УДК 517.9

ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

EVALUATION OF THE EIGENVALUES OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL OPERATOR OF SECOND ORDER WITH FRACTIONAL DERIVATIVE IN THE JUNIOR MEMBERS

М.В. Кукушкин
M.V. Kukushkin

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89a ShortanovaSt, Nalchik, 360000, Russia

E-mail:kukushkinmv@rambler.ru;

Аннотация. В данной работе получен результат являющийся следствием вполне непрерывного вложения энергетического пространства порожденного дифференциальным оператором второго порядка с дробными производными в младших членах. Доказана теорема, позволяющая охарактеризовать рост собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах.

Resume. In this paper we investigate the result which is a consequence of a completely continuous embedding energy space generated by a differential operator of second order with fractional derivatives in junior members. A theorem that allows to describe the growth of the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem for a differential operator of second order with fractional derivatives in junior members is proved.

Ключевые слова: энергетическое пространство, оператор дробного дифференцирования, оператор Штурма-Лиувилля.

Key words: energetic space, operator of fractional differentiation, operator of Sturm-Liouville.

Введение

Считается известным (например см.[1]), что вполне непрерывное вложение энергетического пространства порожденного положительно определенным оператором в исходное пространство, дает возможность с помощью задания отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов, оценить собственные значения оператора собственными значениями оператора более простого типа. В работе [2] 1977 г. рассмотрена задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами при дробных производных в младших членах. Доказанная в работе [3] 2015 г. полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования, действующего в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций, дает возможность перенести некоторые классические результаты теории положительно определенных операторов, для оператора дробного дифференцирования полуограниченного снизу. В частности как было сказано ранее важное значение имеет вопрос о вполне непрерывном вложении энергетического пространства порожденного оператором дробного дифференцирования в исходное пространство. Если не оговорено иное, будем полагать: $\alpha \in (0,1)$, $x \in (a,b) = \Omega$. Интегрирование понимается в смысле Лебега. Следуя [4] для дробного интеграла и дробной производной, соответственно будем использовать обозначения

$$\left(I_{a+}^{\alpha}u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{u(t)}{\left(x-t\right)^{-\alpha+1}}dt,\ \left(I_{b-}^{\alpha}u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{u(t)}{\left(t-x\right)^{-\alpha+1}}dt,\ \left(D_{a+}^{\alpha}u\right)(x) = \frac{d}{dx}I_{a+}^{1-\alpha}u,\ \left(D_{b-}^{\alpha}u\right)(x) = -\frac{d}{dx}I_{b-}^{1-\alpha}u.$$

В терминах обозначений [5] будем рассматривать гильбертово пространство

$$N_{\alpha,1}(L_2):=\left\{u,v: u,v\in I^{\alpha}_{a+}(L_2),\ \langle u,v\rangle_{N_{\alpha,1}(L_2)}=\frac{1}{2}\langle D^{\alpha}_{a+}u,v\rangle_{L_2}+\frac{1}{2}\langle D^{\alpha}_{a+}v,u\rangle_{L_2}\right\}.$$

Также будем рассматривать оператор типа потенциала, и сумму операторов дробного дифферен-цирования

$$I^{\alpha}_{ab}u=I^{\alpha}_{a+}u+I^{\alpha}_{b-}u,\quad D^{\alpha}_{ab}u=D^{\alpha}_{a+}u+D^{\alpha}_{b-}u.$$

Обозначим через λ_n собственные значения оператора задачи Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

$$Au=-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q_0D^{\alpha}_{ab}u,\tag{1}$$

$$u(x)\in C^2(\overline{\Omega}),\ u(\partial\Omega)=0,\tag{2}$$

с следующими предположениями относительно коэффициентов

$$p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ p_0<p(x)<p_1,\ p_0,q_0=const,\ p_0,q_0>0.\tag{3}$$

Будем также рассматривать вспомогательную задачу Штурма-Лиувилля в обозначениях (3) для коэффициентов, и с краевыми условиями (2); собственные значения оператора которой обозначим как: μ_n. Оператор вспомогательной задачи

$$Bu=-\frac{d}{dx}\left(p_0\frac{du}{dx}\right)+\frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.\tag{4}$$

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Оператор A положительно определенный.

Доказательство. Область определения оператора A является всюду плотным множеством в L_2. Это следует из включения: $C_0^{\infty}\in D(A)$. Покажем, что оператор A симметричный. Имеем для $u,v\in D(A)$:

$$\langle Au,v\rangle_0=-\int_a^b v\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)dx+q_0\int_a^b vD^{\alpha}_{a+}udx+q_0\int_a^b vD^{\alpha}_{b-}udx.$$

Применяя для первого слагаемого правой части последнего равенства формулу Грина, а также используя следствие 2 теоремы 2.4 [4,с.51] для третьего слагаемого (законность применения следствия 2 докажем ниже), имеем симметричное выражение для $u,v\in D(A)$:

$$\langle Au,v\rangle_0=\int_a^b p(x)\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}dx+q_0\int_a^b vD^{\alpha}_{a+}udx+q_0\int_a^b uD^{\alpha}_{a+}vdx.\tag{5}$$

Докажем законность применения следствия 2 теоремы 2.4 [4,с.51]. Для этого покажем, что при условиях (2) имеет место: $u\in I^{\alpha}_{b-}(L_p),\ v\in I^{\alpha}_{a+}(L_q),\ 1/p+1/q<1+\alpha$. Это будет следовать из фундаментальности последовательности: $\psi_{\varepsilon}(x)$ $\left(см.\ формулу\ (13.7)\ [4,c.181]\right)$ в $L_p, 1\le p<\infty$,

Положим: $u(x)\in C^2(\overline{\Omega})$. Использовав обобщенное неравенство Минковского, имеем для $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$:

$$\left(\int_a^b\left|\psi_{\varepsilon_1}(x)-\psi_{\varepsilon_2}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b\left|\int_{x+\varepsilon_1}^b\frac{u(x)-u(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha+1}}d\tau-\int_{x+\varepsilon_2}^b\frac{u(x)-u(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha+1}}d\tau\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\int_a^b\left|\int_{x+\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2}\frac{u(x)-u(\tau)}{(\tau-x)^{\alpha+1}}d\tau\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b\left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{u(x)-u(x+t)}{t^{\alpha+1}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_a^b\left(\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\left|\frac{u(x)-u(x+t)}{t^{\alpha+1}}\right|dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1}\left(\int_a^b |u(x)-u(x+t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt \le \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha}dt \le \frac{M}{1-\alpha}\left(\varepsilon_1^{1-\alpha}-\varepsilon_2^{1-\alpha}\right). \quad (6)$$

Фундаментальность $\{\psi_\varepsilon(x)\}$, $\varepsilon\to 0$ доказана. В силу полноты $L_p(\Omega)$: $\exists\psi_0(x)\in L_p(\Omega)$ так, что имеет место сходимость: $\psi_\varepsilon(x)\xrightarrow{L_p}\psi_0(x)$, из чего в силу теоремы 13.2 [4,c.183] следует: $u(x)\in I^\alpha_{b-}(L_p)$, $1\le p<\infty$. Доказательство принадлежности: $v\in I^\alpha_{a+}(L_q)$, $1\le q<\infty$ полностью аналогично. Доказательство возможности применения следствия 2 теоремы 2.4 [4,c.51] завершено. Из (5) получим представление для нормы в H_A:

$$\|u\|^2_{H_A}=\langle Au,u\rangle_{L_2}=\int_a^b p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+2q_0\int_a^b uD^\alpha_{a+}u\,dx,\ u\in D(A). \quad (7)$$

Оценим снизу первое и второе слагаемые правой части последнего равенства. Для этого используем, для первого и второго слагаемого соответственно: неравенство Фридрихса (см. теорема 30.2 [6, c.344]), и полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования (лемма 1.1 [3]). Имеем неравенство положительной определенности

$$\langle Au,u\rangle_{L_2}\ge\lambda^2\|u\|_0^2,\ \lambda=\left(\frac{p_0}{(b-a)^2}+\frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/2}.$$

Таким образом мы показали, что: 1) для оператора A имеет место неравенство положительной определенности, 2) $\overline{D(A)}=L_2$, 3) оператор A симметричный. Следовательно оператор A положи-тельно определенный. Лемма доказана.

Определение 1. Под обозначением H_A будем подразумевать энергетическое пространство порожденное положительно определенным оператором A.

Лемма 2. H_A как множество элементов совпадает с пространством $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что $u\in H_A$. По теореме 4.3.2 [1,c.68] существует последовательность: $\{u_n\}\subset D(A)$ такая, что:

$$\|u_{n+m}-u_n\|_{H_A}\to 0,\ \|u_n-u\|_{L_2}\to 0. \quad (8)$$

Используя представление (7) для нормы в H_A, имеем

$$\|u_{n+m}-u_n\|^2_{H_A}=\int_a^b(u'_{n+m}-u'_n)^2p(x)dx+2q_0\int_a^b(u_{n+m}-u_n)D^\alpha_{a+}(u_{n+m}-u_n)dx,\ \{u_n\}\subset D(A). \quad (9)$$

Поскольку в силу леммы 1.1 [3] второе слагаемое правой части последнего равенства неотрицательно, то

$$\|u'_{n+m}-u'_n\|^2_{L_2}\le\frac{1}{p_0}\int_a^b(u'_{n+m}-u'_n)^2p(x)dx\to 0. \quad (10)$$

Следовательно в силу полноты пространства L_2 существует $u'\in L_2$, такая, что: $u'_n\xrightarrow{L_2}u'$. Несложно показать (например см. [1,c.82]), что u_n равномерно сходится к u, где u имеет представление

$$u(x)=\int_a^x u'(t)dt=-\int_x^b u'(t)dt. \quad (11)$$

Из чего следует, что: $u(x)\in W^1_2(\Omega)$, $u(a)=u(b)=0$, а значит: $u(x)\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Пусть теперь: $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_2$, покажем, что: $u\in H_A$. Согласно теореме 4.3.2 [1,c.68] достаточно показать, что существует последовательность: $\{u_n\}\subset D(A)$ обладающая свойствами (8). Применим метод доказательства использованный в [1,c.83] и разложим производную u' в ряд Фурье по косинусам (это возможно поскольку u' элемент пространства L_2):

$$u'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\pi\frac{x-a}{b-a}, \tag{12}$$

$a_0=0,$ поскольку $u(\partial\Omega)=0$. Почленно интегрируя ряд Фурье (12), получим

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\pi\frac{x-a}{b-a},\ b_k=\frac{a_k(b-a)}{k\pi}. \tag{13}$$

Как известно из теории рядов Фурье ряд (13) сходится равномерно (см. теорема 44 [7,с.55]). Обозначив частичные суммы рядов (12) и (13) как: u_n' и u_n соответственно, имеем

$$\|u_{n+m}-u_n\|_{H_A}^2=\|(u_{n+m}-u_n)'\|_{L_2}^2+\|u_{n+m}-u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2,\ \{u_n\}\subset D(A).$$

Первое слагаемое правой части последнего равенства стремится к нулю, в силу сходимости ряда (12) по норме L_2. Оценим второе слагаемое. Используя неравенство Коши-Гельдера, с учетом: леммы 2.2 [4,с.43], теоремы 3.5 [4,с.64]. Имеем

$$\|u_{n+m}-u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2=\left\langle u_{n+m}-u_n,D_{a+}^{\alpha}(u_{n+m}-u_n)\right\rangle_{L_2}=\left\langle u_{n+m}-u_n,I_{a+}^{1-\alpha}(u_{n+m}-u_n)'\right\rangle_{L_2}\le$$

$$\le\|u_{n+m}-u_n\|_{L_2}\left\|I_{a+}^{1-\alpha}(u_{n+m}-u_n)'\right\|_{L_2}\le C\|u_{n+m}-u_n\|_{L_2}\|(u_{n+m}-u_n)'\|_{L_2},\ C=const. \tag{14}$$

Заметим, что поскольку ряд (13) сходится равномерно, то и подавно сходится по норме простран-ства L_2. Следовательно в силу сходимости в L_2 рядов (12) и (13) второе слагаемое также стремится к нулю. Мы показали, что существует последовательность: $\{u_n\}\subset D(A)$ со свойствами (8); значит: $u\in H_A$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для функции $u\in H_A$ имеет место представление для нормы (7).

Доказательство. Докажем, что (7) верно для любой функции: $u\in H_A$. Обозначим идеальный элемент (см.[8, с.25]) полученный в результате пополнения унитарного пространства образованного парой: $\left(\|\cdot\|_{H_A},D(A)\right)$, через: u^*. Заметим, что (7) можно переписать в терминах норм пространств

$$\|u_n\|_{H_A}^2=\|u'_n\|_{L_2(\Omega,p)}^2+2q_0\|u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2. \tag{15}$$

Поскольку u^* - идеальный элемент, то существует последовательность: $\{u_n\}\subset D(A)$ сходящаяся к u^* в смысле нормы H_A. Фундаментальность $\{u_n\}$ в пространстве H_A влечет, как следует из хода доказательства леммы 2, существование функции: $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ такой, что

$$u_n'\xrightarrow{L_2}u',\ u_n\xrightarrow{L_2}u.$$

Из условия (3) на коэффициент $p(x)$, следует эквивалентность норм: $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega,p)$. Значит

$$u'_n\xrightarrow{L_2(\Omega,p)}u',$$

из чего в свою очередь, с учетом свойства нормы имеем

$$\|u'_n\|_{L_2(\Omega,p)}\to\|u'\|_{L_2(\Omega,p)}. \tag{16}$$

Покажем, что: $\|u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2\to\|u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2$. Оценивая полностью аналогично (14), имеем

$$\|u_n-u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}^2=\left\langle u_n-u,D_{a+}^{\alpha}(u_n-u)\right\rangle_{L_2}=\left\langle u_n-u,I_{a+}^{1-\alpha}(u_n-u)'\right\rangle_{L_2}\le$$

$$\le\|u_n-u\|_{L_2}\left\|I_{a+}^{1-\alpha}(u_n-u)'\right\|_{L_2}\le C\|u_n-u\|_{L_2}\|(u_n-u)'\|_{L_2},\ C=const. \tag{17}$$

Поскольку в силу предыдущих рассуждений правая часть последнего неравенства стремится к нулю, то: $u_n\xrightarrow{N_{\alpha,1}(L_2)}u.$ Используя общие свойства нормы имеем

$$\|u_n\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}\to\|u\|_{N_{\alpha,1}(L_2)}. \tag{18}$$

Осуществляя предельный переход в левой и правой части (15) с учетом (16) и (18), имеем прeIставление для нормы в H_A:

$$\|u^*\|^2_{H_A} = \|u'\|^2_{L_2(\Omega,p)} + 2q_0\|u\|^2_{N_{\alpha,1}(L_2)}. \qquad (19)$$

Лемма доказана.

Лемма 4. $\|u\|_{H_A} \ge \|u\|_{H_B}$.

Доказательство. Сразу заметим, что согласно [1,с.81]: B - положительно определенный оператор, следовательно обозначение H_B корректно, H_B как множество элементов совпадает $\overset{\circ}{W}{}^1_2$.

В силу: условия (3), леммы 3, леммы 1.1 [3] имеем

$$\|u\|^2_{H_A} = \|u'\|^2_{L_2(\Omega,p)} + 2q_0\|u\|^2_{N_{\alpha,1}(L_2)} \ge p_0\|u'\|^2_{L_2} + \frac{q_0}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b |u(t)|^2 (b-t)^{-\alpha}\,dt \ge$$

$$\ge p_0\|u'\|^2_{L_2} + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|u\|^2_{L_2} = \|u\|^2_{H_B}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пространство $N_{\alpha,1}(L_2)$ вполне непрерывно вложено в L_2.

Доказательство. Покажем, что множество ограниченное по норме пространства $N_{\alpha,1}(L_2)$ является компактным в L_2. Используя свойство квадрата суммы получим

$$\int_a^b \left|I_{ab}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx = \Gamma^{-2}(\alpha/2)\int_a^b \left|\int_a^b \psi(t)\,|x-t|^{-1+\alpha/2}\,dt\right|^2 dx = \int_a^b \left|I_{a+}^{\alpha/2}\psi + I_{b-}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx =$$

$$= \int_a^b \left|I_{a+}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx + 2\int_a^b I_{a+}^{\alpha/2}\psi I_{b-}^{\alpha/2}\psi dx + \int_a^b \left|I_{b-}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx.$$

Из формулы (2.20) [4, с.42], с учетом положительности оператора дробного интегрирования (см.[9]) следует

$$\int_a^b I_{a+}^{\alpha/2}\psi I_{b-}^{\alpha/2}\psi dx = \int_a^b \psi I_{a+}^{\alpha}\psi dx \ge 0,$$

Используя разложение в ряд Фурье (см. рассуждения в ходе доказательства теоремы 1 [5]), имеем

$$\left(I_{ab}^{\alpha/2}\psi\right)(x) = \Gamma^{-1}(\alpha/2)\psi(x) * x^{\alpha/2-1} \sim \Gamma^{-1}(\alpha/2)\mu\sum_{-\infty}^{\infty} a_n^{(\alpha/2)} c_n e^{\frac{2\pi ni}{b-a}x},\ \psi(x) \sim c_n,\ x^{\alpha/2-1} \sim a_n^{(\alpha/2)},\ \mu = \frac{b-a}{2}.$$

Следовательно

$$\int_a^b \left|I_{a+}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx + 2\int_a^b I_{a+}^{\alpha/2}\psi I_{b-}^{\alpha/2}\psi dx + \int_a^b \left|I_{b-}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx = \Gamma^{-2}(\alpha/2)\mu^2\sum_{-\infty}^{\infty}\left|a_n^{(\alpha/2)}c_n\right|^2 =$$

$$= \nu^2\left\{\frac{a_0^{(\alpha/2)2}}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha/2)2}(a_n^2+b_n^2)\right\},\quad \nu = (b-a)\Gamma^{-1}(\alpha)/2\sqrt{2}.$$

Так как в силу теоремы 2.22 [10, с.305], для коэффициентов Фурье ядра: $x^{\alpha-1}$ имеет место асимпто-тическое равенство

$$a_n^{(\alpha)} \sim n^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\sin\pi(1-\alpha)/2,\ n\to\infty,$$

то существует константы: $C_i > 0,\ (i = 1,2,3)$ такие, что

$$\int_a^b \left|I_{a+}^{\alpha/2}\psi\right|^2 dx \le C_1\left\{\frac{a_0^{(\alpha/2)2}}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha/2)2}(a_n^2+b_n^2)\right\} \le C_2\left\{\frac{a_0^{(\alpha)}}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(\alpha)}(a_n^2+b_n^2)\right\} = C_3\left\langle \psi, I_{a+}^{\alpha}\psi\right\rangle_{L_2},$$

или

$$\left\|I_{a+}^{\alpha/2}\psi\right\|_{L_2} \le C\left\|I_{a+}^{\alpha}\psi\right\|_{N_{\alpha,1}(L_2)},\ C = const.$$

Следовательно из ограниченности множества: $I_{a+}^{\alpha}(\Psi)$, $\Psi \subset L_2$ в пространстве $N_{\alpha,1}(L_2)$ следует ограниченность множества: $I_{a+}^{\alpha/2}(\Psi)$ в пространстве L_2. Поскольку оператор дробного интегри-рования можно определить следующим образом

$$I_{a+}^{\alpha/2}u = \Gamma^{-1}(\alpha)\int_a^b K(x,t)u(t)dt,\ K(x,t) \in L_2(\Omega\times\Omega),\ K(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{\alpha/2-1},\ 0<t<x, \\ 0,\ x \le t < b. \end{cases},$$

то он вполне непрерывно действует в L_2, (доказательство этого факта можно найти к примеру в [11, с.262]), а значит переводит всякое ограниченное множество в пространстве L_2, в компактное множество пространства L_2. В силу закона композиции оператора Римана-Лиувилля с одинаковы-ми началами, имеем

$$I_{a+}^{\alpha}\psi = \left(I_{a+}^{\alpha/2} \circ I_{a+}^{\alpha/2}\right)(\psi),\ \psi \in \Psi.$$

Из чего следует компактность множества $I_{a+}^{\alpha}(\Psi)$ в пространстве L_2. Таким образом мы показали, что всякое ограниченное множество в пространстве $N_{\alpha,1}(L_2)$, является компактным в пространстве L_2. Теорема доказана.

Основная теорема

Теорема 2. Для собственных значений оператора задачи (1) имеет место оценка

$$\lambda_n \ge \frac{p_0\pi^2}{(b-a)^2}n^2 + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\ n=1,2,\dots \tag{20}$$

Доказательство. В силу лемм: 1,2,4 для операторов A и B выполнены условия 1,2 в определе-нии отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов [1,с. 111]. В силу теоремы 1 ограниченное множество в пространстве $N_{\alpha,1}(L_2)$, является компактным в пространстве L_2. Доказательство полной непрерывности вложения пространства H_B в L_2 можно найти в [1,с.102]. Таким образом операторы A и B переводят ограниченное множество энергети-ческого пространства в компактное множество исходного пространства. Следовательно выполнены условия теоремы 5.10.1 [1,с.111], значит

$$\lambda_n \ge \mu_n,\ n=1,2,\dots .$$

Согласно [1, с.113], имеем

$$\mu_n = \frac{p_0\pi^2}{(b-a)^2}n^2 + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

из чего и следует оценка (20).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность за ряд ценных замечаний и предложений академику Шкаликову Андрею Андреевичу и профессору Ляхову Льву Николаевичу.

Список литературы
References

1. Михлин С.Г. 1977. Линейные уравнения в частных производных. М., "Высшая школа" :431 .
Mikhlin S.G. Linear partial differential equations // M .: Higher School, 1977. -431 pp.
2. Нахушев А. М. 1977. Задача Штурма - Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах. Доклады Академии наук СССР. №2, Т. 234: 308-311.
Nahushev A.M. Task of Sturm - Liouville for an ordinary differential equation of the second order with fractional fractional derivatives in junior members// Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1977. №2, Volume 234: 308-311 pp.
3. Кукушкин М.В. 2016. О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. № 6 (227), выпуск 42: 60-70.
Kukushkin M.V. About the weighted spaces of fractionally differentiable functions.// Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. 2016. №6(227),42. 60-70 pp.

4. Самко С.Г. Килбас А.А. Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения . Минск "Наука и техника" : 688.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order, and some applications. Minsk "Science and Technology" 1987. -688 pp.

5. Кукушкин М.В. 2016. Теорема о полноте пространства дробно-дифференцируемых функций. Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. №13, выпуск 43: 53-59.

Kukushkin M.V. Theorem on the completeness of the space of fractionally differentiable functions.// Belgorod state university scientific bulletin. Mathematics & Physics. 2016. №13, (43). 53-59 pp.

6. Ректорнс К. 1985. Вариационные методы в математической физике и технике. Москва «Мир»: 589 .

Rektorns K. Variational methods in mathematical physics and engineering. M .: Mir, 1985.-589 pp.

7. Харди Г.Х. Рогозинский В.В. 1962.Ряды Фурье.М. :Физматгиз :156.

Hardy G.H., Rogosinski W.W. Fourier Series. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No.38, 1956.-156 pp.

8. Морен К.1965. Методы гильбертова пространства. М.: Мир: 570.

Moren K. Hilbert space methods. M .: Mir, 1965.-570 pp.

9. Нахушев А.М. 1998. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования, весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа. Дифференциальные уравнения . Т. 34, № 1: 101-109.

Nahushev A.M. About positive of operators of continuous and discrete differentiation and integration, are very important in fractional calculus and theory of equations of mixed type.// Differential equations. 1998. №1, Volume 34: 101-109 pp.

10. Зигмунд А. 1965.Тригонометрические ряды. Том 1. М. : Мир: 616 .

Zygmund A. Trigonometric Series volume I. Cambridge at the university press, 1959.-616 pp.

11. Соболев В.И. 1968. Лекции по дополнительным главам математического анализа. Наука. «Физматлит»:288 .

Sobolev V.I. Lectures on the additional chapters of mathematical analysis. The science: " Fizmatlit ", 1968.-288 pp.

12. Смирнов В.И.1974.Курс высшей математики. Т. 4, ч.1.Москва: «Физматлит» :336.

Smirnov V.I. Course of higher mathematics. Volume 4, part 1. M.: "Fizmatlit",1974.-336 pp.