMMABLE POTENTIAL

С.И. Митрохин
S.I. Mitrokhin

НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, г. Москва, Ленинские Горы, д. 1

SRCC MSU Lomonosov, Russia, Moscow, Leninskie Gory, 1

E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Аннотация
В статье изучается дифференциальный оператор высокого нечётного порядка с многоточечными граничными условиями. При этом потенциал оператора предполагается суммируемой функцией на отрезке. Дифференциальное уравнение, определяющее оператор, сведено к интегральному уравнению. Интегральное уравнение изучено методом последовательных приближений. Получена асимптотика решений дифференциального уравнения, задающего оператор, при больших значениях спектрального параметра. Граничные условия изучены с помощью этой асимптотики. Выведено уравнение на собственные значения исследуемого оператора. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения. Найдена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора в различных секторах индикаторной диаграммы.

Abstract
In this paper a differential operator of high odd order with multipoint boundary conditions is studied. The potential of the operator is assumed to be a summable function on the interval. The differential equation defining the operator is reduced to an integral equation. This integral equation has been studied by the method of successive approximations. As a result, the asymptotics of the solutions of the differential equation determining the operator are obtained for large values of the spectral parameter. Using this asymptotics the boundary conditions are studied. The equation for the eigenvalues of the studied operator is derived. The indicator diagram of the equation for the eigenvalues is investigated. The asymptotics of the eigenvalues of the differential operator under investigation in various sectors of the indicator diagram is found.

Ключевые слова: спектральный параметр, дифференциальный оператор, суммируемый потенциал, асимптотика решений дифференциального уравнения, индикаторная диаграмма, асимптотика собственных значений.
Keywords: spectral parameter, differential operator, summable potential, asymptotics of solutions of differential equations, indicator diagram, the asymptotics of the eigenvalues.

Исследуем следующую краевую задачу для дифференциального оператора, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(21)}(x)+q(x)\cdot y(x)=\lambda\cdot a^{21}\cdot y(x), 0\le x\le\pi, a>0, \tag{1}$$

с многоточечными граничными условиями

$$y(x_k)=0, x_k=m_k\cdot\pi, k=1,2,...,21; 0=m_1<m_2<m_3<...<m_{20}<m_{21}=1. \qquad (2)$$

Мы предполагаем, что функция $q(x)$ – суммируемая функция на отрезке $[0;\pi]$:

$$q(x)\in L_1[0;\pi](\Leftrightarrow)\left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x=q(x) \qquad (3)$$

почти для всех x из отрезка $[0;\pi]$.

Цель статьи – найти асимптотику собственных значений дифференциального оператора (1) – (2) с условием (3) суммируемости потенциала.

Свойства многоточечных краевых задач (типа краевой задачи Валле-Пуссена или интерполяционной краевой задачи) изучаются уже довольно давно. В работе [1] найдены двусторонние оценки функции Грина многоточечной краевой задачи. В работе [2] в случае неосциллирующего дифференциального оператора установлены осцилляционные свойства спектра и доказана знакорегулярность функции Грина. В работе [3] изучены свойства функции Грина квазиинтерполяционной краевой задачи и доказано, что соответствующая спектральная задача имеет дискретный спектр, причём минимальное по модулю собственное значение является вещественным, простым и строго положительным. Асимптотика собственных значений в этих статьях не изучалась.

Впервые асимптотика собственных значений (для дифференциального оператора четвёртого порядка) была изучена в работе [4]. Внутренние точки граничных условий делили отрезок задания оператора на равные части (соизмеримый случай). Потенциал оператора предполагался достаточно гладкой функцией. Был вычислен регуляризованный след этого оператора.

Случай суммируемого потенциала впервые был изучен в работе [5]. Была найдена асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций двухточечной краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. До этого автором в работах [6]-[8] были исследованы различные типы многоточечных операторов, у которых внутри отрезка изучения оператора находились точки разрыва коэффициентов оператора. В работе [9] рассматривались такие многоточечные граничные условия, при которых наблюдался эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений.

В работах [10]-[11] был предложен метод, отличный от метода работы [5], для изучения операторов четвёртого и шестого порядков с суммируемыми коэфициентами. Получена асимптотика решений дифференциальных уравнений, задающих эти операторы, изучены граничные условия, найдена асимптотика собственных значений.

В работах [12]-[13] изучались операторы с сингулярными потенциалами, типа дельта-функций или потенциалами-распределениями. В работе [14] изучен оператор высокого порядка с разделёнными граничными условиями с суммируемым потенциалом.
В работе [15] для оператора восьмого порядка с суммируемым потенциалом рассмотрены такие многоточечные граничные условия, при которых наблюдается эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений этого оператора.

Асимптотика решений дифференциального уравнения (1)

Пусть $\lambda=s^{21}, s=\sqrt[21]{\lambda}$, причём для корректности дальнейших рассуждений зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[21]{1}=+1$.

Пусть $w_k^{21}=1$, т.е. $w_k=e^{\frac{2\pi i}{21}\cdot(k-1)}, k=1,2,...,21, w_k=w_{k+21}$, , w_k – различные корни двадцать первой степени из единицы. Таким образом, имеем:

$$w_1 = 1, w_2 = e^{\frac{2\pi i}{21}} = \cos\left(\frac{2\pi}{21}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{21}\right) = D_2 + iR_2, w_3 = e^{\frac{4\pi i}{21}} = \cos\left(\frac{4\pi}{21}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{21}\right) = D_3 + iR_3, \ldots \tag{4}$$

Методами работ [10], [11] и [16, гл. 2] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{21} C_k \cdot y_k(x,s); y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{21} C_k \cdot y_k^{(m)}(x,s), m = 1,2,\ldots,20, \tag{5}$$

где $C_k (k = 1,2,\ldots,21)$ – произвольные постоянные, при этом

$$y_k(x,s) = \exp(aw_k sx) - \frac{A_{20,k}(x,s)}{21 \cdot a^{20} \cdot s^{20}} + \underline{O}\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} s| \cdot ax)}{s^{40}}\right), k = 1,2,\ldots,21, \tag{6}$$

$$A_{20,k}(x,s) = w_1 \exp(aw_1 sx) \cdot \int_0^x q(t) \cdot \exp(a(w_k - w_1)st) \cdot dt_{ak1} + w_2 \exp(aw_2 sx) \cdot$$

$$\cdot \int_0^x q(t) \cdot \exp(a(w_k - w_2)st) \cdot dt_{ak2} + \ldots + w_{21} \exp(aw_{21} sx) \cdot \int_0^x q(t) \cdot \exp(a(w_k - w_{21})st) \cdot dt_{ak,21}, k = 1,2,\ldots,21, \tag{7}$$

$$y_k^{(m)}(x,s) = (as)^m \left\{ w_k^m \cdot \exp(aw_k sx) - \frac{A_{20,k}^m(x,s)}{p_{11} \cdot s^{20}} + \underline{O}\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im} s| \cdot ax)}{s^{40}}\right) \right\}, k = 1,2,\ldots,21; m = 1,2,\ldots,20; \tag{8}$$

$$A_{20,k}^m(x,s) = \sum_{n=1}^{21} w_n^{m+1} \cdot \exp(aw_n sx) \cdot \left(\int_0^x \ldots\right)_{akn}, k = 1,2,\ldots,21, m = 1,2,\ldots,20. \tag{9}$$

Изучение граничных условий (2)

Подставляя формулы (5) в граничные условия (2), получаем:

$$y(x_n,s) \overset{(2)}{=} 0 (=) \sum_{k=1}^{21} C_k \cdot y_k(x_n,s) = 0 (n = 1,2,\ldots,21). \tag{10}$$

Система (10) представляет собой систему из 21 однородного линейного уравнения с 21 неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_{21}$. По методу Крамера, такая система имеет ненулевые решения $(C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_{21}^2 \neq 0)$ только в том случае, когда её определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) имеет следующий вид:

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1(x_1,s) & y_2(x_1,s) & \ldots & y_{20}(x_1,s) & y_{21}(x_1,s) \\ y_1(x_2,s) & y_2(x_2,s) & \ldots & y_{20}(x_2,s) & y_{21}(x_2,s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(x_{20},s) & y_2(x_{20},s) & \ldots & y_{20}(x_{20},s) & y_{21}(x_{20},s) \\ y_1(x_{21},s) & y_2(x_{21},s) & \ldots & y_{20}(x_{21},s) & y_{21}(x_{21},s) \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Используя формулы (6) – (9), уравнение (11) можно переписать в виде

$$f(s)=\begin{vmatrix} b_{11}(s) & b_{12}(s) & \dots & b_{1,20}(s) & b_{1,21}(s) \\ b_{21}(s) & b_{22}(s) & \dots & b_{2,20}(s) & b_{2,21}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{21,1}(s) & b_{21,2}(s) & \dots & b_{21,20}(s) & b_{21,21}(s) \end{vmatrix}=0, \tag{12}$$

$$b_{kn}(s)=\exp\left(aw_n x_k s\right)-\frac{A_{20,n}(x_k,s)}{21\cdot a^{20}\cdot s^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right);k,n=1,2,..,21. \tag{13}$$

Раскладывая определитель $f(s)$ из (12) по столбцам на сумму определителей, получаем:

$$f(s)=f_0(s)-\frac{1}{21\cdot a^{20}\cdot s^{20}}\cdot\sum_{k=1}^{21} f_{20,k}(s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)=0, \tag{14}$$

основное приближение имеет вид

$$f_0(s)=0, \tag{15}$$

при этом

$$f_0(s)=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1,20} & f_{1,21} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2,20} & f_{2,21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{20,1} & f_{20,2} & \dots & f_{20,20} & f_{20,21} \\ f_{21,1} & f_{21,2} & \dots & f_{21,20} & f_{21,21} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \exp(aw_1x_1s) & \exp(aw_2x_1s) & \exp(aw_{20}x_1s) & \exp(aw_{21}x_1s) \\ \exp(aw_1x_2s) & \exp(aw_2x_2s) & \exp(aw_{20}x_2s) & \exp(aw_{21}x_2s) \\ & & & \\ \exp(aw_1x_{20}s) & \exp(aw_2x_{20}s) & \exp(aw_{20}x_{20}s) & \exp(aw_{21}x_{20}s) \\ \exp(aw_1x_{21}s) & \exp(aw_2x_{21}s) & \exp(aw_{20}x_{21}s) & \exp(aw_{21}x_{21}s) \end{vmatrix}, \tag{16}$$

определители $f_{20,k}(s)(k=1,2,...,21)$ из (14) получаются из определителя $f_0(s)$ из (16) заменой k -го столбца на столбец $\left(A_{20,k}(x_1,s);A_{20,k}(x_2,s);...;A_{20,k}(x_{20},s);A_{20,k}(x_{21},s)\right)^T$.

Формула (16) показывает, что между элементами $\exp(aw_nx_ks)$ и $f_{kn}(s)$, а также между $\exp(aw_nx_ks)$ и элементами $b_{kn}(s)$ из (12) – (13) существует взаимно-однозначное соответствие.

Из (16) имеем:

$$\begin{aligned} f_0(s)&=f_{11}f_{22}f_{33}\cdots f_{20,20}f_{21,21}-f_{11}f_{22}f_{33}\cdots f_{19,19}f_{20,21}f_{21,20}+\ldots= \\ &=\exp\left(as\left(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\ldots+w_{19}x_{19}+w_{20}x_{20}+w_{21}x_{21}\right)\right)-\exp\left(as\times\right. \\ &\left.\times\left(w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\ldots+w_{19}x_{19}+w_{21}x_{20}+w_{20}x_{21}\right)\right)-\ldots=0, \end{aligned} \tag{17}$$

т. е.

$$f_0(s)=\sum_{\gamma_k}\exp\left(as\cdot M_{\gamma_k}\right)\cdot(-1)^{b_k}=0, \tag{18}$$

где γ_k – перестановок всевозможные чисел $\{1,2,...,21\}$, b_k – знак этой перестановки,

$$M_{\gamma_k}=w_1\cdot x_{\gamma_1}+w_2\cdot x_{\gamma_2}+w_3\cdot x_{\gamma_3}+\ldots+w_{20}\cdot x_{\gamma_{20}}+w_{21}\cdot x_{\gamma_{21}}. \tag{19}$$

Учитывая формулы (4), M_{γ_k} из (19) принимает вид:

$$\begin{aligned} M_{\gamma_k}&=1\cdot x_{\gamma_1}+(D_2+iR_2)\cdot x_{\gamma_2}+(D_3+iR_3)\cdot x_{\gamma_3}+(D_4+iR_4)\cdot x_{\gamma_4}+\ldots+(D_4-iR_4)\cdot x_{\gamma_{19}}+ \\ &+(D_3-iR_3)\cdot x_{\gamma_{20}}+(D_2-iR_2)\cdot x_{\gamma_{21}}=\operatorname{Re}\left(M_{\gamma_k}\right)+i\cdot\operatorname{Im}\left(M_{\gamma_k}\right),\gamma_k\in(1,2,...,21), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}(M_{\gamma_k})=1\cdot x_{\gamma_1}+D_2(x_{\gamma_2}+x_{\gamma_{21}})+D_3(x_{\gamma_3}+x_{\gamma_{20}})+D_4(x_{\gamma_4}+x_{\gamma_{19}})+\ldots+D_9(x_{\gamma_9}+x_{\gamma_{14}})+\\ +D_{10}(x_{\gamma_{10}}+x_{\gamma_{13}})+D_{11}(x_{\gamma_{11}}+x_{\gamma_{12}}), 1>D_2>D_3>D_4>\ldots>D_9>D_{10}>D_{11}>-1,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Im}(M_{\gamma_k})=1\cdot x_{\gamma_1}+R_2(x_{\gamma_2}-x_{\gamma_{21}})+R_3(x_{\gamma_3}-x_{\gamma_{20}})+R_4(x_{\gamma_4}-x_{\gamma_{19}})+\ldots+R_9(x_{\gamma_9}-x_{\gamma_{14}})+\\ +R_{10}(x_{\gamma_{10}}-x_{\gamma_{13}})+R_{11}(x_{\gamma_{11}}-x_{\gamma_{12}}).\end{gathered} \tag{22}$$

Изучение индикаторной диаграммы

Чтобы найти асимптотику корней уравнений (11), (12) – (13), (14), сначала надо решить уравнение (15), где $f_0(s)$ определено в (16), а для этого необходимо изучить индикаторную диаграмму (см. [17, глава 12]) этого уравнения. Для изучения индикаторной диаграммы необходимо подробно изучить уравнения (17) – (19), т.е. поведение чисел M_{γ_k} из (20) и $\operatorname{Re}(M_{\gamma_k})$, $\operatorname{Im}(M_{\gamma_k})$ из (21) – (22). Начнём с ответа на вопрос: когда достигается $\max(\operatorname{Re}(M_{\gamma_k}))$?

Из (21) следует, что это происходит в следующем случае:

$x_{\gamma_1}=m_{21}\cdot\pi=1\cdot\pi$; x_{γ_2}, $x_{\gamma_{21}}$ равны $m_{20}\cdot\pi$ или $m_{19}\cdot\pi$; x_{γ_3}, $x_{\gamma_{20}}$ равны $m_{18}\cdot\pi$ или $m_{17}\cdot\pi$; x_{γ_4}, $x_{\gamma_{19}}$ равны $m_{16}\cdot\pi$ или $m_{15}\cdot\pi$;…; x_{γ_9}, $x_{\gamma_{14}}$ равны $m_6\cdot\pi$ или $m_5\cdot\pi$; $x_{\gamma_{10}}$, $x_{\gamma_{13}}$ равны $m_4\cdot\pi$ или $m_3\cdot\pi$; $x_{\gamma_{11}}$, $x_{\gamma_{12}}$ равны $m_2\cdot\pi$ или $m_1\cdot\pi=0$. (23)

Из (23) следует, что на вертикальном отрезке $[B_1B_2]$ индикаторной диаграммы уравнения (15) расположены 2^{10} точек $A_1, A_2, \ldots, A_{1024}$ (при этом $A_1=B_1, A_{1024}=B_2$), координаты которых определяются соотношениями (20) – (22) и по которым в силу соотношений (17) – (19) определяются соответствующие им элементы определителей (16) и (12) – (13). Из общей теории (см. [17, глава 12]) следует, что отрезку $[B_1B_2]$ соответствует сектор $1)$ бесконечно малого раствора, биссектрисой которого является серединный перпендикуляр к отрезку $[B_1B_2]$, и корни уравнений (15) – (16) и (12) – (13) могут находиться только в секторе $1)$, на асимптотику корней влияют только точки $A_1, A_2, .., A_{1024}$ отрезка $[B_1B_2]$. Настойчивое исследование точек $A_1, A_2, .., A_{1024}$ из (23) показало, что уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в секторе $1)$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}g_1(s)=b_{1,11}\cdot b_{2,12}\cdot b_{3,10}\cdot b_{4,13}\cdot b_{5,9}\cdot b_{6,14}\cdot(\ldots)\cdot b_{17,3}\cdot b_{18,20}\cdot b_{19,2}\cdot b_{20,21}\cdot b_{21,1}-\\ -b_{1,12}\cdot b_{2,11}\cdot b_{3,10}\cdot b_{4,13}\cdot b_{5,9}\cdot b_{6,14}\cdot(\ldots)\cdot b_{17,3}\cdot b_{18,20}\cdot b_{19,2}\cdot b_{20,21}\cdot b_{21,1}+\\ +b_{1,12}\cdot b_{2,11}\cdot b_{3,13}\cdot b_{4,10}\cdot b_{5,9}\cdot b_{6,14}\cdot(\ldots)\cdot b_{17,3}\cdot b_{18,20}\cdot b_{19,2}\cdot b_{20,21}\cdot b_{21,1}-\\ -b_{1,11}\cdot b_{2,12}\cdot b_{3,13}\cdot b_{4,10}\cdot b_{5,9}\cdot b_{6,14}\cdot(\ldots)\cdot b_{17,3}\cdot b_{18,20}\cdot b_{19,2}\cdot b_{20,21}\cdot b_{21,1}+\ldots=0.\end{gathered} \tag{24}$$

Основное приближение уравнения (24) имеет корень кратности десять, поэтому возможен «эффект «расщепления» кратных в главном собственных значений», рассмотренный в статьях [9] и [15].

Теорема 3. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в секторе $1)$ индикаторной диаграммы имеет следующий вид:

$$g_1(s)=\begin{vmatrix} b_{1,11} & b_{1,12} \\ b_{2,11} & b_{2,12} \end{vmatrix}_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{3,10} & b_{3,13} \\ b_{4,10} & b_{4,13} \end{vmatrix}_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{5,9} & b_{5,14} \\ b_{6,9} & b_{6,14} \end{vmatrix}_{1,3} \cdot (\ldots) \cdot \begin{vmatrix} b_{17,3} & b_{17,20} \\ b_{18,3} & b_{18,20} \end{vmatrix}_{1,9} \cdot \begin{vmatrix} b_{19,2} & b_{19,21} \\ b_{20,2} & b_{20,21} \end{vmatrix}_{1,10} \cdot b_{21,1}=0, b_{21,1}=b_{21,22}, \tag{25}$$

т. к. мы ввели обозначение

$$b_{mn}=b_{m,n+21}, m,n\in\{1,2,\ldots,21\}. \tag{26}$$

Исследования индикаторной диаграммы показали, что в секторах $3)$ и $5)$ уравнения на собственные значения имеют вид:

$$g_3(s)=\begin{vmatrix} b_{1,12} & b_{1,13} \\ b_{2,12} & b_{2,13} \end{vmatrix}_{3,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{3,11} & b_{3,14} \\ b_{4,11} & b_{4,14} \end{vmatrix}_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{5,10} & b_{5,15} \\ b_{6,10} & b_{6,15} \end{vmatrix}_{3,3} \cdot (\ldots) \cdot \begin{vmatrix} b_{17,4} & b_{17,21} \\ b_{18,4} & b_{18,21} \end{vmatrix}_{3,9} \cdot \begin{vmatrix} b_{19,3} & b_{19,22} \\ b_{20,3} & b_{20,22} \end{vmatrix}_{3,10} \cdot b_{21,2}=0, \tag{27}$$

причём $b_{21,2}\neq 0$ в силу формул (16) и (12) – (13),

$$g_5(s)=\begin{vmatrix} b_{1,13} & b_{1,14} \\ b_{2,13} & b_{2,14} \end{vmatrix}_{5,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{3,12} & b_{3,15} \\ b_{4,12} & b_{4,15} \end{vmatrix}_{5,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{5,11} & b_{5,16} \\ b_{6,11} & b_{6,16} \end{vmatrix}_{5,3} \cdot (\ldots) \cdot \begin{vmatrix} b_{17,5} & b_{17,22} \\ b_{18,5} & b_{18,22} \end{vmatrix}_{5,9} \cdot \begin{vmatrix} b_{19,4} & b_{19,23} \\ b_{20,4} & b_{20,23} \end{vmatrix}_{5,10} \cdot b_{21,24}=0, \tag{28}$$

при этом $b_{21,24}=b_{21,3}\neq 0$.

Обобщая исследования при получении уравнений (25) – (28), приходим к выводу, что справедливо утверждение.

Теорема 4. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в нечётных секторах индикаторной диаграммы имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} g_{2p-1}(s)=\begin{vmatrix} b_{1,10+p} & b_{1,11+p} \\ b_{2,10+p} & b_{2,11+p} \end{vmatrix}_{2p-1,1} \cdot \begin{vmatrix} b_{3,9+p} & b_{3,12+p} \\ b_{4,9+p} & b_{4,12+p} \end{vmatrix}_{2p-1,2} \cdot \begin{vmatrix} b_{5,8+p} & b_{5,13+p} \\ b_{6,8+p} & b_{6,13+p} \end{vmatrix}_{2p-1,3} \cdot (\ldots)\times \\ \times \begin{vmatrix} b_{17,p+2} & b_{17,p-2} \\ b_{18,p+2} & b_{18,p-2} \end{vmatrix}_{2p-1,9} \cdot \begin{vmatrix} b_{19,p+1} & b_{19,p-1} \\ b_{20,p+1} & b_{20,p-1} \end{vmatrix}_{2p-1,10} \cdot b_{2p-1,11}=0, \end{gathered} \tag{29}$$

где $(2p-1)$ - номер сектора индикаторной диаграммы, $p=1,2,3,\ldots,21; b_{21,p}\neq 0$.

Из (29) мы видим, что

$$g_{2p-1}(s)=b_{21,p}\cdot\prod_{n=1}^{10} g_{2p-1,n}(s)=0; b_{21,p}\neq 0, \tag{30}$$

$$g_{2p-1,n}(s)=\begin{vmatrix} b_{2n-1,11+p-n}(s) & b_{2n-1,11+p+n}(s) \\ b_{2n,11+p-n}(s) & b_{2n,11+p+n}(s) \end{vmatrix}_{2p-1,n}=0, \tag{31}$$

при этом $(2p-1)$ - номер сектора, n - номер серии собственных значений в секторе $(2p-1), p=1,2,\ldots,21, n=1,2,\ldots,11$.

Асимптотика собственных значений

Уравнение (30) – (31) позволяет вычислить асимптотику собственных значений в нечётных секторах. Подставляя формулы (13) в (31), получаем:

$$\begin{aligned}
&g_{2p-1,n}(s)=b_{2n-1,11+p-n}(s)\cdot b_{2n,10+p+n}(s)-b_{2n-1,10+p+n}(s)\cdot b_{2n,11+p-n}(s)=\Big[\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n-1}s\right)-\\
&-\frac{A_{20,11+p-n}(x_{2n-1},s)}{P_{11}\cdot s^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)\Big]\cdot\Big[\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n}s\right)-\frac{A_{20,10+p+n}(x_{2n},s)}{P_{11}\cdot s^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)\Big]-\\
&-\Big[\exp\left(aw_{1+p+n}x_{2n-1}s\right)-\frac{A_{20,10+p+n}(x_{2n-1},s)}{P_{11}\cdot s^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)\Big]\cdot\Big[\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n}s\right)-\\
&-\frac{A_{20,1+p-n}(x_{2n},s)}{P_{11}\cdot s^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)\Big]=0, P_{11}=21a^{20}, p=1,2,\ldots,21; n=1,2,\ldots,11.
\end{aligned}\tag{32}$$

Уравнение (32) можно переписать в виде

$$g_{2p-1,n}(s)=g_{2p-1,n,0}(s)-\frac{1}{P_{11}\cdot s^{20}}\cdot g_{2p-1,n,20}(s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)=0,\tag{33}$$

$$g_{2p-1,n,0}(s)=\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n-1}s\right)\cdot\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n}s\right)-\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n}s\right),\tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&g_{2p-1,n,20}(s)=\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n-1}s\right)\cdot A_{20,10+p+n}(x_{2n},s)-\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n}s\right)\cdot A_{20,11+p-n}(x_{2n-1},s)-\\
&-\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot A_{20,11+p-n}(x_{2n},s)-\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n}s\right)\cdot A_{20,10+p+n}(x_{2n-1},s).
\end{aligned}\tag{35}$$

Поделив в уравнении (33) – (35) на $\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n}s\right)\neq 0$, получаем:

$$f_{2p-1,n}(s)=f_{2p-1,n,0}(s)-\frac{f_{2p-1,n,20}(s)}{P_{11}\cdot s^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^{40}}\right)=0,\tag{36}$$

$$f_{2p-1,n,0}(s)=\exp\left(a\left(w_{10+p+n}-w_{11+p-n}\right)\cdot\left(x_{2n}-x_{2n-1}\right)s\right)-1,\tag{37}$$

(при этом основное приближение имеет вид $f_{2p-1,n,0}(s)=0$),

$$\begin{aligned}
&f_{2p-1,n,20}(s)=\exp\left(-aw_{10+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot\exp\left(-aw_{11+p-n}(x_{2n}-x_{2n-1})s\right)\cdot A_{20,10+p+n}(x_{2n},s)-\\
&-\exp\left(aw_{10+p+n}(x_{2n}-x_{2n-1})s\right)\cdot\exp\left(-aw_{11+p-n}x_{2n}s\right)\cdot A_{20,11+p-n}(x_{2n-1},s)-\exp\left(-aw_{11+p-n}x_{2n}s\right)\times\\
&\times A_{20,11+p-n}(x_{2n},s)-\exp\left(-aw_{10+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot A_{20,10+p+n}(x_{2n-1},s).
\end{aligned}\tag{38}$$

Заметим, что $A_{20,k}(x,s)$ определены формулами (6) – (9), при этом в секторе $(2p-1)$ на асимптотику влияют только экспоненты, зависящие от w_{11+p-n} и w_{10+p+n}:

$$\begin{aligned}
&A_{20,10+p+n}(x_{2n},s)=w_{11+p-n}\cdot\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n}s\right)\cdot\left(\int_0^{x_{2n}}\ldots\right)_{a,10+p+n,11+p-n}+w_{10+p+n}\cdot\\
&\cdot\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n}s\right)\cdot\left(\int_0^{x_{2n}}\ldots\right)_{a,10+p+n,10+p+n}+\overline{\overline{o}}(1),
\end{aligned}\tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&A_{20,11+p-n}(x_{2n-1},s)=w_{11+p-n}\cdot\exp\left(aw_{11+p-n}x_{2n-1}s\right)\cdot\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,11+p-n,11+p-n}+w_{10+p+n}\cdot\\
&\cdot\exp\left(aw_{10+p+n}x_{2n-1}s\right)\cdot\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,11+p-n,10+p+n}+\overline{\overline{o}}(1),
\end{aligned}\tag{40}$$

$$A_{20,11+p-n}(x_{2n},s)=w_{11+p-n}\cdot\exp(aw_{11+p-n}x_{2n}s)\cdot\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,11+p-n,11+p-n}+w_{10+p+n}\cdot$$
$$\cdot\exp(aw_{10+p+n}x_{2n}s)\cdot\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,11+p-n,10+p+n}+\overset{=}{o}(1), \tag{41}$$

$$A_{20,10+p+n}(x_{2n-1},s)=w_{11+p-n}\cdot\exp(aw_{11+p-n}x_{2n-1}s)\cdot\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,10+p+n,11+p-n}+w_{10+p+n}\cdot$$
$$\cdot\exp(aw_{10+p+n}x_{2n-1}s)\cdot\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,10+p+n,10+p+n}+\overset{=}{o}(1). \tag{42}$$

Учитывая, что $\left(\int_0^{x_{2n-1}}\ldots\right)_{a,m,m}=\left(\int_0^{x}q(t)dt\right)_{a11}$ (из (7)), подставим формулы (39) – (42) в (38) и проведём необходимые преобразования, получим:

$$\begin{aligned}&f_{2p-1,n,20}(s)=M_{1n}\cdot F(-x_{2n-1})\cdot G(0,x_{2n},N_2,N_1)+M_{2n}\cdot F(x_{2n}-x_{2n-1})\cdot G(0,x_{2n},N_2,N_2)+\\&+M_{1n}\cdot F(x_{2n}-x_{2n-1})\cdot G(0,x_{2n-1},N_1,N_1)+M_{2n}\cdot F(x_{2n})\cdot G(0,x_{2n-1},N_1,N_2)-M_{1n}\times\\&\times G(0,x_{2n},N_1,N_1)-M_{2n}\cdot F(x_{2n})\cdot G(0,x_{2n},N_1,N_2)-M_{1n}\cdot(x_{2n}-x_{2n-1})\cdot G(0,x_{2n-1},N_2,N_1)-\\&-M_{2n}\cdot G(0,x_{2n-1},N_2,N_2)+\overset{=}{o}(1),\end{aligned} \tag{43}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}&M_{1n}=w_{11+p-n};M_{2n}=w_{10+p+n};F(x,s)=\exp(a(M_{2n}-M_{1n})\cdot x\cdot s);N_1=N+p-n;\\&N_2=N+p=n;G(b,c,k,m)=\int_b^c q(t)\cdot\exp(a(w_k-w_m)\cdot s\cdot t)\cdot dt_{akm}.\end{aligned} \tag{44}$$

Асимптотику корней уравнения (36)-(44) найдём с помощью методики отыскания корней квазиполтиномов, изложенной в работах [18]-[20].

Основное приближение уравнения (36) – (38) имеет вид

$$\begin{aligned}&f_{2p-1,n,0}(s)=0(=)F(x_{2n}-x_{2n-1})=0(=)\exp(a\cdot(M_{2n}-M_{1n})xs)=1=\exp(2\pi ik),k\in Z(=)\\&(=)s_{k,2p-1,n,осн}=\frac{2\pi ik}{a(M_{2n}-M_{1n})(x_{2n}-x_{2n-1})},k\in Z,\end{aligned} \tag{45}$$

где $(2p-1)$ – номер сектора, n – номер серии собственных значений в секторе $(2p-1)$; $p=1,2,...,21$; $n=1,2,...,11$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в нечётных секторах индикаторной диаграммы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&s_{k,2p-1,n}=\frac{2\pi i}{a(M_{2n}-M_{1n})(x_{2n}-x_{2n-1})}\cdot\left[k+\frac{d_{20,k,2p-1,n}}{k^{20}}+O\left(\frac{1}{k^{40}}\right)\right],\\&k\in Z,p\in\{1,2,3,...,21\},n\in\{1,2,...,11\}.\end{aligned} \tag{46}$$

Для доказательства теоремы 5 необходимо вычислить коэффициенты $d_{20,k,2p-1,n}$ из (46) в явном виде.

В силу формул (44) и (46) имеем:

$$F(x_{2n}-x_{2n-1})\Big|_{s_{k,2p-1,n}}=\exp\left(a(M_{2n}-M_{1n})\cdot(x_{2n}-x_{2n-1})\cdot s_{k,2p-1,n}\right)=\exp(2\pi ik)\times$$
$$\times\exp\left(2\pi i\left[\frac{d_{20,k,2p-1,n}}{k^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{40}}\right)\right]\right)=1\cdot\left[1+\frac{2\pi id_{20,k,2p-1,n}}{k^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{40}}\right)\right], \tag{47}$$

асимптотики получены, применяя формулы Маклорена.

Подставляя формулы (46) – (47) в уравнение (36) – (38), учитывая формулы (43), (44), находим, применяя формулы Тейлора:

$$\left[1+\frac{2\pi id_{20,k,2p-1,n}}{k^{20}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{40}}\right)-1\right]-\frac{a^{20}\cdot(M_{2n}-M_{1n})^{20}}{21\cdot a^{20}\cdot 2^{20}}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{20}}{\pi^{20}\cdot i^{20}}\cdot\frac{1}{k^{20}}\times$$
$$\times\left[1+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{21}}\right)\right]\cdot f_{2p-1,n,20}\Big|_{s_{k,2p-1,n}}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^{40}}\right)=0;\ p=1,2,\ldots,21;n=1,2,\ldots,11;k\in Z. \tag{48}$$

Отсюда выводим, что

$$d_{20,k,2p-1,n}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{21}\cdot\frac{(M_{2n}-M_{1n})^{20}}{2^{20}\cdot\pi^{20}}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{20}}{i^{20}}\cdot f_{2p-1,n,20}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}, \tag{49}$$

где $s_{k,2p-1,n,осн}$ определено формулой (45).

Заметим, что из формул (4) следует:

$$M_{2n}-M_{1n}=w_{10+p+n}-w_{11+p-n}=\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot(9+p+n)\right)-\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot(10+p-n)\right)=$$
$$=\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(11+p-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left[\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)-\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(-n+\frac{1}{2}\right)\right)\right]= \tag{50}$$
$$=\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(11+p-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot 2i\sin\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\right),n=1,2,\ldots,11.$$

Подставляя формулу (45) в (43) – (44) и производя необходимые преобразования, получаем:

$$f_{2p-1,n,20}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}=(M_{2n}-M_{1n})\cdot G(x_{2n-1},x_{2n},1,1)+H_{2p-1,n,20}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}, \tag{51}$$

$$H_{2p-1,n,20}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}=M_{1n}\cdot F(-x_{2n-1})\cdot G(x_{2n-1},x_{2n},N_2,N_1)-M_{2n}\cdot F(x_{2n})\cdot G(x_{2n-1},x_{2n},N_1,N_2). \tag{52}$$

Подставляя $s_{k,2p-1,n,осн}$ из (45) в (52), вычисляем:

$$H_{2p-1,n,20}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}=\exp\left(\frac{2\pi i}{21}(N_1-1)\right)F\left(\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2}\right)F\left(-\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}\right)G(x_{2n-1},x_{2n},N_2,N_1)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}-$$
$$-\exp\left(\frac{2\pi i}{21}(N_2-1)\right)\cdot F\left(\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2}\right)\cdot F\left(\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{2}\right)G(x_{2n-1},x_{2n},N_1,N_2)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}. \tag{53}$$

Из формул (45) и (44) следует, что

$$F\left(\frac{x_{2n}-x_{2n-1}}{2}\right)\Bigg|_{s_{k,2n-1,n,осн}}=\exp(\pi ik)=(-1)^k.$$

Поэтому формулу (53) можно преобразовать к следующему более удобному виду:

$$H_{2p-1,n,20}\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}=(-1)^k\cdot\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(11+p-\frac{3}{2}\right)\right)\cdot\left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\times\right.$$

$$\times\exp\left(-\pi ik\cdot\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right)\cdot\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\cdot\exp\left(\frac{2\pi ik}{x_{2n}-x_{2n-1}}\cdot t\right)\cdot dt-\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\times$$

$$\left.\times\exp\left(\pi ik\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right)\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\exp\left(-\frac{2\pi ik}{x_{2n}-x_{2n-1}}t\right)dt\right]=(-1)^k2i\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\left(11+p-\frac{3}{2}\right)\right)\Phi_n,$$

$$\Phi_n=\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\sin\left[\frac{2\pi k}{x_{2n}-x_{2n-1}}t-\frac{\pi(2n-1)}{21}-\pi k\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right]dt;\ p=1,2,\dots,21;n=1,2,\dots,11. \tag{54}$$

Подставляя (54) в (52), используя (50), получаем:

$$f_{2p-1,n,20}(s)\Big|_{s_{k,2p-1,n,осн}}=(M_{2n}-M_{1n})\left[\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{21}\right)}\cdot\Phi_n\right]. \tag{55}$$

Подставляя (55) в (49), применяя (50) и (54), выводим, что

$$d_{20,k,2p-1,n}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{21}\cdot\frac{(M_{2n}-M_{1n})^{21}}{2^{20}\cdot\pi^{20}}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{20}}{(-1)^{10}}\cdot\left[\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{21}\right)}\Phi_1\right]_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{21}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{20}}{2^{20}\cdot\pi^{20}}\cdot(-1)^{10}\cdot\left(\exp\left(\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(11+p-\frac{3}{2}\right)\right)\right)^{21}\cdot2^{21}\cdot i^{21}\times \tag{56}$$

$$\times\left(\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{21}\right)\right)^{21}\cdot[\dots]_1.$$

Из (56) находим $d_{20,k,2p-1,n}$ в явном виде, что завершает доказательство теоремы 5:

$$d_{20,k,2p-1,n}=(-1)^{11}\cdot\frac{(x_{2n}-x_{2n-1})^{20}}{21\cdot\pi^{21}}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{21}\right)\right)^{21}\cdot\left[\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{21}\right)}\times\right. \tag{57}$$

$$\left.\times\int\limits_{x_{2n-1}}^{x_{2n}}q(t)\sin\left[\frac{2\pi k}{x_{2n}-x_{2n-1}}t-\frac{\pi(2n-1)}{21}-\pi k\frac{x_{2n}+x_{2n-1}}{x_{2n}-x_{2n-1}}\right]dt_{\Phi_n}\right];k\in N;\ p=1,2,\dots,21;n=1,2,\dots,11,$$

причём в этой формуле $(2p-1)$ - номер сектора, n - номер серии собственных значений в секторе $(2p-1)$.

Применяя (50), формулу (46) можно переписать в следующем виде:

$$s_{k,2p-1,n}=\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{2\pi i}{21}\cdot\left(11+p-\frac{3}{2}\right)\right)}{(x_{2n}-x_{2n-1})\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{21}\right)}\cdot\left[k+\frac{d_{20,k,2p-1,n}}{k^{20}}+O\left(\frac{1}{k^{40}}\right)\right], \tag{58}$$

причём коэффициенты $d_{20,k,2p-1,n}$ определены в (57).

Исследование индикаторной диаграммы уравнений (11) – (13) и (16) – (18) с помощью формул (19) – (22) привело к доказательству следующей теоремы.

Теорема 6. Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1) – (2) – (3) в секторе 2) имеет вид:

$$h_2(s)=b_{1,12}\cdot\begin{vmatrix}b_{2,11} & b_{2,13}\\ b_{3,11} & b_{3,13}\end{vmatrix}_{2,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{4,10} & b_{4,14}\\ b_{5,10} & b_{5,14}\end{vmatrix}_{2,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{6,9} & b_{6,15}\\ b_{7,9} & b_{7,15}\end{vmatrix}_{2,3}\cdot(\ldots)\cdot\begin{vmatrix}b_{18,3} & b_{18,21}\\ b_{19,3} & b_{19,21}\end{vmatrix}_{2,9}\cdot\begin{vmatrix}b_{20,2} & b_{20,22}\\ b_{21,2} & b_{21,22}\end{vmatrix}_{2,10}=0, \quad (59)$$

причём $b_{20,22}=b_{20,1}, b_{21,22}=b_{21,1}$, в силу обозначений (26).

Аналогичным образом доказывается, что в секторах $4)$ и $6)$ уравнение на собственные значения имеет вид:

$$h_4(s)=b_{1,13}\cdot\begin{vmatrix}b_{2,12} & b_{2,14}\\ b_{3,12} & b_{3,14}\end{vmatrix}_{4,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{4,11} & b_{4,15}\\ b_{5,11} & b_{5,15}\end{vmatrix}_{4,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{6,10} & b_{6,16}\\ b_{7,10} & b_{7,16}\end{vmatrix}_{4,3}\cdot(\ldots)\cdot\begin{vmatrix}b_{18,4} & b_{18,22}\\ b_{19,4} & b_{19,22}\end{vmatrix}_{4,9}\cdot\begin{vmatrix}b_{20,3} & b_{20,23}\\ b_{21,3} & b_{21,23}\end{vmatrix}_{4,10}=0, \quad (60)$$

$$h_6(s)=b_{1,14}\cdot\begin{vmatrix}b_{2,13} & b_{2,15}\\ b_{3,13} & b_{3,15}\end{vmatrix}_{6,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{4,12} & b_{4,16}\\ b_{5,12} & b_{5,16}\end{vmatrix}_{6,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{6,11} & b_{6,17}\\ b_{7,11} & b_{7,17}\end{vmatrix}_{6,3}\cdot(\ldots)\cdot\begin{vmatrix}b_{18,5} & b_{18,23}\\ b_{19,5} & b_{19,23}\end{vmatrix}_{6,9}\cdot\begin{vmatrix}b_{20,4} & b_{20,24}\\ b_{21,4} & b_{21,24}\end{vmatrix}_{6,10}=0. \quad (61)$$

Обобщая формулы (59) – (61), получаем следующее утверждение.

Теорема 7. В чётных секторах индикаторной диаграммы уравнения на собственные значения имеет вид:

$$h_{2p}(s)=b_{1,11+p}(s)\cdot\begin{vmatrix}b_{2,10+p} & b_{2,12+p}\\ b_{3,10+p} & b_{3,12+p}\end{vmatrix}_{2p,1}\cdot\begin{vmatrix}b_{4,9+p} & b_{4,13+p}\\ b_{5,9+p} & b_{5,13+p}\end{vmatrix}_{2p,2}\cdot\begin{vmatrix}b_{6,8+p} & b_{6,14+p}\\ b_{7,8+p} & b_{7,14+p}\end{vmatrix}_{2p,3}\cdot(\ldots)\times$$
$$\times\begin{vmatrix}b_{18,p+2} & b_{18,20+p}\\ b_{19,p+2} & b_{19,20+p}\end{vmatrix}_{2p,9}\cdot\begin{vmatrix}b_{20,p+1} & b_{20,21+p}\\ b_{21,p+1} & b_{21,21+p}\end{vmatrix}_{2p,10}=0, \quad (62)$$

Уравнение (62) можно переписать в виде

$$h_{2p}(s)=b_{1,11+p}(s)\cdot\prod_{n=1}^{10}h_{2p,n}(s)=0, b_{1,11+p}(s)\neq 0, \quad (63)$$

$$h_{2p,n}(s)=\begin{vmatrix}b_{2n,11+p-n}(s) & b_{2n,11+p+n}(s)\\ b_{2n+1,11+p-n}(s) & b_{2n+1,11+p+n}(s)\end{vmatrix}_{2p,n}=0, \quad (64)$$

$(2p))$ – номер сектора, n - номер серии собственных значений в секторе $2p)$; $p=1,2,...,21$, $n=1,2,...,10$.

Воспользовавшись формулами (12) – (13), из (63) – (64) имеем:

$$h_{2p,n}(s)=b_{2n,11+p-n}(s)\cdot b_{2n+1,11+p+n}(s)-b_{2n,11+p+n}(s)\cdot b_{2n+1,11+p-n}(s)=\left[\exp\left(a\left(w_{11+p+n}-w_{11+p-n}\right)\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot(x_{2n+1}-x_{2n})s\right)-1\right]-\frac{h_{2p,n,20}(s)}{P_{11}\cdot s^{02}}+O\left(\frac{1}{s^{40}}\right)=0, \quad (65)$$

$$h_{2p,n,20}(s)=\exp\left(aw_{11+p-n}(x_{2n+1}-x_{2n})s\right)\cdot\exp\left(-aw_{11+p+n}x_{2n}s\right)\cdot A_{20,11+p-n}(x_{2n+1},s)+$$
$$+\exp\left(-aw_{11+p+n}x_{2n+1}s\right)\cdot\exp\left(aw_{11+p+n}(x_{2n+1}-x_{2n})s\right)\cdot A_{20,11+p-n}(x_{2n},s)- \quad (66)$$
$$-\exp\left(-aw_{11+p-n}x_{2n+1}s\right)\cdot A_{20,11+p-n}(x_{2n+1},s)-\exp\left(-aw_{11+p+n}x_{2n}s\right)\cdot A_{20,11+p+n}(x_{2n},s).$$

Используя формулы (6) – (9), аналогично формулам (36) – (38), (39) – (42) и (43) – (44) получаем:

$$h_{2p,n,20}(s)=M_{1n}\cdot F_1(-x_{2n})\cdot G(0,x_{2n+1},N_3,N_1)+M_{3n}\cdot F_1(x_{2n+1}-x_{2n})\cdot G(0,x_{2n+1},N_3,N_3)+$$
$$+M_{1n}\cdot F_1(x_{2n+1}-x_{2n})\cdot G(0,x_{2n},N_1,N_1)+M_{3n}F_1(x_{2n+1})G(0,x_{2n},N_1,N_3)-M_{1n}G(0,x_{2n+1},N_1,N_1)- \quad (67)$$
$$-M_{3n}\cdot F_1(x_{2n+1})\cdot G(0,x_{2n+1},N_1,N_3)-M_{1n}\cdot F_1(-x_{2n})\cdot G(0,x_{2n},N_3,N_1)-M_{3n}G(0,x_{2n},N_3,N_3),$$

$$N_1=11+p-n, N_3=11+p+n, M_{1n}=w_{11+p-n}, M_{3n}=w_{11+p+n},$$
$$F_1(x,s)=\exp(a\cdot(M_{3n}-M_{1n})sx), G(b,c,k,m)=\int_b^c q(t)\exp(a(w_k-w_m)st)dt_{akm}. \quad (68)$$

Основное приближения уравнения (65) – (68) имеет вид

$$F_1(x_{2n+1}-x_{2n})=0(=)\exp(a(w_{11+p+n}-w_{11+p-n})\cdot(x_{2n+1}-x_{2n})s)=1=\exp(2\pi ik)(=)$$
$$(=)s_{k,2p,n,осн}=\frac{2\pi ik}{a(M_{3n}-M_{1n})\cdot(x_{2n+1}-x_{2n})}, k\in Z. \quad (69)$$

Поэтому верно следующее утверждение.

Теорема 8. Асимптотика собственных значений в чётных секторах индикаторной диаграммы имеет следующий вид:

$$s_{k,2p,n}=\frac{2\pi i}{a(M_{3n}-M_{1n})(x_{2n+1}-x_{2n})}\cdot\left[k+\frac{d_{20,k,2p,n}}{k^{20}}+O\left(\frac{1}{k^{40}}\right)\right], \quad (70)$$

$$d_{20,k,2p,n}=\frac{(x_{2n+1}-x_{2n})^{20}}{21}\cdot\frac{1}{\pi^{21}}\cdot\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{21}\right)\right)^{21}\cdot\left[\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}}q(t)dt_{a11}+\frac{(-1)^k}{\sin\left(\frac{2\pi n}{21}\right)}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}}q(t)\sin\left[\frac{2\pi k}{x_{2n+1}-x_{2n}}t-\frac{2\pi n}{21}-\pi k\frac{x_{2n+1}+x_{2n}}{x_{2n+1}-x_{2n}}\right]dt_{\Phi_{n2}}\right], k\in N; p=1,2,..,21; n=1,2,..,10. \quad (71)$$

Для доказательства формул (70) – (71) теоремы 8 заметим вначале, что в силу формул (4) имеем:

$$M_{3n}-M_{1n}=w_{11+p+n}-w_{11+p-n}=\exp\left(\frac{2\pi i}{21}(10+p+n)\right)-\exp\left(\frac{2\pi i}{21}(10+p-n)\right)=$$
$$=\exp\left(\frac{2\pi i}{21}(10+p)\right)\cdot 2i\cdot\sin\left(\frac{2\pi n}{21}\right). \quad (72)$$

Подставляя формулы (69) – (70 и (72) в (65) – (68), аналогично формулам (33) – (58) получаем доказательство формул (70) – (71) теоремы 8. В силу формулы (72) из (70) имеем:

$$s_{k,2p,n}=\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{2\pi i}{21}\cdot(10+p)\right)}{x_{2n+1}-x_{2n}}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi n}{21}\right)}\cdot\left[k+\frac{d_{20,k,2p,n}}{k^{20}}+O\left(\frac{1}{k^{40}}\right)\right]. \quad (73)$$

Формулы (57) – (58) и (71), (73) показывают, что при условии $x_{2n}\to x_{2n+1}$ (или при условии $x_{2n-1}\to x_{2n}$) (при $n\to\infty$) нельзя определить асимптотику собственных значений (в силу (2) краевая задача недоопределена).

Список литературы
References

1. Покорный Ю.В. 1968. О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи. Математические заметки, 4(5): 533-540.

Pokornyi Yu. V. 1968. On some estimates of the Green's function of a multipoint boundary problem. Mathematical notes, 4 (5): 533-540.

2. Покорный Ю.В., Лазарев К.П. 1987. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач. Дифференц. уравнения, 23(4): 658-670. Pokornyi Yu.V., Lazarev K.P. 1987. Some oscillation theorems for multipoint problems. Different. Equations, 23 (4): 658-670.

3. Покорный Ю.В., Шурупова И.Ю. 1989. О функции Грина квазиинтерполяционной многоточечной задачи. Известия вузов. Математика. № 9: 46-52.

Pokornyi Yu.V., Shurupova I. 1989. Yu. About the Green's function of quasiinterpolation multipoint problem. News of universities. Mathematics, iss. 9: 46-52.

4. Белабасси Ю. 1981. Регуляризованный след многоточечной задачи // Вестник Московского университета. Серия: математика, механика, № 2: 35-41.

Belabassi Yu. 1981. A regularized trace of a multipoint problem // Bulletin of the Moscow University. Series: mathematics, mechanics, iss. 2: 35-41.

5. Винокуров В.А., Садовничий В.А. 2000. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. Известия РАН. Серия: математика, 64(4): 47-108.

Vinokurov V.A., Sadovnichii V. A. 2000. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm-Liouville problem on a segment with a summable potential. Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Series: Mathematics, 64(4): 47-108.

6. Митрохин С.И. 1986. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами. Вестник МГУ. Сер.: математика, механика, № 6: 3-6.

Mitrokhin S.I. 1986. About formulas of regularized traces for differential operators of the second order with discontinuous coefficients. Vestnik MGU. Series: Mathematics, mechanics, iss. 6: 3-6.

7. Митрохин С.И. 1992. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Дифференциальные уравнения, 28(3): 530-532.

Mitrokhin S. I. 1992. About spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients. Differential equations, 28(3): 530-532.

8. Митрохин С.И. 1997. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией. Доклады РАН, 356(1): 13-15.

Mitrokhin S.I. 1997. About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function. Reports of the Russian Academy of Sciences, 356 (1): 13-15.

9. Митрохин С.И. 1997. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений краевых задач. Известия ВУЗов. Серия: математика, 418 (3): 38-43.

Mitrokhin S. I. 1997. About "splitting" in the main multiple eigenvalues of boundary value problems. Proceedings of the universities. Series: Mathematics, 418 (3): 38-43.

10. Митрохин С.И. 2009. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами. Вестник Московского университета. Серия: математика, механика, № 3: 14-17.

Mitrokhin S.I. 2009. Asymptotics of the eigenvalues of the differential operator of the fourth order with summable coefficients. Vestnik MGU. Series: Mathematics, mechanics, iss. 3: 14-17.

11. Митрохин С.И. 2011. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом. Уфимский математический журнал, 3 (4): 95-115.

Mitrokhin S.I. 2011. About spectral properties of one differential operator with summable coefficients with a retarded argument. Ufa mathematical Journal, 3 (4): 95-115.

12. Савчук А.М., Шкаликов А.А. 1999. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами. Математические заметки, 66 (6): 897-912.

Savchuk A.M., Shkalikov A. A. 1999. Sturm-Liouville operators with singular potentials. Math. Notes, 66 (6): 741-753.

13. Савчук А.М., Шкаликов А.А. 2003. Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями. Труды ММО, 64:159-212.

Savchuk A.M., Shkalikov A.A. 2003. Sturm-Liouville operators with distribution potentials. Trans. Moscow Math. Soc., 64: 143-192.

14. Митрохин С.И. 2016. О спектральных свойствах семейства дифференциальных операторов высокого чётного порядка с суммируемым потенциалом. Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика, № 4: 121-135.

Mitrokhin S.I. 2016. About spectral properties of a family of differential operators of high even order with summable potential. Vestnik VSU. Series: Mathematics. Physics, no. 4: 121-135.

15. Митрохин С.И. 2017. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений. Известия Саратов. Ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 17(1): 5-18.

Mitrokhin S.I. 2017. Multipoint differential operators: "splitting" of the multiple in main eigenvalues. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 17(1): 5-18.

16. Наймарк М.А. 1969. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 528.

Naimark M.A. 1969. Linear differential operators. Moscow: Nauka, 528.

17. Беллман Р., Кук К. Л. 1967. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 548.

Bellman R., Cooke K.L. 1967. Differential-difference equations. Moscow: Mir, 548.

18. Лидский В.Б., Садовничий В.А. 1968. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций. Математический сборник, 65(4): 558-566.

Lidskyi B.V., Sadovnichy V.A. 1968. Asymptotic formulas for the roots of one class of the entire functions, Mathematical collection, 65 (4): 558-566.

19. Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белабасси Ю. 1980. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса. Доклады АН СССР, 254(6): 1346-1348.

Sadovnichiy V.A., Lyubishkin V.A., Belabassi Yu. 1980. About regularized sums of the roots of the entire function of one class. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 254(6): 1346-1348.

20. Садовничий В.А. 1967. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков. Математический сборник, 72(2): 293-310.

Sadovnichy V.A. On the traces of ordinary differential operators of the higher orders. Mathematical collection. 1967, vol. 72, iss. 2, pp. 293-310.