УДК 517.983

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

ON THE SOLVABILITY OF DEGENERATE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

А.В. Глушак, Т.Г. Романченко
A.V. Glushak, T.G. Romanchenko

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85, Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

E-mail: Glushak@.bsu.edu.ru; Romanchenko_t@.bsu.edu.ru

Аннотация
Для вырождающегося дифференциального уравнения дробного порядка в зависимости от коэффициента при дробной производной выделено два случая. Случай, когда все решения имеют непрерывную дробную производную и случай, когда лишь часть решений обладает этим свойством. Получены представления указанных решений и установлены их оценки.

Abstract
For degenerate differential equations of fractional order, depending on the coefficient of the fractional derivative selected two cases. The case when all decisions are continuous fractional derivative to the case when only a part of the solution has this property. The representations of these solutions and their evaluation.

Ключевые слова: производная дробного порядка, вырождающееся дифференциальное уравнение, постановка граничной задачи.
Keywords: a derivative of fractional order degenerate differential equation formulation of boundary value problems.

На отрезке действительной оси $[0,d]$ рассматриваются два уравнения:

$$a(x)\left(D_{d-}^{\alpha}u(x)\right)' + b(x)D_{d-}^{\alpha}u(x) + c(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$a(x)\left(D_{0+}^{\alpha}u(x)\right)' + b(x)D_{0+}^{\alpha}u(x) + c(x)u(x) = f(x), \tag{2}$$

где $D_{d-}^{\alpha}u = -\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^d u(t)(t-x)^{-\alpha}\,dt$ и $D_{0+}^{\alpha}u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt$ – соответственно правосторонняя и левосторонняя производные Римана-Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Условие 1. Пусть $b(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[0.d]$, $a(x)\in C^1[0,d]$, $a(0)=0$, $a(x)>0$ при $x>0$.

Таким образом, условие 1 означает, что уравнения (1) и (2) порядка $1+\alpha$ при $x=0$ вырождаются в уравнения низшего порядка α.

Вырождающиеся линейные уравнения целого порядка, т. е. случай, когда $\alpha=1$, ранее детально изучались в работах [1 – 3]. В этих работах при исследовании гладкости решений было выделено два существенно различных случая: случай, когда все решения однородного уравнения непрерывны вплоть до границы вырождения $x=0$ и случай, когда лишь часть этих решений непрерывна вплоть до точки $x=0$.

В настоящей работе уже для уравнений дробного порядка также рассмотрено два случая: случай, когда все решения уравнения (1) имеют непрерывную на $[0.d]$ дробную производную $D_{d-}^{\alpha}u(x)$ и случай, когда лишь часть уравнения (2) имеет непрерывную дробную производную $D_{0+}^{\alpha}u(x)$. Само же решение и в том и в другом случае имеет интегрируемую особенность.

1. Случай $b(0)<0$. Тогда уравнение (1) путем обращения оператора $a(x)\dfrac{d}{dx}+b(x)$ может быть сведено к интегральному уравнению

$$D_{d-}^{\alpha}u = e^{P(x)}\left(\mu - \int_x^d \frac{f(t)-c(t)u(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\,dt\right), \tag{3}$$

где μ – произвольная постоянная, $P(x)=\int_x^d \frac{b(y)}{a(y)}dy$.

Применяя формулу дробного интегрирования по частям [4, с. 51], преобразуем интеграл

$$\int_x^d \frac{c(t)u(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\,dt = \int_x^d D_{x+}^{\alpha}I_{x+}^{\alpha}\left(\frac{c(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\right)u(t)\,dt = \int_x^d I_{x+}^{\alpha}\left(\frac{c(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\right)D_{d-}^{\alpha}u(t)\,dt, \tag{4}$$

здесь $I_{a+}^{\alpha}u(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^y u(y)(y-t)^{\alpha-1}dt$.

Используя обозначения

$$v(x)=D_{d-}^{\alpha}u\ ,\quad Q(x,\mu)=e^{P(x)}\left(\mu-\int_x^d \frac{f(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\,dt\right),\quad P(x)=\int_x^d\frac{b(y)}{a(y)}dy,\quad k_0(x,t)=e^{P(x)}I_{x+}^{\alpha}\left(\frac{c(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\right)$$

и равенство (4), интегральное уравнение (3) запишем в виде

$$v(x)=Q(x,\mu)+\int_x^d k_0(x,t)v(t)\,dt. \tag{5}$$

Чтобы воспользоваться известными результатами о разрешимости интегрального уравнения Вольтерра (5), достаточно, чтобы функция $Q(x,\mu)$ была непрерывной, а ядро $k_0(x,t)$ – ограниченным.

Непрерывность функции $Q(x,\mu)$ вытекает из леммы 1.1 и теоремы 1.1 работы [1], а ограниченность $k_0(x,t)$ мы просто потребуем.

Условие 2. Функция $k_0(x,t)$ ограничена.

Отметим, что достаточным условием ограниченности функции $k_0(x,t)$ является следующее условие.

Условие 3. Пусть существуют такие числа $c_0>0$ и $p>\frac{1}{\alpha}$, что выполнено неравенство

$$\left|c^p(x)\right| < pc_0a^{p-1}(x).$$

Покажем, что если выполнено условие 3, то функция $k_0(x,t)$ ограничена. Для этого запишем ее как

$$k_0(x,t)=\frac{e^{P(x)}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^t (t-y)^{\alpha-1}\frac{c(y)}{a(y)}e^{-P(t)}dt. \tag{6}$$

Применяя в функции (6) неравенство Гельдера, получим:

$$\left|k_0(x,t)\right| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_x^t \frac{\left|c(y)\right|^p}{a^p(y)}e^{p(P(x)-P(y))}dy\right)^{1/p}\left(\int_x^t (t-y)^{q(\alpha-1)}dy\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Поскольку $p>\frac{1}{\alpha}$, то $q<\frac{1}{1-\alpha}$ и $\int_x^t (t-y)^{q(\alpha-1)}dy<\infty$.

Далее, в силу условия 3 имеем

$$\int_x^t \frac{\left|c(y)\right|^p}{a^p(y)}e^{p(P(x)-P(y))}dy \le p\int_x^t \frac{1}{a(y)}e^{p(P(x)-P(y))}dy.$$

Ограниченность же последнего интеграла доказана в лемме 1.2 в работе [1]. Таким образом, ограниченность функции $k_0(x,t)$ установлена.

Решим уравнение (5) методом последовательных приближений, получим:

$$v_0(x)=Q(x,\mu),$$

$$v_1(x)=Q(x,\mu)+\int_x^d Q(t,\mu)k_0(x,t)\,dt,$$

$$v_2(x)=Q(x,\mu)+\int_x^d\left(Q(t,\mu)+\int_t^d Q(s,\mu)k_0(t,s)\,ds\right)k_0(x,t)\,dt=$$

$$=Q(x,\mu)+\int_t^d Q(t,\mu)k_0(x,t)\,dt+\int_x^d k_0(x,t)\int_t^d Q(s,\mu)k_0(t,s)\,dsdt=$$

$$=Q(x,\mu)+\int_x^d Q(t,\mu)k_0(x,t)\,dt+\int_x^d Q(s,\mu)\int_x^s k_0(x,t)k_0(t,s)\,dtds=$$

$$=Q(x,\mu)+\int_x^d Q(t,\mu)k_0(x,t)\,dt+\int_x^d Q(s,\mu)\,k_1(x,s)\,ds=Q(x,\mu)+\int_x^d Q(t,\mu)\sum_{i=0}^{1}k_i(x,t)\,dt\,,$$

$$v_3(x)=Q(x,\mu)+\int_x^d Q(t,\mu)\sum_{i=0}^{2}k_i(x,t)\,dt\,.$$

В результате получим:

$$v(x)=v(x,\mu)=Q(x,\mu)+\int_x^d Q(t,\mu)V(x,t)\,dt\,, \tag{7}$$

где $V(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}k_i(x,t)$, и $k_i(x,t)=\int_x^t k_0(x,s)k_{i-1}(s,t)\,ds$ для $i\ge 1$.

При этом из общей теории интегральных уравнений Вольтерра следует оценка

$$\|v(x,\mu)\|\le c_1\|Q(x,\mu)\|,\qquad c_1>1\,,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $C[0,d]$, которая, с учетом лемм 1.1 и 1.2 работы [1], приводит к неравенству

$$\|v\|\le c_2\left(\|f\|+|\mu|\right),\qquad c_2>0\,. \tag{8}$$

Теперь, для нахождения функции $u(x)$ из равенства $v(x)=D_{d-}^{\alpha}u$, используем формулу

$$I_{d-}^{\alpha}D_{d-}^{\alpha}u=u(x)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}I_{d-}^{1-\alpha}u(d)\,(d-x)^{\alpha-1}\,,$$

где $I_{d-}^{\alpha}u=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^d u(t)(t-x)^{\alpha-1}dt$.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2 и $b(0)<0$. Тогда любое решение уравнения (1) имеет непрерывную на $[0,d]$ дробную производную $D_{d-}^{\alpha}u$ и при некоторых μ и β представимо в виде

$$u(x)=I_{d-}^{\alpha}v(x,\mu)+\beta(d-x)^{\alpha-1}, \tag{9}$$

где $v(x,\mu)$ определяется формулой (7). При этом для него справедлива оценка

$$\left\|(x-d)^{1-\alpha}a(x)\left(D_{d-}^{\alpha}u\right)'\right\|+\left\|D_{d-}^{\alpha}u\right\|+\left\|(x-d)^{1-\alpha}u\right\|\le c_3\left(\|f\|+|\mu|+|\beta|\right) \tag{10}$$

с некоторой постоянной $c_3>0$, зависящая от коэффициентов уравнения (1).

Отметим лишь, что оценка (10) вытекает из неравенства (8), представления (9) и ограниченности оператора дробного интегрирования [4, с. 58].

Для выделения единственного решения из множества, определяемого формулой (9), при $c(x)\ge 0$ можно задать два условия, например, вида

$$I_{d-}^{1-\alpha}u(0)=u_0\,,\quad I_{d-}^{1-\alpha}u(d)=u_d\,.$$

2. Случай $b(0)>0$. Тогда уравнение (2) путем обращения оператора $a(x)\dfrac{d}{dx}+b(x)$ может быть сведено к интегральному уравнению

$$D_{0+}^{\alpha}u=e^{P(x)}\left(\mu+\int_0^x\frac{f(t)-c(t)u(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\,dt\right), \tag{11}$$

где μ – произвольная постоянная.

Применяя формулу дробного интегрирования по частям [4, с. 51], преобразуем интеграл

$$\int_0^x\frac{c(t)u(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\,dt=\int_0^x D_{x-}^{\alpha}I_{x-}^{\alpha}\left(\frac{c(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\right)u(t)\,dt=\int_0^x I_{x-}^{\alpha}\left(\frac{c(t)}{a(t)}e^{-P(t)}\right)D_{0+}^{\alpha}u(t)\,dt, \tag{12}$$

здесь $I_{a-}^{\alpha}u(y)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^a u(y)(y-t)^{\alpha-1}dt$.

Используя обозначения

$$w(x) = D_{0+}^{\alpha} u, \quad R(x,\mu) = e^{P(x)}\left(\mu + \int_0^x \frac{f(t)}{a(t)} e^{-P(t)}\, dt\right), \quad l_0(x,t) = e^{P(x)} I_{x-}^{\alpha}\left(\frac{c(t)}{a(t)} e^{-P(t)}\right)$$

и равенство (12), интегральное уравнение (11) запишем в виде

$$w(x) = R(x,\mu) + \int_0^x l_0(x,t) w(t)\, dt. \tag{13}$$

В замечании 1.1 работы [1] установлено, что если $b(x) > 0$, то $\lim\limits_{x\to+0} e^{P(x)} = +\infty$, поэтому, если мы хотим найти непрерывное на $[0,d]$ решение уравнения (13), то необходимо положить $\mu = 0$.

Далее функция $R(x,0)$, как доказано в лемме 2.1 работы [2], непрерывна. Потребуем, наконец, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие 4. Функция $l_0(x,t)$ ограничена.

Отметим, что, используя лемму 2.1 [2], легко установить, что условие 3 является также достаточным условием ограниченности и функции $l_0(x,t)$.

Решая интегральное уравнение (13) методом последовательных приближений, аналогично тому как это было сделано в п. 1, получим

$$w(x) = R(x,0) + \int_0^x R(x,0) W(x,t)\, dt, \tag{14}$$

где $W(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} l_i(x,t)$, и $l_i(x,t) = \int\limits_t^x l_0(x,s) l_{i-1}(s,t)\, ds$ для $i \geq 1$.

При этом в силу леммы 2.1 работы [2] справедлива оценка

$$\|w(x)\| \leq c_1 \|R(x,0)\| \leq c_2 \|f\|.$$

Теперь для нахождения решения $u(x)$ из равенства $w(x) = D_{0+}^{\alpha} u$ используем формулу:

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u = u(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} I_{0+}^{1-\alpha} u(0)\, x^{\alpha-1}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 4 и $b(0) > 0$. Тогда любое решение уравнения (2), имеющее непрерывную на $[0,d]$ производную $D_{0+}^{\alpha} u$, при некотором β представимо в виде

$$u(x) = I_{0+}^{\alpha} w(x) + \beta x^{\alpha-1}, \tag{15}$$

где $w(x)$ определяется формулой (14). При этом для него справедлива оценка

$$\left\| x^{1-\alpha} a(x) \left(D_{0+}^{\alpha} u \right) \right\| + \left\| D_{0+}^{\alpha} u \right\| + \left\| x^{1-\alpha} u \right\| \leq c_3 (\|f\| + |\beta|), \tag{16}$$

где $c_3 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от коэффициентов уравнения (2).

Укажем, что оценка (16) вытекает из представления (14) и ограниченности оператора дробного интегрирования [4, с. 58].

Для выделения единственного решения из множества, определяемого формулой (15), теперь следует задать только одно условие, например, вида

$$u(d) = u_d.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-29-12911.

Список литературы
References

1. Глушко В.П. 1968. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. Дифференциальные уравнения. Т. 4, № 9: 1584 – 1597.

Glushko V.P. 1968. Degenerate linear differential equations. I. Differential equations. 1968. T. 4, № 9: 1584 – 1597.

2. Глушко В.П. 1968. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. Дифференциальные уравнения. Т. 4, № 11: 1956 – 1966.

Glushko V.P. 1968. Degenerate linear differential equations. II. Differential equations. 1968. T. 4, № 11 : 1956 – 1966.

3. Глушко В.П. 1969. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. III. Дифференциальные уравнения. Т. 5, № 3: 443 – 455.

Glushko V.P. 1969. Degenerate linear differential equations. III. Differential equations. T. 5, № 3: 443 – 455.

4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. 1987. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника».