УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ ИЗ ВОДОЕМА В УПРУГИЙ ПОРИСТЫЙ ГРУНТ

MICROSCOPIC DESCRIPTION OF THE DIFFUSION PROCESS OF WATER IMMUNIZATION IN ELASTIC POROUS SOIL

О.А. Гальцева
O.A. Galtseva

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail:galtseva@bsu.edu.ru

Аннотация
В работе рассматривается начально-краевая задача для системы, состоящей из уравнений Стокса, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде, перемещение которой описывается уравнениями Ламе. Рассматриваемая система дополняется уравнением диффузии примеси в порах упругого грунта и усложняется наличием уравнения движения в самом водоеме. Плотность примеси зависит от ее концентрации. Доказывается существование, по крайней мере, одного обобщенного решения задачи.

Abstract
In the paper we consider the initial-boundary value problem for a system consisting of the Stokes equations describing the motion of a viscous incompressible fluid in an elastic porous medium, the displacement of which is described by the Lamé equations. This system is supplemented by the equation of admixture diffusion in the pores of the elastic soil and is complicated by the presence of the equation of motion in the reservoir itself. The admixture density depends on its concentration. The existence of at least one generalized solution of the problem is proved.

Ключевые слова: Система уравнений Стокса и Ламе, диффузия.
Keywords: Stoke`s and Lame`s equations, diffusion.

Постановка задачи

Процесс диффузии примеси из водоема в пористый грунт будем рассматривать в области Ω^0 и Ω, разделенных общей границей S^0. Пусть область Ω^0 – водоем, а Ω – пористая среда. Движение жидкости в Ω^0 при $t > 0$ описывается стационарной системой уравнения Стокса

$$\nabla \cdot \mathbb{P}_f + \rho_f(c^\varepsilon)\mathbf{e} = 0, \quad \mathbb{P}_f = \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - p\,\mathbb{I}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{2}$$

а совместное движение пороупругой среды в Ω при $t > 0$ описывается уравнением неразрывности (2), уравнением баланса

$$\nabla \cdot \mathbb{P} + \rho(c^\varepsilon)\mathbf{e} = 0, \tag{3}$$

и уравнением диффузии примеси

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c^\varepsilon = \lambda_D \Delta c^\varepsilon, \tag{4}$$

где

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) + (1 - \chi^\varepsilon)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}, \tag{5}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}, \tag{6}$$

$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = (w_1(\mathbf{x},t), w_2(\mathbf{x},t), w_3(\mathbf{x},t))$ – перемещение сплошной среды, $p(\mathbf{x},t)$ – давление в сплошной среде, $c^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ – концентрация примеси, $\mathbb{D}(x,\mathbf{v})$ – симметрическая часть градиента вектора $\mathbf{v}$ (тензор напряжений), $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\chi^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства,

$$\rho(c^{\varepsilon}) = \chi(\rho_f + \delta c^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)) + (1-\chi)\rho_s,$$

α_μ – коэффициент вязкости жидкости, λ_0 – постоянная упругости Ламэ, δ – положительная постоянная, ρ_f – безразмерная плотность жидкости, соотнесенная к плотности воды ρ^0, ρ_s – плотность упругого скелета, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали, λ_D – коэффициент диффузии.

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ условия непрерывности будут иметь следующий вид

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t), \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathbb{P}_f(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \tag{8}$$

и остаются справедливыми как для перемещений, так и для нормальных напряжений. Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ есть вектор нормали к границе S^0 в $\mathbf{x}^0 \in S^0$.

Задача замыкается граничным условием Неймана

$$\mathbb{P}_f(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n} = -p^0(\mathbf{x},t)\mathbf{n}, \tag{9}$$

на границе S^1 области $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$ (которая в свою очередь является частью границы $\partial\Omega^0$), тогда граничное условие Дирихле

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{10}$$

на границе $S^2 = S\backslash\overline{S^1}$ $t > 0$, и начальные условия будут

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = 0,\ \mathbf{x} \in Q. \tag{11}$$

В (2) – (11) характеристическая функция $\chi^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ области Ω_f^{ε} можно представить в виде выражения

$$\chi^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varsigma(\mathbf{x})\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}),$$

где $\varsigma(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω, $\chi(\mathbf{y})$ – характеристическая функция ячейки Y_f в единичном квадрате Y, а $\mathbf{e}$ – это единичный вектор в направлении силы тяжести.

Перепишем пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1.$$

Задача (2) – (11) необходима для получения усредненных уравнений для случая $0 < \mu_1 < \infty$.

Формальный предел модели (2) – (11) будет состоять из уравнения баланса

$$\nabla\cdot\mathbb{P}_f + \rho_f(c^{\varepsilon})\mathbf{e} = 0 \tag{12}$$

в области Ω^0 при $t > 0$, уравнения баланса

$$\nabla\cdot\mathbb{P} + \rho(c^{\varepsilon})\mathbf{e} = 0 \tag{13}$$

в области Ω при $t > 0$, и начального условия

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega^0 \cup \Omega_f^{\varepsilon}. \tag{14}$$

Предположим, что S^1 – часть оси $\{x_3 = 0\}$, $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_3$, и, что область Q –

подмножество полупространства $\{x_3 < 0\}$. Более того предположим, что S^2 – это гладкая поверхность и в некоторой малой окрестности плоскости $\{x_3 = 0\}$ определяется как $\Phi(x_1, x_2) = 0$.

Функцию p^0 также положим гладкой:

$$\int_{Q_T} (|\nabla p^0(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla (\frac{\partial p^0}{\partial t})(\mathbf{x},t)|^2) dxdt = \mathfrak{P}^2 < \infty. \tag{15}$$

Определение 2 *Тройка функций* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, c^\varepsilon, p^{\,\varepsilon}\}$ *такая,что*

$$c^\varepsilon \in L_2(\Omega_f^\varepsilon) \cap W_2^{1,0}(\Omega_f^\varepsilon), p^{\,\varepsilon} \in L_\infty(Q_T),\ \mathbf{w}^\varepsilon,\ \mathbb{D}(x,\mathbf{w}),$$
$$(\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^\varepsilon) \in \mathbf{L}_2(Q_T),$$

называется обобщенным решением задачи (2), (4) – (10), (12) – (14), если она удовлетворяет условию неразрывности (2) почти всюду в Q_T, граничному условию (10), начальному условию (14), и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} ((\zeta\mathbb{P}_f + (1-\zeta)\mathbb{P}) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) + \nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\, p^0) - \tilde{\rho}(c^{\,\varepsilon})\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varphi}) dxdt = 0 \tag{16}$$

для всех гладких функций $\boldsymbol{\varphi}$ таких, что $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},t) = 0$ на границе S_T^2, и $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T) = 0, \mathbf{x} \in Q$ и

$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} \left(c^{\,\varepsilon}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \nabla c^{\,\varepsilon}\cdot\frac{\partial \mathbf{w}^{\,\varepsilon}}{\partial t}\psi - \alpha_D \nabla c^{\,\varepsilon}\cdot\nabla\psi \right) dxdt =$$
$$-\int_{\Omega_f^\varepsilon} c_0(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},0)dx \tag{17}$$

для произвольной гладкой функции $\psi(\mathbf{x},t)$, равной нулю при $t = T$.

В (16) $\tilde{\rho}(c^{\,\varepsilon}) = (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon)\rho_f + (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\rho_s$ и $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q.

Тождество (16) очевидно содержит уравнения (1) и (3), и граничные условия (8) и (9).

Теорема. *При выполнении условия (15) для всех* $\varepsilon > 0$ *и для произвольного интервала времени* $[0,T]$ *существует единственное обобщенное решение задачи (2), (4) – (10), (12) – (14) и выполняются неравенства*

$$\int_{Q_T} (|p^\varepsilon|^2 + \alpha_\mu(\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^\varepsilon)|^2) dxdt +$$
$$\lambda_0 \max_{0\le t\le T} \int_Q (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx \le C_0(\mathfrak{P}^2 + 1), \tag{18}$$

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon)|c^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 dx +$$
$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon)|\nabla c^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 dxdt \le C_0 F^2, \tag{19}$$

$$0 \le c^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t) \le 1, \tag{20}$$

$$\max_{0<t<T} \int_Q (|\mathbf{w}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \mathbf{w}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2) dx +$$
$$\int_0^T \int_Q (|\mathbf{v}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \mathbf{v}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + |p^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2) dxdt \le C_0 F^2, \tag{21}$$

$$\max_{0<t<T} \int_Q (|\mathbf{v}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \mathbf{v}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2) dx \le C(C_0,F), \tag{22}$$

$$\int_Q |\nabla\mathbf{v}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t_1) - \nabla\mathbf{v}^{\,\varepsilon}(\mathbf{x},t_2)|^2 dx \le C(C_0,F)\,|t_1 - t_2|, \tag{23}$$

где функция $\mathbf{v}^{\,\varepsilon} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\mathbf{w}^{\,\varepsilon}/\partial t)$, а константа C_0 не зависит от малого параметра ε и $t \in (0,T)$.

Доказательство существования решения

Оценки (0.18) для перемещений основываются на тождестве

$$\frac{\lambda_0}{2}\int_Q (1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t))|^2 dx +$$

$$\alpha_\mu \int_0^t \int_Q (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon)\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x},\tau))|^2 dxd\tau =$$
$$\int_0^t \int_Q (\tilde{\rho}(c)\,^\varepsilon \mathbf{e} - \nabla p^0)\cdot \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},\tau)dxd\tau.$$

Доказательство теоремы основано на теореме Шаудера о неподвижной точке [3]. Разобьем доказательство на несколько шагов.

Во-первых, рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую из системы динамических уравнений

$$\nabla\cdot\left(\alpha_\mu \mathbb{D}(x,\mathbf{v}^{(h)}) - p^{(h)}\,\mathbb{I}\right) + \rho(c^{(h)})\mathbf{F} = 0,\ x\in\Omega^0 \tag{35}$$
$$\nabla\cdot(\chi\,\alpha_\mu\,\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^{(h)}) + (1-\chi)\,\lambda_0\,\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^{(h)}) - p^{(h)}\,\mathbb{I}) = -\rho(c^{(h)})\mathbf{F},\ x\in\Omega \tag{36}$$
$$\nabla\cdot\ \mathbf{w}^{(h)} = 0,\ x\in\Omega^0\cup\Omega \tag{37}$$

в области $\Omega \cup \Omega^0$ при $t > 0$, модифицированного конвективного уравнения диффузии

$$\frac{\partial c^{(h)}}{\partial t} + \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)})\cdot\nabla c^{(h)} = \lambda_D\,\Delta\,c^{(h)} \tag{38}$$

граничных условий

$$\mathbf{w}^{(h)}(\mathbf{x},t) = 0 \tag{39}$$

на границе $\partial\Omega \cup \partial\Omega^0$ при $t > 0$, граничных условий

$$\nabla c^{(h)}(\mathbf{x},t)\cdot\ \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \tag{40}$$

на границе «упругий скелет – поровое пространство» при $t > 0$, и начальных условий

$$\chi(\mathbf{x})\mathbf{w}^{(h)}(\mathbf{x},0) = 0, \tag{41}$$
$$c^{(h)}\,(\mathbf{x},0) = c_0\,(\mathbf{x}). \tag{42}$$

В (40) $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega_f^{0,\varepsilon}$,

$$\rho(c^{(h)}) = \chi\,(\rho_f + \delta\,c^{(h)}) + (1-\chi)\rho_s,$$

и

$$\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)) = \frac{1}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty} J(\frac{t-\tau}{h})(\int_{R^2} J(\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}{h})\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{z},\tau)dz)d\tau.$$

оператор сглаживания [1, 2] и $J(s)$ – бесконечно дифференцируемая функция такая, что

$$J(s) = 0,\ \text{ при } |s| > 1, \text{и } \int_{-\infty}^{\infty} J(s)\,ds \int_{R^2} J(|\mathbf{x}|)dx = 1.$$

Сглаженные функции являются гладкими, финитными и при $h \to 0$ сходится по норме $L_2(\Omega'_{T-\beta})$ в любой строго внутренней подобласти $\Omega'_{T-\beta} \subset \Omega_T^\varepsilon$, $h \le \beta$ [2].

$$\mathbf{v}^{(h)} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial \mathbf{w}^{(h)}/\,\partial t).$$

Для решения задачи (36) – (42) выберем множество

$$\mathfrak{M} = \{\bar{c}(\mathbf{x},t) \in C(\Omega^0 \cup \Omega_f^\varepsilon \times (0,T)) \quad |\ 0 \le \bar{c}(\mathbf{x},t) \le\ 1\},$$

и для $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ рассмотрим вторую вспомогательную задачу, состоящую из системы динамических уравнений

$$\nabla\cdot(\chi\alpha_\mu\,\mathbb{D}(x,\mathbf{v}) + (1-\chi)\lambda_0\,\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}) + \rho(\bar{c})\mathbf{F} = 0, \tag{43}$$
$$\nabla\cdot\ \mathbf{w} = 0 \tag{44}$$

в области Ω при $t > 0$, где

$$\rho(\bar{c}) = \chi\,(\rho_f + \delta\,\bar{c}) + (1-\chi)\rho_s,$$

дополненную граничными и начальными (7) – (9), (39) и (41).

Для всех $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ эта задача определяет линейные операторы

$$\mathbf{v} = \mathbb{A}_0(\bar{c}),\ \mathbf{v} = \mathbb{A}_1(\bar{c}) = (\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon} \circ \mathbb{A}_0)(\bar{c}), \quad \mathbb{A}_1 : \mathfrak{M} \to L_2((0,T); W_2^1(\Omega)).$$

Лемма 1. *В условиях Теоремы для каждого фиксированного* $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ *задача (39), (41), (43), и (44) имеет единственное обобщенное решение* $\{\mathbf{w}, p\}$ *для которого справедливы следующие оценки*

$$\max_{0<t<T} \int_Q (|\mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla\, \mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2) dx +$$
$$\int_0^T \int_Q (|\mathbf{v}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla\, \mathbf{v}(\mathbf{x},t)|^2 + |p(\mathbf{x},t)|^2) dxdt \le C_0\, F^2, \tag{45}$$

где C_0 не зависит от ε и h.

Доказательство. Доказательство разрешимости задачи (39), (41), (43) и (44) стандартно и основано на методе Галеркина, мы лишь покажем как получить основные априорные оценки. В соответствующем уравнению (43) интегральном тождестве

$$\int_0^t \int_Q (\chi\mu_0\, \mathbb{D}(x,\mathbf{v}) + (1-\chi)\lambda_0\, \mathbb{D}(x,\mathbf{w}) - p\, \mathbb{I}) : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}) dxd\tau =$$
$$\int_0^t \int_Q \rho(\bar{c})\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dxd\tau, \tag{46}$$

где гладкая вектор - функция $\boldsymbol{\varphi}$ обращается в нуль на внешней границе, положим $\boldsymbol{\varphi} = \partial\mathbf{w}/\,\partial t$. Тогда интегральное тождество (46) примет вид

$$\alpha_\mu \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon) |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau}(\mathbf{x},\tau))|^2 dxd\tau +$$
$$\frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega_s^\varepsilon} |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x},t))|^2 dx$$
$$I = \int_0^t \int_Q (\rho(\bar{c})\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau})(\mathbf{x},\tau) dxd\tau. \tag{47}$$

Левую часть (47) оценим снизу, используя свойство указанного выше продолжения, очевидное неравенство

$$\int_Q \chi |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x},t))|^2 dx \le C_0 \int_0^t \int_Q \chi |\mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau}(\mathbf{x},\tau))|^2 dxd\tau$$

и неравенство Корна. В итоге получим

$$\frac{\mu_0}{2C_0^2} \int_0^t \int_Q |\nabla\, \mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau + \min(\frac{\mu_0}{2C_0^2}, \frac{\lambda_0}{2C_0}) \int_Q |\nabla\, \mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2 dx \le$$
$$\frac{\mu_0}{2C_0} \int_0^t \int_Q |\mathbb{D}(x, \mathbf{v}(\mathbf{x},\tau))|^2 dxd\tau + \min(\frac{\mu_0}{2C_0}, \frac{\lambda_0}{2}) \int_Q |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}(\mathbf{x},t))|^2 dx \le I,$$

где $\mathbf{v} = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\partial\mathbf{w}/\,\partial t)$.

Правую часть (47) оценим сверху используя неравенство

$$\int_Q |\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2 dx \le$$
$$C_0 \int_Q |\nabla \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t)|^2 dx \le$$
$$C_0^2 \int_Q |\mathbb{D}(x, \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t))|^2 dx, \tag{48}$$

формулу интегрирования по частям, неравенство Гельдера, неравенство Коши с параметром β и теоремы вложения для функции $\mathbf{w}$ в области $Q = \Omega^0 \cup \Omega_f^\varepsilon$ [2]:

$$I = \int_0^t \int_Q \rho(\bar{c})\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dxd\tau \le \beta \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau +$$
$$\frac{1}{\beta}\, C_0 \int_0^T \int_Q |\mathbf{F}|^2 dxdt \le \beta\, C_0 \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla\, \mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau + \frac{1}{\beta}\, C_0 F^2.$$

Объединив все вместе, получим

$$\frac{\mu_0}{2\,C_0^2}\int_0^t\int_Q |\nabla\,\mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)|^2\,dxd\tau+\min(\frac{\mu_0}{2\,C_0^2},\frac{\lambda_0}{2\,C_0})\int_Q\ |\nabla\,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2dx\ \leq$$
$$\beta\,C_0\int_0^t\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla\,\mathbf{v}(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau+\frac{1}{\beta}\,C_0F^2.$$

Требуемая оценка (45) для функций $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ следует из последнего неравенства, если мы положим в нем

$$\beta=\frac{\mu_0}{4\,C_0^3}.$$

Давление p оценивается из равенства (43) как линейный ограниченный функционал, который задается следующим соотношением

$$\int_{Q_T} p\,\nabla\cdot\,\boldsymbol{\varphi}\,dxdt=\int_{Q_T}(\mathbb{P}:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})-\rho(\bar{c})\mathbf{F}\cdot\,\boldsymbol{\varphi})dxdt,$$

определенный для $\boldsymbol{\varphi}\in L_2((0,T);\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, где

$$\mathbb{P}=\chi\mu_0\,\mathbb{D}(x,\mathbf{v})+(1-\chi)\,\lambda_0\,\mathbb{D}(x,\mathbf{w})\in L_2((0,T);L_2(\Omega)),\mathbb{P}\ \in L_2(\Omega_T).$$

Из соотношения следует,

$$\left|\int_{Q_T}\ p\,\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dxdt\right|\leq C_0\,F^2\,(\int_{Q_T}\ |\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

Выберем пробную функцию $\boldsymbol{\varphi}$ такую, что

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}=p\quad\text{и}\quad\int_{Q_T}|\nabla\varphi|^2dxdt\leq C_0\int_{Q_T}|p|^2dxdt$$

Разложим функцию $\boldsymbol{\varphi}$ в сумму двух функций $\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\nabla\,\psi$ таких, что

$$\Delta\,\psi=\ p,\ \mathbf{x}\in\Omega,\ \psi|_S=0, \tag{50}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}_0=0,\ \mathbf{x}\in\Omega,\ (\boldsymbol{\varphi}_0+\nabla\psi)|_S=0. \tag{51}$$

В силу известных результатов [4, 5] задача (50) имеет единственное решение $\psi\in L_2((0,T);\ W_2^2(\Omega))$,

$$\int_0^T(\|\,\psi\,\|_2^{(2)}\,(t))^2dt\leq C_0\ \int_{Q_T}\ |p|^2dxdt,$$

а задача (51) имеет по крайней мере одно решение

$$\boldsymbol{\varphi}_0\in L_2((0,T);\ W_2^1(\Omega)),$$
$$\int_0^T(\|\,\boldsymbol{\varphi}_0\,\|_2^{(1)}\,(t))^2dt\leq C_0\int_0^T(\|\,\psi\,\|_2^{(2)}\,(t))^2dt.$$

Из последних двух неравенств и (0.49), следует искомая оценка для давления $p\,(\mathbf{x},t)$.

Лемма 2. *В условиях Теоремы оператор* $\mathbb{A}_1(\bar{c})$ *является непрерывным оператором.*

Если $\mathbf{v}_1=\mathbb{A}_1(\bar{c}_1)$, $\mathbf{v}_2=\mathbb{A}_1(\bar{c}_2)$, и $\tilde{\mathbf{v}}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$, тогда

$$\int_0^T\int_Q(|\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)|^2+|\nabla\,\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)|^2)dxdt\leq$$
$$C_0\,F^2\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\bar{c}_1-\bar{c}_2|^2dxdt. \tag{52}$$

Доказательство. Утверждение леммы следуют из линейности оператора $\mathbb{A}_1$ и оценки (45).

Далее рассмотрим решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v})\cdot\nabla\,c=\alpha_D\,\Delta\,c \tag{53}$$

в области $\Omega^0\cup\Omega_f^\varepsilon$ при $t>0$, удовлетворяющего граничному условию

$$\nabla\,c\cdot\,\mathbf{n}=0 \tag{54}$$

на границе $\partial\Omega_f^\varepsilon$ при $t>0$ и начальному условию

$$c\,(\mathbf{x},0)=c_0\,(\mathbf{x}), \tag{55}$$

где $\mathbf{v}=\mathbb{A}_1(\bar{c})$, $\bar{c}\in\mathfrak{M}$, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega_f^\varepsilon$.

Согласно свойствам сглаживания, функция $\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v})$ ограничена и имеет ограниченные первые производные. Тогда благодаря известным результатам из теории линейных параболических уравнений [1], задача (53) – (55) имеет единственное гладкое решение $c=\mathbb{A}_2(\mathbf{v})$ такое, что

$$0 \leq c(\mathbf{x},t) \leq 1, \ \ \mathbf{x} \in \Omega^0 \cup \Omega_f^\varepsilon, \ t > 0, \tag{56}$$

и

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |c\,(\mathbf{x},t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla\, c\,(\mathbf{x},t)|^2 dxdt \leq C_0 F^2. \tag{57}$$

Оценка (57) следует из равенства для функции $c(\mathbf{x},t)$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |c\,(\mathbf{x},t_0)|^2 dx + \alpha_D \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla c|^2\, dxdt = - \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, (\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}) \cdot \nabla c) c\, dxdt,$$

если мы воспользуемся оценкой (56) и известным свойством сглаживания [2]

$$\int_0^T \int_Q |\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v})|^2\, dxdt \leq \int_0^T \int_Q |\mathbf{v}|^2\, dxdt.$$

Лемма 3. *Оператор $\mathbb{A}_2$ является непрерывным оператором.*

Иными словами, если $c_i = \mathbb{A}_2(\mathbf{v}_i)$, $\mathbf{v}_i = \mathbb{A}_1(\bar{c}_i)$, $i = 1{,}2$, при $\bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathfrak{M}$ и $\tilde{c} = c_1 - c_2$, тогда

$$\max_{0<t<T} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\tilde{c}\,(\mathbf{x},t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla\, \tilde{c}\,(\mathbf{x},t)|^2 dxdt \leq N(h) \int_0^T \int_Q \chi |\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x},t)|^2 dxdt, \tag{58}$$

и

$$\max_{\Omega_f^\varepsilon \times (0,T)} |c\,(\mathbf{x},t)| \leq N(h) \int_0^T \int_Q \chi |\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x},t)|^2 dxdt, \tag{59}$$

где $N(h)$ зависит от параметра h.

Доказательство. Интегральное тождество для разности $\tilde{c}$ имеет вид

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, (-\tilde{c}\, \frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha_D\, \nabla\, \tilde{c} \cdot \nabla\, \xi) dx = \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, \nabla \xi\, (c_2\, \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{c}\, \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_1)\,) dx,$$

где $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_2(\mathbf{x},t)) - \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t))$.

Взяв в качестве функции $\xi(\mathbf{x},t) = \tilde{c}(\mathbf{x},t)$ и проинтегрировав по t, получим:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\tilde{c}(\mathbf{x},t)|^2 dx + \alpha_D \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla\, \tilde{c}\,(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau = \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, \nabla \tilde{c}(\mathbf{x},\tau) \cdot (c_2(\mathbf{x},\tau)\, \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},\tau) - \tilde{c}\,(\mathbf{x},\tau)\, \mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x},\tau))) dxd\tau = I.$$

Оценка (58) следует из последнего равенства и неравенства Гронуола, если мы оценим правую часть используя неравенство Гельдера и неравенство Коши и оценки

$$0 \leq c_2(\mathbf{x},t) \leq 1, \ \ |\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t))| \leq N(h), \ \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \ 0 < t < T,$$

$$\int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t)|^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t) - \mathbf{v}_2(\mathbf{x},t)|^2 dx.$$

Действительно,

$$I \leq \frac{1}{2\beta}(\max_{\mathbf{x}\in\Omega_f^\varepsilon, 0<\tau<T} |\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}_1(\mathbf{x},t))|^2) \int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\tilde{c}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau + \frac{\beta}{2}\int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla\, \tilde{c}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau + \frac{1}{2\,\beta}\int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau + \frac{\beta}{2}\int_0^t \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla\, \tilde{c}(\mathbf{x},\tau)|^2 dxd\tau$$

и взяв $\beta = \alpha_D/2$, получим

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\tilde{c}(\mathbf{x},t)|^2dx+\frac{\alpha_D}{2}\int_0^t\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla\,\tilde{c}\,(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau\le$$
$$N(h)\int_0^t\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\tilde{c}(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau+C_0\int_0^t\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x},\tau)|^2dxd\tau.$$

Чтобы получить оценку (59), обратимся к лемме 3. Нас интересует утверждение леммы о том, что если $u(\mathbf{x},t)\in W_q^{2l,l}(\Omega_T)$ и $2l-2r-s-(n+2)/q>0$, то при $0\le\lambda<2l-2r-s-(n+2)/q$ получим

$$\langle D_t^rD_x^su\rangle_{\Omega_T}^{(\lambda)}=b_1\eta^{2l-2r-s-\frac{n+2}{q}-\lambda}\langle\langle u\rangle\rangle_{\Omega_T}^{2l}+b_2\eta^{-(2r+s+\frac{n+2}{q}+\lambda)}\parallel u\parallel_{q,\Omega_T}.$$

В нашем случае $c(\mathbf{x},t)\in W_2^{2,1}(\Omega_f\times(0,T))$, то есть $l=1,\ \ r=0,\ \ s=0,\ \ n=3,\ \ \lambda=0$,

$$|c|_{\Omega_f\times(0,T)}^{(0)}=b_1\eta^{\frac{1}{3}}\langle\langle c\rangle\rangle_{3,\Omega_f\times(0,T)}^{(2)}+b_2\eta^{-\frac{5}{3}}\parallel c\parallel_{3,\Omega_f\times(0,T)}\equiv A\eta^{\frac{1}{3}}+B\eta^{-\frac{5}{3}}\equiv f(\eta).$$

Функция $f(\eta)$ достигает минимума при $\eta=(\frac{5B}{A})^{1/2}$, в этом случае $f(\eta)=b_3A^{5/6}B^{1/6}$ и

$$|c|_{\Omega_f\times(0,T)}^{(0)}=b_4(\langle\langle c\rangle\rangle_{3,\Omega_f\times(0,T)}^{(2)})^{5/6}(\parallel c\parallel_{3,\Omega_f\times(0,T)})^{1/6}.$$

Окончательно получаем следующую оценку:

$$|c|_{\Omega_f\times(0,T)}^{(0)}b_5\parallel c\parallel_{3,\Omega_f\times(0,T)}.$$

Справедливо так же следующее неравенство:

$$\parallel c\parallel_{3,\Omega_f\times(0,T)}\ \le a_1\eta^{\frac{7}{6}}\langle\langle c\rangle\rangle_{2,\Omega_f\times(0,T)}^{(2)}+a_2\eta^{-\frac{5}{6}}\parallel c\parallel_{2,\Omega_f\times(0,T)}\equiv A\eta^{\frac{7}{6}}+B\eta^{-\frac{5}{6}}\equiv f(\eta).$$

Совершенно аналогично получим:

$$\parallel c\parallel_{3,\Omega_f\times(0,T)}\ \le a_3\parallel c\parallel_{2,\Omega_f\times(0,T)}$$

Пусть $\Phi=\mathbb{A}_2\circ\mathbb{A}_1$. Из оценки (56) следует, что оператор Φ переводит множество $\mathfrak{M}$ в себя. Ясно, что все неподвижные точки $c^{(h)}(\mathbf{x},t)$ оператора Φ являются решениями $\{\mathbf{w}^{(h)},p^{(h)},c^{(h)}\}$ вспомогательной задачи (36) – (42).

Для доказательства существования хотя бы одной неподвижной точки оператора Φ, покажем, что Φ является вполне непрерывным оператором. Из утверждений **Леммы 2** и **Леммы 3** следует непрерывность оператора Φ. Для доказательства того, что он вполне непрерывен воспользуемся теоремой Арцела. В нашей задаче для фиксированного $h>0$ функции $c_h(\mathbf{x},t)$ по построению обладают ограниченными производными по $\mathbf{x}$ и по t, следовательно

$$|c_h(\mathbf{x}',t)-c_h(\mathbf{x}'',t)|\le\frac{\partial c_h(\mathbf{x}^*,t)}{\partial x_j}|x'_j-x''_j|\le k_1|x'_j-x''_j|,\ (j=1,2),$$
$$|c_h(\mathbf{x},t')-c_h(\mathbf{x},t'')|\le\frac{\partial c_h(\mathbf{x},t^*)}{\partial t}|t'-t''|\le k_2|t'-t''|,$$

то есть функции $c_h(\mathbf{x},t)$ равностепенно непрерывны по переменным $\mathbf{x}$ и t. Равномерная ограниченность очевидна. Таким образом, оператор Φ является вполне непрерывным. Наконец, множество $\mathfrak{M}$ является связным, что и доказывает существование по - крайней мере одной неподвижной точки оператора Φ в $\mathfrak{M}$ [3].

Очевидно, что для всех неподвижных точек оператора Φ справедливы оценки (45), (56) и (57). Имеет место следующая

Лемма 4. *При условиях Теоремы существует по крайней мере одно обобщенное решение* $\{\mathbf{w}^{(h)},p^{(h)},c^{(h)}\}$ *задачи (36) – (42), для которого справедливы следующие оценки*

$$\int_0^T \int_Q (|\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2 + |p^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2)dxdt +$$
$$\max_{0<t<T} \int_Q (|\mathbf{w}^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \mathbf{w}^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2)dx \leq C_0 F^2, \tag{60}$$
$$0 \leq c^{(h)}(\mathbf{x},t) \leq 1, \ \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon \cup \Omega^0, \ t > 0, \tag{61}$$
$$\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi) \, |\nabla c^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2 dxdt \leq C_0 F^2, \tag{62}$$
$$\max_{0<t<T} \int_Q (|\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)|^2)dx \leq C(C_0, F), \tag{63}$$
$$\int_Q |\nabla \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_1) - \nabla \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_2)|^2 dx \leq C(C_0,F)\,|t_1 - t_2|, \tag{64}$$

где C_0 не зависит от ε, h и $t \in (0,T)$.

Доказательство. Заметим, что правая часть уравнения (36) обладает ограниченной производной по времени (ограниченность норм очевидно зависит от параметра h). Поэтому решение $\{\mathbf{w}^{(h)}, p^{(h)}\}$ задачи (36) имеют дополнительную гладкость

$$\chi \nabla (\frac{\partial \mathbf{v}^{(h)}}{\partial t}), \ (1-\chi) \nabla (\mathbf{v}^{(h)}), \ \frac{\partial p^{(h)}}{\partial t} \in L_2((0,T); L_2(\Omega)),$$

и мы можем продифференцировать по переменной t уравнение (36) и выписать соответствующее интегральное тождество:

$$\int_0^{t_0} \int_Q (\chi \mu_0 \mathbb{D}(x, \frac{\partial \mathbf{v}^{(h)}}{\partial t}) + (1-\chi)\lambda_0 \mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)})) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})dxdt -$$
$$\int_0^{t_0} \int_Q \frac{\partial p^{(h)}}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} dxdt = \delta \int_0^{t_0} \int_Q \chi (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \frac{\partial}{\partial t}((c^{(h)})_h)dxdt = I, \tag{65}$$

предварительно использовав оператор сглаживания

$$(c^{(h)})_h = \mathbb{M}^{(h)}(c^{(h)}).$$

Все утверждения леммы доказаны, кроме оценок (63) и (64).

Для доказательства (63) мы перепишем правую часть последнего интегрального тождества, как

$$I = \delta \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\,(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi})(\frac{\partial c^{(h)}}{\partial t})_h dxdt =$$
$$\delta \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi) \, \frac{\partial c^{(h)}}{\partial t} \, (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi})_{\bar{h}} \, dxdt,$$

где

$$(u)_{\bar{h}}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} c^{(h)}(\mathbf{x},\tau)d\tau, \text{ и } \varphi(\mathbf{x},t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Далее воспользуемся конвективным уравнением диффузии (38) и выразим производную по времени $\partial c^{(h)} / \partial t$:

$$I = -\delta \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi) \, ((\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)}) \cdot \nabla c^{(h)})(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi})_{\bar{h}} +$$
$$\alpha_D \nabla c^{(h)} \cdot \nabla (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi})_{\bar{h}}) \, dxdt.$$

В полученном интегральном тождестве положим $\boldsymbol{\varphi} = \partial \mathbf{w}^{(h)} / \partial t$. В итоге получим,

$$\frac{\mu_0}{2} \int_Q \chi \, |\mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_0))|^2 dx + \lambda_0 \int_0^{t_0} \int_Q (1-\chi)\,|\mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)})|^2 dxdt$$
$$I = -\delta \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi) \, (\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)}) \cdot \nabla c^{(h)})(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^{(h)})_{\bar{h}} \, dxdt -$$
$$\delta \int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, D_0 \nabla c^{(h)} \cdot \nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}^{(h)})_{\bar{h}} \, dxdt. \tag{66}$$

Оценим правую часть интегрального тождества (66):

$$I \leq C_0 \max|\mathbf{F}| (\int_0^{t_0} \int_Q |\mathbf{v}^{(h)}|^4 dxdt)^{\frac{1}{2}} (\int_0^{t_0} \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} +$$

$$C_0\max|\mathbf{F}|(\int_0^{t_0}\int_Q|\nabla\mathbf{v}^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}+$$

$$C_0\max|\nabla\mathbf{F}|(\int_0^{t_0}\int_Q|\mathbf{v}^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$C_0^2\,F\int_0^{t_0}\int_Q|\nabla\mathbf{v}^{(h)}|^2dxdt(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)+$$

$$C_0\,F\,\int_0^{t_0}\int_Q|\mathbf{v}^{(h)}|^2dxdt+\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt\,\leq C(C_0,F),\qquad(67)$$

где мы воспользовались теоремой вложения [5], для оценки первого слагаемого

$$\left(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\mathbf{v}^{(h)}|^4dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$C_0\left(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla\mathbf{v}^{(h)}|^2dxdt\right)\left(\int_0^{t_0}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

и оценкой (60).

Таким образом, из оценок (66), (67) следует оценка (63).

Оценка (64) доказывается аналогично. Действительно, перепишем интегральное тождество (65) в виде

$$\mu_0\int_Q\chi\,(\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_2))-\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_1))):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))dx=I_1+I_2,$$

где

$$I_1=-\lambda_0\int_{t_1}^{t_2}\int_Q(1-\chi)\,\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^{(h)}):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})dxdt,$$

$$I_2=\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_Q\chi\,(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi})(\frac{\partial c^{(h)}}{\partial t})_h dxdt,$$

Для слагаемого I_1 имеем

$$I_1\ \leq\lambda_0(\int_Q|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_0^T\int_Q(1-\chi)\,|\mathbb{D}(x,\mathbf{v}^{(h)})|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}\,|t_2-t_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы оценить слагаемое I_2, как и ранее, воспользуемся конвективным уравнением диффузии (38):

$$I_2=\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\bar h}\,\frac{\partial c^{(h)}}{\partial t}dxdt=-\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)$$

$$((\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)})\cdot\,\nabla c^{(h)})(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\bar h}+\alpha_D\,\nabla c^{(h)}\cdot\nabla(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{\bar h})dxdt=-\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)$$

$$((\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)})\cdot\,\nabla c^{(h)}))_h(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi})+\alpha_D\,\nabla(c^{(h)})_h\cdot\nabla(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}))dxdt\leq$$

$$C_0\max|\mathbf{F}|(\int_{t_1}^{t_2}\int_Q|\boldsymbol{\varphi}|^4dxdt)^{\frac{1}{4}}$$

$$(\int_{Q_T}|\mathbf{v}^{(h)}|^4dxdt)^{\frac{1}{4}}(\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}+$$

$$C_0\max|\mathbf{F}|(\int_{t_1}^{t_2}\int_Q|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}+$$

$$C_0\max|\nabla\mathbf{F}|(\int_{t_1}^{t_2}\int_Q|\boldsymbol{\varphi}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$C_0^3\,F(\int_{t_1}^{t_2}\int_Q|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_{0<t<T}(\int_Q|\nabla\mathbf{v}^{(h)}|^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}(\zeta+(1-\zeta)\chi)\,|\nabla c^{(h)}|^2dxdt)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2C_0\, F(\int_{t_1}^{t_2} \int_Q |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}}(\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\, |\nabla c^{(h)}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$C(C_0, F)\, (\int_Q |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\, (\int_0^T \int_{\Omega_f^\varepsilon} (\zeta + (1-\zeta)\chi)\ |\nabla\, c^{(h)}|^2 dxdt)^{\frac{1}{2}}\, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$C(C_0, F)\, (\int_Q |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда,

$$\int_Q \chi\, (\mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x}, t_2)) - \mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x}, t_1))) \colon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))dx \leq$$

$$C(C_0, F)\, (\int_Q |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}} \leq \widetilde{C}(C_0, F)\, (\int_Q |\mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\, |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}$$

и для

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x}, t_2) - \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x}, t_1)$$

получим

$$\int_Q \chi\, |\mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x}, t_2)) - \mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x}, t_1))|^2 dx\ \leq C(C_0, F)\, |t_2 - t_1|.$$

Наконец, для доказательства **Теоремы** перейдем к пределу при $h \to 0$ в соответствующих интегральных тождествах. Справедлива следующая

Лемма 5. *При условии Теоремы существует по крайней мере одно обобщенное решение* $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}, c^{\varepsilon}\}$ *задачи (2) - (11), для которого справедливы оценки (18) - (23).*

Доказательство. Согласно **Лемме 4** последовательности $\{\mathbf{w}^{(h)}\}$, $\{\mathbf{v}^{(h)}\}$ слабо компактны в $L_2((0,T); W_2^1(Q))$, а последовательность $\{p^{(h)}\}$ слабо компактна в $L_2((0,T); L_2(Q))$. То есть, из этих последовательностей можно выделить сходящиеся подпоследовательности подпоследовательности такие, что

$$\mathbf{w}^{(h)} \to \mathbf{w}^{\varepsilon},\ \mathbf{v}^{(h)} \to \mathbf{v}^{\varepsilon},\ \text{ слабо в } L_2((0,T); W_2^1(Q)), \text{ при h} \to 0$$

$$p^{(h)} \to p^{\varepsilon}\text{, слабо в } L_2\big((0,T); L_2(Q)\big) \text{ при } h \to 0$$

Из той же **Леммы 4** следует, ограниченность и слабая компактность последовательности $c^{(h)}$ в пространстве $L_2((0,T); W_2^1(Q))$:

$$c^{(h)} \to c^{\varepsilon}\text{, слабо в } L_2((0,T); W_2^1(Q)), \text{ при h} \to 0$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ в интегральном тождестве

$$\int_0^T \int_Q (\chi\, \mu_0\, \mathbb{D}(x, \mathbf{v}^{(h)}) + (1-\chi)\, \lambda_0\, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^{(h)}) - p^{(h)}\, \mathbb{I}) \colon \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})dxd\tau =$$

$$\int_0^T \int_Q \chi(\rho_0 + \delta\ c^{(h)})(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\varphi})dxd\tau,$$

получим тождество (0.16), если примем во внимание равенство

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{\varepsilon}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega^0 \cup \Omega_f^{\varepsilon},\ t \in (0, T). \tag{68}$$

Равенство (0.39) следует из предельного перехода в интегральном тождестве

$$\int_0^T \int_Q \chi(\mathbf{w}^{(h)} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{w}^{(h)} \cdot \boldsymbol{\varphi})dxdt = 0,$$

для произвольной гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$ такой, что $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, T) = 0$.

Переходя к пределу при $h \to 0$ в тождестве

$$\int_0^T \int_Q \mathbf{w}^{(h)} \cdot\ \nabla\, \xi dxdt = 0$$

где ξ произвольная гладкая функция, получим уравнение неразрывности (2).

Наконец, основной проблемой при переходе к пределу в конвективном уравнении диффузии (38), является предельный переход в слагаемом $\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)})\cdot\nabla c^{(h)}$, где последовательность $\{\nabla c^{(h)}\}$ сходится лишь слабо в пространстве $L_2((0,T);L_2(Q))$. Но, благодаря оценкам (0.63) и (0.64) из последовательности $\{\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)})\}$, можно выделить подпоследовательность сильно сходящуюся в пространстве $L_2((0,T);L_2(Q))$ к функции $\mathbf{v}^{\varepsilon}$. Тогда произведение $\mathbb{M}^{(h)}(\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t))\cdot\nabla c^{(h)}(\mathbf{x},t)$ будет сходится слабо в $L_2((0,T);L_2(Q))$ к соответствующему произведению $\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla c^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$.

Действительно, указанные оценки и диагональный процесс позволяют нам из последовательностей $\{\mathbf{v}^{(h)}(,t)\}$ и $\{\nabla\mathbf{v}^{(h)}(,t)\}$ выбрать подпоследовательности слабо сходящиеся в $L_2(Q)$ при почти всех $t\in(0,T)$ к функциям $\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ и $\nabla\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ соответственно. Тогда, согласно, теореме вложения [2], из слабой сходимости последовательность $\{\nabla\mathbf{v}^{(h)}(,t)\}$ в $L_2(Q)$ для почти всех $t\in(0,T)$ следует сильная сходимость последовательности $\{\mathbf{v}^{(h)}(,t)\}$ в $L_2(Q)$ для почти всех $t\in(0,T)$. Таким образом, последовательность ограниченных функций

$$f^{(h)}(t)=\int_Q|\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)-\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2dx,\ |f^{(h)}(t)|\ \leq C(C_0,F),$$

сходится к нулю почти всюду на отрезке $(0,T)$. Тогда по теореме Лебега [2]

$$\int_0^T f^{(h)}(t)dt=\int_0^T\int_Q|\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t)-\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)|^2dxdt\to 0\ \text{ при } h\ \to 0$$

Справедливость указанных ранее оценок (18) – (23) следует из свойств сильной и слабой сходимости.

В частности, последовательность $\{u^{(h)}(\mathbf{x})\}$, где

$$u^{(h)}(\mathbf{x})=\nabla\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_1)-\nabla\mathbf{v}^{(h)}(\mathbf{x},t_2)$$

слабо сходится к функции

$$u^{\varepsilon}(\mathbf{x})=\nabla\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t_1)-\nabla\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t_2)$$

для почти всех $t_1,t_2\in(0,T)$.

Таким образом,

$$\int_Q|u^{\varepsilon}(\mathbf{x})|^2dx\ \leq\limsup_{h\to 0}\int_Q|u^{(h)}(\mathbf{x})|^2dx\ \leq C(C_0,F)\ |t_1-t_2|$$

для почти всех $t_1,t_2\in(0,T)$.

Из доказанных лемм следует утверждение **Теоремы.**

Заключение

В работе была сформулирована и доказана теорема о существовании единственного обобщенного решения задачи, описывающей процесс диффузии примеси из водоема в упругий пористый грунт.Выводятся все необходимые априорные оценки. Доказательство разрешимости вспомогательных задач основано на методе Галеркина.

Список литературы
References

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.. 1967. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.:Наука, 736.

Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. 1967. Linear and quasilinear equations of parabolic type . M.: Science, 736.

2. Adams R.E. 1975. Sobolev spaces, New York: Academic Press, 268.

3. Kirk W.A., Sims B. 2001. Handbook of Metric Fixed Point Theory. Kluwer Academic, London.

4. Ladyzhenskaya O.A. 1969. The mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach, New York.

5. Lions J.L. 1969. Quelques me'thodes de re'solution des proble'mes aux limites non line'aire. Dunod, Gauthier-Villars, Paris.