УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

MIXED PROBLEM FOR EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE OF THE THIRD ORDER DERIVATIVE TO SECOND ORDER IN BOUNDARY CONDITIONS

Ж.А. Балкизов
Zh.A. Balkizov

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkar Scientific Centre of the RAS, 89a ShortanovaSt, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: Giraslan@yandex.ru

Аннотация
В работе исследована смешанная задача с производными второго порядка в граничных условиях для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с оператором Бицадзе-Лыкова в области гиперболичности. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемой задачи. Для доказательства единственности решения применяется метод Трикоми. Решение выписано в явном виде.

Abstract
A mixed problem with second-order derivatives in the boundary conditions for the third-order parabolic-hyperbolic equation with the Bitsadze-Lykov operator in the hyperbolicity region is investigated. Theorems on the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved. The Tricomi method is used to prove the uniqueness of the solution. The solution is written out in an explicit form.

Ключевые слова: Вырождающееся гиперболическое уравнение, задача Коши, уравнение третьего с кратными характеристиками, смешанная задача, оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля.
Keywords: Degenerate hyperbolic equation, Cauchy problem, third equation with multiple characteristics, mixed problem, fractional integration-differentiation operator in the sense of Riemann-Liouville.

Введение

В конечной односвязной области Ω евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x, & y<0, \\ u_{xxx} - u_y + b u_x, & y>0, \end{cases} \tag{1}$$

где $u=u(x,y)$ – искомая функция, a, $b=const$ – заданные числа, причем $|a|\le 1$.

При $y>0$ область Ω ограничена прямоугольником с вершинами в точках $A=(0,0)$, $A_0=(0,h)$, $B_0=(r,h)$, $A=(r,0)$ $(h,r=const,\ h>0,\ r>0)$, а при $y<0$ границами области Ω являются характеристики $AC: y^2=2x$ и $CB: y^2=2(r-x)$ $\left(C=\left(r/2,-\sqrt{r}\right)\right)$ уравнения (1) вместе с отрезком $J=AB$ прямой $y=0$. Обозначим через $\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$ -

гиперболическую часть области Ω, а через $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$ обозначим ее параболическую часть; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$.

Уравнение (1) при $y < 0$ совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода [4]

$$y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = 0, \qquad (2)$$

а при $y > 0$ уравнение (1) является уравнением третьего порядка с кратными характеристиками [5]

$$u_{xxx} - u_y + b u_x = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (2) в работах [4], [3] было рассмотрено как пример вырождающегося гиперболического уравнения, для которого при $|a| \le 1$ корректно поставлена задача Коши с начальными данными на линии вырождения $y = 0$, несмотря на то, что нарушено условие Геллерстедта. А.В. Лыков [11] при исследовании потока влаги в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры пришел к уравнению вида (2). К этому же уравнению можно прийти и с помощью линеаризации реактивно-диффузионного уравнения, которое широко используется в популяционной биологии [15]. В работе [14] показано, что однородная вторая Дарбу для уравнения (2) при $|a| = \pm 1$ имеет бесчисленное множество линейно независимых решений, а характеристики $AC: y^2 = 2x$ и $CB: y^2 = 2(r - x)$ уравнения (2) являются неравноправными как носители граничных условий второй задачи Дарбу.

По классификации, приведенной в монографии [15], уравнение (3) относится к уравнению параболического типа. В [5] такие уравнения названы уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками. В [20] впервые была изучена краевая задача Каттабрига для уравнения (3). В работе [5] построена функция Грина задачи Каттабрига для уравнения и с помощью нее выписано решение задачи Каттабрига в замкнутом виде. Различные локальные и нелокальные краевые задачи, в том числе краевые задачи с интегральными граничными условиями для общих уравнений третьего порядка с кратными характеристиками исследованы в работах [1], [6], [7], [8], [10]. Отметим также, что к уравнению вида (3) можно прийти в процессе линеаризации уравнения Кортевега-Де Фриза [21], имеющим важные применения в вопросах распространения нелинейных волн в слабодиспергирующих средах [9].

Уравнение (1) является уравнением параболо-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка на линии $y = 0$. В работах [17], [18] были исследованы нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка с характеристической и нехарактеристической линиями изменения типа и с оператором Бицадзе-Лыкова в области гиперболичности. Решение нелокальной краевой задачи для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с оператором Бицадзе-Лыкова в явном виде было выписано в работе [2].

В данной работе исследуется смешанная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка вида (1).

Постановка задачи

Определение. *Регулярным в области* Ω решением уравнения (1) назовем всякую функцию $u = u(x, y)$ из класса $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1)$, $u_{xxx}(x, y), u_y(x, y) \in C(\Omega_2)$, $u_x(x, 0), u_y(x, 0) \in L_1[0, r]$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1) из класса $u_{xx} \in C(\Omega_2 \cup AA_0 \cup BB_0)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_{xx}(0,y)+\alpha(y)u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u_{xx}(r,y)+\beta(y)u(r,y)=\varphi_2(y),$$

$$u_x(0,y)=\varphi_3(y), \qquad 0<y<h, \tag{4}$$

$$u|_{AC}=\psi(x), \qquad 0\le x\le r, \tag{5}$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\varphi_i(y)\in C[0,h]$, $i=\overline{1,3}$, $\psi(x)\in C^2[0,r/2]$ – заданные функции.

Теорема единственности решения задачи 1

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $\alpha(y)$, $\beta(y)$, b задачи 1 таковы, что*

$$2\alpha(y)\le b\le 2\beta(y), \quad \forall \; y\in[0,h], \tag{6}$$

$$b\ne\left(\frac{2\pi n}{r}\right)^2, \quad n\in N. \tag{7}$$

Тогда решение задачи 1 единственно в классе регулярных функций.

Действительно, пусть

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u(x,y)=\tau(x), \quad 0\le x\le r, \tag{8}$$

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=\nu(x), \quad 0<x<r. \tag{9}$$

Решение задачи Коши (8) – (9) для уравнения (2) найдено в работе [4] и в зависимости от значения параметра a оно имеет вид:

$$u(x,y)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1\tau\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\beta-1}t^{\alpha-1}\,dt+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,y}{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^1\nu\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{-\alpha}t^{-\beta}\,dt, \quad |a|<1, \tag{10}$$

$$u(x,y)=\tau\left(x+\frac{1}{2}y^2\right)+\frac{y}{2}\int_0^1\nu\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right]t^{-1/2}\,dt, \quad a=1, \tag{11}$$

$$u(x,y)=\tau\left(x-\frac{1}{2}y^2\right)+\frac{y}{2}\int_0^1\nu\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{-1/2}\,dt, \quad a=-1, \tag{12}$$

где $\alpha=\dfrac{1-a}{4}$, $\beta=\dfrac{1+a}{4}$.

Удовлетворяя формулы (10), (11), (12) условию (5), после некоторых преобразований, находим следующие фундаментальные соотношения между введенными выше искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\gamma_1 D_{0x}^{1/2}\tau(t)-\gamma_2 x^{\alpha} D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{t}{2}\right), \qquad |a|<1, \tag{13}$$

$$\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[D_{0x}^{1/2}\tau(t)-D_{0x}^{1/2}\psi\left(\frac{t}{2}\right)\right], \qquad a=1, \tag{14}$$

$$\nu(x)=-x^{1/2}\psi'\left(\frac{x}{2}\right), \qquad a=-1, \tag{15}$$

где $\gamma_1=\dfrac{2\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta)}$, $\gamma_2=\dfrac{2\Gamma(1-\alpha)}{\sqrt{\pi}}$, $D_{cx}^{\delta}\varphi(t)$ – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка $|\delta|$ с началом в точке c. Определение и подробное исследование свойств оператора $D_{cx}^{\delta}\varphi(t)$ приведены в монографиях [15], [12], [19].

Справедлива

Лемма 1. *Для однородной задачи, соответствующей задаче 1* $(\psi(x)\equiv 0)$, *из фундаментальных соотношений (13), (14) следует, что интеграл*

$$J=\int_0^r \tau(x)\nu(x)dx\ge 0, \tag{16}$$

а из соотношения (15) вытекает равенство: $J=0$.

Справедливость леммы 1 вытекает из свойства положительности оператора $D_{cx}^{\delta}\varphi(t)$ дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка $\delta\in[0,1[$, которое формулируется следующим образом [12]:

Лемма 2. *Для любого* $\delta\in[0,1[$ *и любой функции* $\varphi=\varphi(x)\in A_0^{\delta}[a,b]$, *где* $A_0^{\delta}[a,b]$ – *это множество всех функций* $\varphi(x)$, *имеющих абсолютно непрерывный на сегменте* $[a,b]$ *дробный интеграл порядка* $1-\delta$, *который обращается в нуль при* $x=a$, *скалярное произведение*

$$\left(\varphi, D_{cx}^{\delta}\varphi(t)\right)_0=\int_a^b \varphi(x)D_{ax}^{\delta}\varphi(t)dx\ge 0,$$

причем $\left(\varphi, D_{cx}^{\delta}\varphi(t)\right)_0=0$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(x)\equiv 0$.

Далее, переходя в уравнении (1) к пределу при $y\to+0$, с учетом условий (4), найдем фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию $y=0$:

$$\nu(x)=\tau'''(x)+b\,\tau'(x), \qquad 0<x<r, \tag{17}$$

$$\tau''(0)+\alpha(0)\tau(0)=\varphi_1(0), \qquad \tau''(r)+\beta(0)\tau(r)=\varphi_2(0), \qquad \tau'(0)=\varphi_3(0). \tag{18}$$

Лемма 3. *Для соответствующей задаче 1 однородной задачи* $\left(\varphi_i(y)=0,\ i=\overline{1,3}\right)$, *при условиях теоремы 1, имеет место неравенство*

$$J=\int_0^r \tau(x)\nu(x)dx \le 0. \tag{19}$$

Действительно, умножая обе части соотношения (17) на функцию $\tau(x)$, а затем интегрируя полученное равенство по переменной x в пределах от 0 до r, с учетом однородных краевых условий (4) $\left(\varphi_i(y)=0,\ i=\overline{1,3}\right)$, находим:

$$J=\int_0^r \tau(x)\nu(x)dx=\int_0^r \tau(x)\left[\tau'''(x)+b\,\tau'(x)\right]dx=$$
$$=\left[\frac{b}{2}-\beta(0)\right]\tau^2(r)+\left[\alpha(0)-\frac{b}{2}\right]\tau^2(0)-\frac{1}{2}\tau'^2(r)\le 0.$$

Из неравенств (16) и (19) вытекает, что при $-1<a\le 1$ интеграл $J=0$, а из заключения леммы 2 следует, что равенство

$$J=\int_0^r \tau(x)\nu(x)dx=\gamma_1\int_0^r \tau(x)D_{0x}^{1/2}\tau(t)dx=0$$

может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x)=0$. При этом из соотношений (13) и (14) следует, что и $\nu(x)=0$, и, стало быть, $u(x,y)\equiv 0$ в области Ω_1 как решение задачи Коши для уравнения (2) (формулы (8), (9)). Если же $a=-1$, то при выполнении условия (7) решение однородной задачи

$$\tau'''(x)+b\,\tau'(x)=0,\quad 0<x<r,$$

$$\tau''(0)+\alpha(0)\tau(0)=0,\quad \tau''(r)+\beta(0)\tau(r)=0,\quad \tau'(0)=0$$

не может отличаться от тривиального. При этом из (15) $\left(\text{при } \psi(x)\equiv 0\right)$ и формулы (10) следует, что и в этом случае $u(x,y)\equiv 0$ в области Ω_1.

Покажем далее, что и задача нахождения регулярного в области Ω_2 решения уравнения (3), удовлетворяющего однородным граничным условиям, соответствующим условиям (4) и однородному начальному условию $u(x,0)=0$ при условиях теоремы 1 не может иметь решений, отличных от тривиального. В области Ω_2 рассмотрим однородную задачу: *найти регулярное в области* Ω_2 *решение* $u=u(x,y)$ *уравнения (3) из класса* $u_{xx}(x,y)\in C\left(\Omega_1\cup AA_0\cup BB_0\right)$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0)=0,\qquad 0\le x\le r \tag{20}$$

и граничным условиям

$$u_{xx}(0,y)+\alpha(y)u(0,y)=0,\quad u_{xx}(r,y)+\beta(y)u(r,y)=0,\quad u_x(0,y)=0,\quad 0<y<h, \tag{21}$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$ – заданные функции из класса $C[0,h]$.

Допустим, что задача (3), (20), (21) имеет нетривиальное решение $u=u(x,y)\ne 0$. Следуя работам [8], [13], [14] положим

$$u(x,y)=\upsilon(x,y)\exp(\mu y). \tag{22}$$

При этом относительно функции $\upsilon = \upsilon(x, y)$ получаем уравнение

$$L_\mu \upsilon = \upsilon_{xxx} - \upsilon_y + b\upsilon_x - \mu\upsilon = 0 \tag{23}$$

с начальным и краевыми условиями:

$$\begin{cases} \upsilon(x,0) = 0, \quad \upsilon_x(0,y) = 0, \\ \upsilon_{xx}(0,y) + \alpha(y)\upsilon(0,y) = 0, \\ \upsilon_{xx}(r,y) + \beta(y)\upsilon(r,y) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Так как, по предположению, функция $u = u(x, y)$ является нетривиальным решением однородной задачи (3), (20), (21), то как следует из (22), задача (23), (24) тоже будет иметь нетривиальное решение $\upsilon = \upsilon(x, y) \neq 0$.

Пусть $\Omega_{2\varepsilon}$ – это область, определенная неравенствами $\Omega_{2\varepsilon} = \{(x,y) : \varepsilon < x < r - \varepsilon,\ \varepsilon < y < h - \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$. В области $\Omega_{2\varepsilon}$ рассмотрим тождество:

$$2(\upsilon, L_\mu \upsilon)_0 = \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} 2\upsilon L_\mu \upsilon\, dx\, dy = \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} 2\upsilon\left[\upsilon_{xxx} - \upsilon_y + b\upsilon_x - \mu\upsilon\right] dx\, dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[2\upsilon\upsilon_{xx} - \upsilon_x^2 + b\upsilon^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\upsilon^2\right] \right\} dx\, dy - 2\mu \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \upsilon^2\, dx\, dy = 0. \tag{25}$$

Применяя к равенству (25) формулу Грина, получим

$$2(\upsilon, L_\mu \upsilon)_0 = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left\{ \left[2\upsilon\upsilon_{xx} - \upsilon_x^2 + b\upsilon^2\right] dy + \left[\upsilon^2\right] dx \right\} - 2\mu \int\limits_{\Omega_{2\varepsilon}} \upsilon^2\, dx\, dy = 0, \tag{26}$$

где Γ_ε – это граница области $\Omega_{2\varepsilon}$. Переходя в равенстве (26) к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом однородных начально-краевых условий (24), приходим к равенству:

$$2(\upsilon, L_\mu \upsilon) = \int\limits_0^h [2\alpha(y) - b]\upsilon^2(0,y)\, dy + \int\limits_0^h [b - 2\beta(y)]\upsilon^2(r,y)\, dy -$$

$$- \int\limits_0^r \upsilon^2(x,h)\, dx - \int\limits_0^h \upsilon_x^2(r,y)\, dy - 2\mu \int\limits_{\Omega_2} \upsilon^2(x,y)\, dx\, dy = 0. \tag{27}$$

Выбирая положительное значение параметра μ, и, пользуясь условием (6) теоремы 1, замечаем, что левая часть равенства (27) становится строго отрицательной, что невозможно, если $\upsilon(x,y) \neq 0$ хотя бы в одной точке области $\overline{\Omega}_2$. Тогда согласно (22) $u(x,y) \equiv 0$ всюду в $\overline{\Omega}_2$.

Теорема о существовании решения задачи 1

Теорема 2. *При условиях (6), (7) решение задачи 1 существует.*

Действительно, из соотношений (13) и (17) при $|a| < 1$ приходим к следующей системе уравнений относительно $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\begin{cases} \nu(x) = \gamma_1 D_{0x}^{1/2}\tau(t) - \gamma_2 x^{\alpha} D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{t}{2}\right), \\ \nu(x) = \tau'''(x) + b\tau'(x), \end{cases}$$

откуда относительно функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения регулярного решения уравнения

$$\tau'''(x) + b\tau'(x) - \gamma_1 D_{0x}^{1/2}\tau(t) = -\gamma_2 x^{\alpha} D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{t}{2}\right), \quad 0 < x < r, \qquad (28)$$

удовлетворяющего условиям (18).

Из постановки задачи 1 следует, условия (18) эквивалентны следующим условиям Коши

$$\tau(0) = \psi(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0), \quad \tau''(0) = \varphi_1(0) - \alpha(0)\psi(0). \qquad (29)$$

Общее решение уравнения (28) выписывается по формуле [16]:

$$\tau(x) = \int_0^x G_2^3(x-t;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2) f(t)dt + c_1 G_2^3(x;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2) +$$

$$+ c_2 G_2^2(x;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2) + c_3 G_2^1(x;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2), \qquad (30)$$

где $f(x) = -\gamma_2 x^{\alpha} D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{t}{2}\right)$; c_1, c_2, c_3 – пока неизвестные произвольные постоянные;

$$G_m^{\mu} \equiv G_m^{\mu}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_m;\beta_1,\ldots,\beta_m) = \int_0^{\infty} e^{-t} S_m^{\mu}(x;\lambda_1 t,\ldots,\lambda_m t;\beta_1,\ldots,\beta_m)dt,$$

$S_m^{\mu}(x;z_1,\ldots,z_m;\beta_1,\ldots,\beta_m) = (h_1 * h_2 * \ldots * h_m)(x)$, $(\varphi * g)(x) = \int_0^x \varphi(x-t)g(t)dt$ – свертка Лапласа функций $\varphi(x)$ и $g(x)$, $h_i = h_i(x) = x^{\mu_i - 1}\phi(\beta_i,\mu_i,z_i x^{\beta_i})$, $\phi(\xi,\eta;z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!\Gamma(\xi j+\eta)}$ – функция Райта [22].

Удовлетворяя (30) начальным условиям (29), находим:

$$c_1 = \varphi_1(0) - \alpha(0)\psi(0), \qquad c_2 = \varphi_3(0), \quad c_3 = \psi(0).$$

Подставляя найденные значения c_1, c_2, c_3 находим решение задачи (28)-(29) по формуле:

$$\tau(x) = \int_0^x G_2^3(x-t;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2) f(t)dt + \psi(0)G_2^1(x;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2) +$$

$$+ \varphi_3(0)G_2^2(x;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2) + [\varphi_1(0) - \alpha(0)\psi(0)]G_2^3(x;\ -b,\gamma_1;\ 2{,}5/2).$$

По такой же формуле дается представление искомой функции $\tau(x)$ и в случае, когда $a = 1$ $\left(\alpha = 0,\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)$. А когда $a = -1$, из соотношений (15) и (17) приходим к задаче (29) для уравнения

$$\tau'''(x)+b\tau'(x)=-x^{1/2}\,\psi'(x/2),$$

решение которого, в зависимости от знака числа b выписывается по формуле:

$$\tau(x)=\frac{1}{b}\Big\{b\psi(0)+[\varphi_1(0)-\alpha(0)\psi(0)]\big[1-\cos\sqrt{b}x\big]+$$

$$+\sqrt{b}\,\varphi_3(0)\sin\sqrt{b}x-\int_0^x\big[1-\cos\sqrt{b}(x-t)\big]t^{1/2}\,\psi'(t/2)dt\Big\},\quad b>0;$$

$$\tau(x)=\psi(0)+\varphi_3(0)x+\frac{\varphi_1(0)-\alpha(0)\psi(0)}{2}x^2-\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2\,t^{1/2}\psi'(t/2)dt,\ b=0;$$

$$\tau(x)=\frac{1}{b}\Big\{b\psi(0)+[\varphi_1(0)-\alpha(0)\psi(0)]\big[1-ch\sqrt{-b}x\big]-$$

$$-\sqrt{-b}\,\varphi_3(0)sh\sqrt{-b}x-\int_0^x\big[1-ch\sqrt{-b}(x-t)\big]t^{1/2}\,\psi'(t/2)dt\Big\},\quad b<0.$$

Теперь, после того как функция $\tau=\tau(x)$ найдена, функцию $\nu=\nu(x)$ можно легко найти из фундаментальных соотношений (13), (14), (15) или (17). Тогда решение задачи 1 в области Ω_1 выписывается как решение задачи Коши для уравнения (2) по соответствующим формулам (10), (11) или (12). А в области Ω_2 приходим к задаче регулярного решения $u=u(x,y)$ уравнения (3), удовлетворяющего начальному условию $u(x,0)=\tau(x)$ и граничным условиям (4), которая исследована в работе [1].

Список литературы
References

1. Абдиназаров С. 1981. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Дифференц. уравнения, 17(1): 3-12.

Abdinazarov S. 1981. General boundary value problems for a third-order equation with multiple characteristics. Differentsial'nye Uravneniya, 17(1): 3–12(In Russian) .

2. Балкизов Ж.А. 2014. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка с оператором Бицадзе-Лыкова в области гиперболичности. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 16 (4): 15-23.

Balkizov Zh.A. 2014. Nonlocal boundary-value problem for the third-order parabolic-hyperbolic equation equation with the Bitsadze-Lykov operator in the hyperbolic area. Proceedings of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 16(4): 15-23. (In Russian)

3. Бицадзе А.В. 1980. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 448.

Bitsadze A.V. 1980. Some classes of partial differential equations. M .: Nauka, 448. (In Russian)

4. Бицадзе А.В. 1959. Уравнения смешанного типа. М.: издательство АН СССР, 165.

Bitsadze, A.V. 1959. Equations of mixed type. M .: publishing house of the USSR Academy of Sciences, 165. (In Russian)

5. Джураев Т.Д. 1979. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 238.

Dzhuraev, T.D. 1979. Boundary value problems for mixed and mixed-compound equations. Tashkent: FAN, 238. (In Russian)

6. Джураев Т.Д., Иргашев Ю. 1976. О краевой задаче Каттабрига для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. Сборник научных трудов "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения". Ташкент: ФАН, 141-155.

Dzhuraev T.D., Irgashev Yu. 1976. On the Kattabriga boundary value problem for third-order equations with multiple characteristics. Collected scientific papers "Boundary value problems for differential equations and their applications". Tashkent: FAN: 141-155. (In Russian)

7. Джураев Т.Д., Абдиназаров С. 1981. Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. Известия Академии наук УзССР. Серия физико-математические науки, №1: 16-22.

Dzhuraev T.D., Abdinazarov S. 1981. Boundary value problems of the Bitsadze-Samarskii problem for third-order equations with multiple characteristics. Izvestiya Akademii Nauk UzSSR. Series of physical and mathematical sciences, №1:16-22. (In Russian)

8. Иргашев Ю. 1976. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. Сборник научных трудов "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения". Ташкент: ФАН: 17-31.

Irgashev Yu. 1976. Some boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics. Collected scientific papers "Boundary value problems for differential equations and their applications". Tashkent: FAN: 17-31. (In Russian)

9. Карпман В.И. 1973. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М: Наука, 175.

Karpman V.I. 1973. Nonlinear waves in dispersive media. M: Nauka, 175. (In Russian)

10. Лукина Г.А. 2011. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега-Де Фриза. Вестник Южно-Уральского государственного университета. №17 (234): 52-61.

Lukina G.A. 2011. Boundary value problems with integral boundary conditions for the linearized Korteweg-De Vries equation. Vestnik of the South Ural State University. 17 (234), 52-61. (In Russian)

11. Лыков А.В. 1965. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена. Инженерно-физический журнал, 9(3): 287-304.

Lykov A.V. 1965. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer. Engineering and Physics Journal, 9(3) 287-304. (In Russian)

12. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 272.

Nakhushev A.M. 2003. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 272. (In Russian)

13. Нахушев А.М. 1978. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа. Дифференц. уравнения,14(1) 56-73.

Nahushev A. M. 1978. On the theory of linear boundary value problems for a second order equation of mixed hyperbolic-parabolic type. (In Russian) Differencial′nye Uravnenija 14 (1): 66–73.

14. Нахушев А.М. 1971. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений. Дифференц. уравнения, 7(1): 49-56.

Nahushev A. M. 1971. The Darboux problem for degenerate hyperbolic equations // (In Russian) Differencial′nye Uravnenija 7 (1): 49 – 56.

15. Нахушев А.М. 1995. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 301.

Nakhushev A.M. 1995. Equations of mathematical biology. M.: Visshaya shkola, 301. (In Russian)

16. Псху А.В. 2011. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка. Математический сборник, 202(4): 112-122.

Pskhu A.V. 2011. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order. Sbornik: Mathematics, 202(4):571

17. Репин О.А. 1992. Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа. Дифференц. уравнения, 28(1): 173-176.

Repin O.A. 1992. A nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a characteristic line of change of type. Differentsial′nye Uravneniya 28 (1): 173–176. (In Russian)

18. Репин О.А., Ефимова С.В. 2002. Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. Вестник Са-

марского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, №16: 10-14.

Repin O.A., Efimova S.V. 2002. Nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a noncharacteristic line of type variation. Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physics and mathematics, № 16: 10-14. (In Russian)

19.Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: «Наука и техника», 588.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. 1987. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: "Science and Technology", 588. (In Russian)

20.Cattabriga L. 1959. Annali della seuola normole Superici di pisa e mat., 13(2): 163.

21.Korteweg D.J. De Vries G. 1895. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves. Philosophical Magazine, 39: 422-443.

22.Wright E.M. 1940. The generalized Bessel function of order greater than one. Quart. J. Math. Oxford Ser, 11: 36-48.