УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS WITH DISTRIBUTION OF ZERO CURVATURE

С.В. Галаев
S.V. Galaev

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,
Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83

E-mail: sgalaev@mail.ru;

Аннотация. В настоящей статье тензор Схоутена на многообразии с почти контактной метрической структурой определяется двумя способами: как тензор кривизны внутренней связности и как трансверсальная часть тензора кривизны ассоциированной связности. Тензор кривизны Схоутена получает название тензора кривизны распределения почти контактного метрического многообразия. Изучаются свойства тензора кривизны распределения, доказывается, в частности, что тензор кривизны распределения почти контактного метрического многообразия равен нулю тогда и только тогда, когда на многообразии M существует атлас адаптированных карт, в котором коэффициенты внутренней связности равны нулю. В случае обращения в нуль тензора Схоутена, распределение почти контактной метрической структуры названо в работе распределением нулевой кривизны. Показано, что всякое контактное метрическое пространство с распределением нулевой кривизны является K-контактным метрическим пространством, а всякое сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны - η-Эйнштейновым многообразием.

Resume. In the present paper, the Schouten tensor on a manifold with an almost contact metric structure is defined in two ways: as the curvature tensor of the interior connection and as the transversal component of the curvature tensor of the associated connection. The Schouten curvature tensor obtains the name of the curvature tensor of the distribution of an almost contact metric manifold. The properties of the curvature tensor of the distribution are studied, in particular, it is shown that the curvature tensor of an almost contact metric manifold equals zero if and only if on the manifold M there exists an atlas of adapted charts with respect to that the Christoffel symbols of the interior connection equal zero. In the case, when the Schouten tensor is zero, the distribution of the almost contact metric structure is called in this paper the distribution of zero curvature. It is shown that each contact metric space with distribution of zero curvature is a Ḱ-contact metric space, and each Sasaki manifold of zero curvature is an η-Einstein manifold.

Ключевые слова: многообразия Сасаки, внутренняя связность, ассоциированная связность, тензор кривизны Схоутена, распределение нулевой кривизны.

Key words: Sasaki manifold, interior connection, associated connection, Schoten curvature tensor, distribution of zero curvature.

Введение

Понятие тензора кривизны оснащенного неголономного многообразия введено Схоутеном и ван Кампеном [2]. Впоследствии, заданный Схоутеном и ван Кампеном тензор был назван В.В. Вагнером тензором Схоутена [5]. Существуют два основных способа введения тензора Схоутена в геометрию почти контактных метрических многообразий. Тензор Схоутена может быть определен как тензор кривизны внутренней связности (связности в неголономном многообразии) [2], [5-7]. Альтернативным способом задания тензора Схоутена является выделение трансверсальной составляющей у тензора кривизны некоторой связности (отличной от связности Леви-Чивита), возникающей на многообразии с почти контактной метрической структурой. При этом термин «тензор Схоутена» не употребляется [1], [3].

В настоящей работе тензор Схоутена мы называем тензором кривизны распределения D многообразия M с почти контактной метрической структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$. Существуют и другие способы определения тензора кривизны распределения почти контактного метрического многообразия. В [10] под тензором кривизны распределения понимается тензор кривизны некоторой связности в векторном расслоении (M,π,D). В работе [5] Вагнер вводит понятие тензора кривизны (тензора кривизны Вагнера) оснащенного неголономного многообразия коразмерности 1. В случае контактного метрического многообразия тензор кривизны Вагнера также может быть описан как тензор кривизны связности (отличной от связности, изучаемой в работе [10]) в векторном расслоении (M,π,D). Задание связности Вагнера сводится к продолжению внутренней связности до связности (N-продолженной связности) в векторном расслоении с помощью эндоморфизма $N:D\to D$, имеющего специальное строение.

Предлагаемая работа устроена следующим образом. Во втором разделе на почти контактном метрическом многообразии M вводится понятие внутренней связности, определяется тензор кривизны Схоутена. и изучаются его свойства. В третьем разделе доказываются основные результаты работы. В частности, показывается, что контактное метрическое многообразие с распределением нулевой кривизны является K-контактным многообразием. Доказывается, также, что сасакиево многообразие с распределением нулевой кривизны является η-Эйнштейновым многообразием.

Тензор кривизны Схоутена и его свойства

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $n=2m+1$, $\Gamma(TM)$ – модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$, где φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2=-I+\eta\otimes\vec{\xi}$, 2) $\eta\left(\vec{\xi}\right)=1$, 3) $g(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y})=g(\vec{x},\vec{y})-\eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, 4) $d\eta\left(\vec{\xi},\vec{x}\right)=0$,

где $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D=\ker\eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1) – 4) получаем:

5) $\varphi\vec{\xi}=\vec{0}$, 6) $\eta\circ\varphi=0$, 7) $\eta(\vec{x})=g\left(\vec{x},\vec{\xi}\right)$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$.

Если $rk\,\omega=2m$, где $\omega=d\eta$, вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta\left(\vec{\xi}\right)=1$, $\ker\omega=Span\left(\vec{\xi}\right)$.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x},\vec{y})=g(\vec{x},\varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega=d\eta$. Гладкое распределение $D^\perp=Span\left(\vec{\xi}\right)$, ортогональное распределению D, называется оснащением распределения D. Имеет место разложение $TM=D\oplus D^\perp$.

Многообразие Сасаки – контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi+2d\eta\otimes\vec{\xi}=0$, где $N_\varphi(\vec{x},\vec{y})=[\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}]+\varphi^2[\vec{x},\vec{y}]-\varphi[\varphi\vec{x},\vec{y}]-\varphi[\vec{x},\varphi\vec{y}]$ – тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_\varphi+2d\eta\otimes\vec{\xi}=0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством.

Карту $K(x^{\alpha})$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1,..., n; a, b, c = 1,..., n$-1) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [2]. Пусть $P: TM \to D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $K(x^{\alpha})$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов $(\vec{e}_{\alpha}) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a.\eta = \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K'(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a\left(x^{a'}\right),\ x^n = x^{n'} + x^n\left(x^{a'}\right).$$

Тензорное поле t типа (p,q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид:

$$t = t^{a_1...a_p}_{b_1...b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes ... \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'}, \text{ где } A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}.$$

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ компонент допустимого тензорного поля являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Внутренней линейной связностью ∇ [8] на многообразии с почти контактной метрической структурой называется отображение

$$\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$1)\ \nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}};$$

$$2)\ \nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}.$$

$$3)\ \nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D.

Внутренняя связность определяет дифференцирования допустимых тензорных полей. Так, например, для допустимой почти комплексной структуры выполняется равенство $(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности:

$$\Gamma_{ab}^{c} = A_{a}^{a'} A_{b}^{b'} A_{c'}^{c} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_{c'}^{c} \vec{e}_{a} A_{b}^{c'}.$$

Кручением внутренней связности назовем допустимое тензорное поле

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}], \ \vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D).$$

Внутреннюю связность будем называть симметричной, если ее кручение равно нулю. В случае симметричности внутренней связности в адаптированных координатах получаем:

$$S_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c} - \Gamma_{ba}^{c} = 0 \text{ или } \Gamma_{ab}^{c} = \Gamma_{ba}^{c}.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P\left[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [5] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R_{abc}^{d} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^{d} + 2\Gamma_{[a|e|}^{d}\Gamma_{b]c}^{e}$.

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a}\nabla_{b]}v^{c} = R_{abe}^{c}v^{e} + 4\omega_{ba}\partial_{n}v^{c}.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения *D*, а распределение *D*, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны.

Аналогом связности Леви-Чивита является внутренняя симметричная связность ∇ такая, что $\nabla g = 0$, где g – допустимое тензорное поле, определяемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Известно [5], что внутренняя симметричная метрическая связность существует и определена единственным образом. Ее коэффициенты задаются равенствами

$$\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_{b}g_{cd} + \vec{e}_{c}g_{bd} - \vec{e}_{d}g_{bc}\right). \quad (1)$$

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля, определяемые равенствами $h\vec{x} = \frac{1}{2}\left(L_{\vec{\xi}}\varphi\right)(\vec{x})$, $C(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(L_{\vec{\xi}}g\right)(\vec{x},\vec{y})$, $g(C\vec{x},\vec{y}) = C(\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(TM)$. В адаптированных координатах получаем:

$$h_{b}^{a} = \frac{1}{2}\partial_{n}\varphi_{b}^{a}, \ C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_{n}g_{ab}, \ C_{b}^{a} = g^{da}C_{db}.$$

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви-Чивита контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c}, \ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = \omega_{ba} - C_{ab}, \ \tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = C_{a}^{b} - \varphi_{a}^{b}, \ \tilde{\Gamma}_{n\alpha}^{n} = \Gamma_{nn}^{\alpha} = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\vec{e}_{b}g_{cd} + \vec{e}_{c}g_{bd} - \vec{e}_{d}g_{bc}\right)$.

Пусть $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ – тензор кривизны связности Леви-Чивита контактного метрического пространства. Используя результаты теоремы 1, и проводя вычисления в адаптированных координатах, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Тензор кривизны* $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ *связности Леви-Чивита* $\tilde{\nabla}$ *связан с тензором кривизны Схоутена* $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ *следующим соотношением:*

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}+\eta(\vec{x})P(\vec{y},\vec{z})-\eta(\vec{y})P(\vec{x},\vec{z})+g(\vec{z},\varphi\vec{x})\varphi\vec{y}-g(\vec{z},\varphi\vec{y})\varphi\vec{x}-$$
$$-2g(\vec{x},\varphi\vec{y})\varphi\vec{z}+\eta(\vec{z})\eta(\vec{y})\vec{x}-\eta(\vec{z})\eta(\vec{x})\vec{y}+\eta(\vec{x})g(\vec{y},\vec{z})\vec{\xi}-\eta(\vec{y})g(\vec{x},\vec{z})\vec{\xi} \quad (2)$$

Здесь $P(\vec{x},\vec{y})$ – допустимое тензорное поле с компонентами $P^a_{bc}=\partial_n\Gamma^a_{bc}$.

Прежде чем переходить к обсуждению свойств тензора Схоутена, введем понятия N-связности ∇^N [4], [9] и ассоциированной связности ∇^A, естественным образом связанных с данной внутренней связностью.

Пусть на многообразии M с почти контактной структурой и внутренней линейной связностью ∇ задан эндоморфизм $N:D\to D$.

N-связность ∇^N определим как единственную связность на многообразии M, удовлетворяющую следующим условиям:

$$1)\ \nabla^N_{\vec{x}}\vec{y}\in\Gamma(D), \quad (3)$$

$$2)\ \nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi}=\vec{0}, \quad (4)$$

$$3)\ \nabla^N_{\vec{x}}\vec{y}=\left[\vec{\xi},\vec{y}\right]+N\vec{y}, \quad (5)$$

$$4)\ \nabla^N_{\vec{y}}\vec{z}=\nabla_{\vec{y}}\vec{z}, \quad (6)$$

$$\vec{x}\in\Gamma(TM),\ \vec{y},\vec{z}\in\Gamma(D).$$

Корректность определения N-связности связности подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. *На почти контактном метрическом многообразии M с заданной на нем внутренней связностью* ∇ *и эндоморфизмом* $N:D\to D$ *существует и притом единственная связность* $\nabla^N_{\vec{x}}$, *удовлетворяющая условиям (3)-(6).*

Доказательство.

1. Единственность. Предположим, что связность $\nabla^N_{\vec{x}}$, удовлетворяющая условиям (3)-(6), существует. Введем следующее обозначение для ее коэффициентов: $\Gamma^{N\alpha}_{\beta\gamma}$. Из выполнения условий (3)-(6) следует, что в адаптированных координатах отличными от нуля коэффициентами $\Gamma^{A\alpha}_{\beta\gamma}$ являются коэффициенты $\Gamma^{Na}_{bc}=\Gamma^c_{ab}$ и $\Gamma^{Na}_{nc}=N^a_c$.

2. Существование. Определяя в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты $\Gamma^{N\alpha}_{\beta\gamma}$ с помощью равенств $\Gamma^{Aa}_{bc}=\Gamma^c_{ab}$, $\Gamma^{Na}_{nc}=N^a_c$ получаем искомую связность. Теорема доказана.

Кручение $S(\vec{x},\vec{y})$ и кривизна $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ N-связности определяются, соответственно, следующем образом:

$$S(\vec{x},\vec{y})=2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}+\eta(\vec{x})N\vec{y}-\eta(\vec{y})N\vec{x},$$

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z}+R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}+\eta(\vec{x})\Big(P(\vec{y},\vec{z})-\Big(\nabla^N_{P\vec{y}}N\Big)\vec{z}\Big)-\eta(\vec{y})\Big(P(\vec{x},\vec{z})-\Big(\nabla^N_{P\vec{x}}N\Big)\vec{z}\Big),$$

$$\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma(TM).$$

N-связность с нулевым эндоморфизмом N будем называть ассоциированной связностью с внутренней связностью ∇ и обозначать ∇^A. Для кривизны и кручения ассоциированной связности имеем следующие равенства:

$$S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}, \tag{7}$$

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})P(\vec{y},\vec{z}) - \eta(\vec{y})P(\vec{x},\vec{z}), \tag{8}$$

$\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM)$.

Таким образом, из равенства (8) следует, что

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}\text{, если } \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D). \tag{9}$$

Пусть $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$ – тензор кривизны распределения почти контактной метрической структуры. Допустимое тензорное поле $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u}) = g(R(\vec{x},\vec{y})\vec{u},\vec{z})$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u} \in \Gamma(D)$, также будем называть тензором кривизны распределения почти контактной метрической структуры. Тензор кривизны Схоутена K-контактных пространств наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве $\nabla_{[e}\nabla_{a]}g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac}$. Тем не менее, имеет место

Теорема 4. *Тензор* $R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u})$ *кривизны распределения почти контактной метрической структуры удовлетворяет следующим условиям:*

$$R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u}) + R(\vec{y},\vec{x},\vec{z},\vec{u}) = 0, \tag{10}$$

$$\Sigma_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\{R(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u})\} = 0, \tag{11}$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u} \in \Gamma(D)$.

Справедливость равенства (10) подтверждается известным свойством тензора кривизны произвольной связности и равенством (9).

Для доказательства (11) воспользуемся тождеством Бьянки, координатная запись которого имеет вид:

$$K^i_{[kjl]} = 2\nabla_{[k}S^i_{jl]} - 4S^h_{[kj}S^i_{l]h}. \tag{12}$$

Из (7) следует, что отличными от нуля компонентами тензора кручения ассоциированной связности являются

$$S^n_{ab} = 2\omega_{ab}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$K^n_{[cab]} = 4\nabla_{[c}\omega_{ab]}.$$

В адаптированных координатах компоненты $d\omega$ имеют вид:

$$d\omega_{abc} = \frac{1}{3}(\vec{e}_a\omega_{bc} + \vec{e}_b\omega_{ca} + \vec{e}_c\omega_{ab}),\ d\omega_{nab} = \frac{1}{3}\partial_n\omega_{ab}.$$

Таким образом, учитывая симметричность внутренней связности, убеждаемся в том, что равенство $d\omega_{\alpha\beta\gamma} = 0$ влечет равенство $\nabla_{[c}\omega_{ab]} = 0$. Тем самым, теорема доказана.

Контактные метрические пространства с распределением нулевой кривизны

Пусть M - контактное метрическое многообразие.

Теорема 5. *Контактное метрическое многообразие размерности с распределением нулевой кривизны является К-контактным пространством.*

Доказательство. Пусть ∇ – внутренняя метрическая связность: $\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y}) = 0,\quad \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$. Дифференцируя последнее равенство повторно и альтернируя полученный результат, получаем: $2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^d_{eab} - g_{bd}R^d_{eac} = 0$. Учитывая невырожденность формы ω, заключаем, что равенство $R^d_{eac} = 0$ влечет равенство $\partial_n g_{bc} = 0$. Что и доказывает теорему.

В качестве следствия теоремы 5 с учетом равенства (1) получаем:

Теорема 6. *Пусть M – многообразие, наделенное контактной метрической структурой, тогда обращение в нуль тензора кривизны Схоутена влечет равенство* $P^a_{bc} = 0$.

Теорема 7. *Пусть* $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi)$ *– почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда, обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства* $\Gamma^a_{bc} = 0$.

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Обращение в нуль тензора Схоутена влечет независимость коэффициентов связности Γ^a_{bc} от последней координаты: $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc} = 0$. Покажем, что на многообразии *M* можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах

$$\partial_a f^{b'} = A^{b'}_a,\quad \partial_a A^{c'}_b = \Gamma^c_{ab}A^{c'}_c. \tag{14}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям:

$$S^c_{ab}A^{c'}_c = 0,\quad R^d_{abc}A^{d'}_d = 0,$$

которые выполняются тождественно. Следовательно, система (14) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы.
Пусть *M* – многообразие Сасаки. Многообразие *M* называется η-Эйнштейновым сасакиевым многообразием [10], если выполняется равенство

$$R_{ij_g} = \lambda g + \nu\eta\otimes\eta,\quad \lambda,\nu \in \mathbb{R}.$$

Здесь R_{ij_g} – тензор Риччи риманова многообразия *M*.

Теорема 8. *Многообразие Сасаки с распределением нулевой кривизны является η-Эйнштейновым сасакиевым многообразием с* $\lambda = -2$.

Доказательство теоремы сводится к вычислению компонент тензора Риччи в адаптированных координатах.

Начнем с тензора кривизны $K(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$. Подставляя в (2) векторы неголономного базиса $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и используя результаты теоремы 1, получаем:

$$K^d_{abc} = \omega_{ca}\varphi^d_b - \omega_{cb}\varphi^d_a + 2\omega_{ba}\varphi^d_c,$$

$$K^n_{nbc} = g_{cb}.$$

Далее, получаем:

$$K^\alpha_{\alpha cb} = -3g_{cb} + g_{cb} = -2g_{cb}.$$

Аналогично, $K^\alpha_{\alpha bn} = 0$ и $K^\alpha_{\alpha nn} = 2m$, что и доказывает теорему.

Список литературы
References

1. Boyer C.P., Galicki K., Matzeu P. 2006. On eta-Einstein Sasakian geometry. COmm. Math. Phys. 262 (1): 177-208.

2. Schouten J., van Kampen E. 1930. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. Math. Ann. 103: 752–783.

3. Vezzoni L. 2010. Connections on contact manifolds and contact twistor spaces. Israel J. Math. 178: 253-267.

4. Букушева А.В. 2015. О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 17(214), 40.: 20-24.

Bukusheva A.V. 2015. The geometry of thq contact metric spaces φ-connection. Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. 17(214), 40: 20-24. (in Russian)

5. Вагнер В.В. 1941. Геометрия *(n-1)*-мерного неголономного многообразия в *n*-мерном пространстве. Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та. 5: 173-255.

Wagner V.V. 1941. Geometry of (n - 1)-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space. Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza, Moscow, Moscow Univ. Press. 5.: 173-255. (in Russian)

6. Галаев С.В. 2014. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны. Изв. вузов. Матем. 8: 42 - 52.

Galaev S.V. 2014. Almost contact Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. Russian Math. 58(8): 35-42.

7. Галаев С.В. 2016. Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой. Сибирский математический журнал. 57(3): 632-640.

Galaev S.V. 2016. Geometric interpretation of the Wagner curvature tensor in the case of a manifold with contact metric structure. Siberian Mathematical Journal. 57(3): 498–504.

8. Галаев С.В. 2012. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 12(1): 16-22.

Galaev S.V. 2012. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. Izv. Saratov. Univ. (N.S.) Ser. Mat. Mekh. Inform. 12(1): 16-22. (in Russian)

9. Галаев С.В. 2015. Почти контактные метрические пространства с N-связностью. Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 15(3): 258–264.

Galaev S.V. 2015. Almost Contact Metric Spaces with N-connection. Izv. Saratov. Univ. (N.S.) Ser. Mat. Mekh. Inform. 15(3): 258–264. (in Russian)

10. Соловьев А.Ф. 1987. Контактные метрические многообразия и классы Чжэня. Изв. вузов. Матем. 1: 33 - 41.

Soloviev A.F. 1987. Contact metric manifolds and Zhen classes. Soviet Mathematics. 31:1: 43–53.