



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЭЛАСТИЧНОМ ТВЕРДОМ СКЕЛЕТЕ

MATHEMATICAL MODELS OF HYDRAULIC SHOCK IN A VISCOUS LIQUID AND AN ELASTIC SOLID SKELETON

И.В.Некрасова, Л.Ф.Маслакова
I.V. Nekrasova, L.F. Maslakova

*Белгородский национальный исследовательский университет,
 Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85*

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

e-mail: Nekrasova_i@bsu.edu.ru, Maslakova@bsu.edu.ru

Аннотация. В настоящей работе предлагается вывод математических моделей распределения поля давления в пласте вблизи скважины в процессе гидравлического удара. Чтобы получить эти модели, мы следуем известной схеме, предложенной Р. Барриджем и Дж. Келлером, которая основана на строгом усреднении точной математической модели, описывающей на микроскопическом уровне совместное движение упругого твердого скелета и вязкой жидкости, заполняющей поры.

Resume. In this paper the derivation of the mathematical models of the distribution of the pressure field in the reservoir near the well in the process of hydraulic shock. To obtain these models, we follow the scheme proposed by R. and J. Burridge. Keller, which is based on simple averaging, an accurate mathematical model that describes on a microscopic level the simultaneous motion of the elastic solid skeleton and a viscous fluid filling the pores.

Ключевые слова: Уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усредненные периодических структур.

Keywords: Stokes equations, hydraulic fracturing, dvuhmestnoe convergence, homogenization of periodic structures.

Введение

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления в некоторой системе, заполненной жидкостью, как трубы, трещины и поры. Этот процесс в нефтяной скважине является частью процесса гидравлического разрыва нефтяного пласта. Существуют математические модели гидравлического удара, являющиеся инженерными моделями ([1], [2], [3]), связанными с фундаментальными законами механики сплошных сред, либо модели, описывающие распространение трещин в упругой среде ([4]). Но эти модели не работают на более сложных системах, таких как нефтяная скважина.

В настоящей работе мы получили математические модели гидравлического удара, следуя очень естественной идее Р. Барриджа и Дж. Келлера ([5]): в первую очередь, описать физический процесс на микроскопическом уровне, опираясь на общепринятую математическую модель, затем, если модель содержит малый параметр, найти все предельные режимы (усредненные уравнения) устремив малый параметр к нулю.

В качестве базовой математической модели гидравлического удара мы рассматриваем модель, описывающую кратковременные изотермические процессы в несжимаемой среде ([1] – [6]), где безразмерный вектор перемещений $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ сплошной среды в безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2} \mathbf{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области Ω при $t > 0$:



$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \tag{0.1}$$

$$\tilde{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \tilde{\rho} \mathbf{F}, \tag{0.2}$$

$$\mathbf{P} = \tilde{\chi} \alpha_\mu \mathbf{D}(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) + (1 - \tilde{\chi}) \alpha_\lambda \mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - p \mathbf{I}, \tag{0.3}$$

$$\tilde{\rho} = \tilde{\chi} \rho_f + (1 - \tilde{\chi}) \rho_s.$$

В уравнениях (0.1) – (0.3) $\tilde{\chi}(\mathbf{x})$ – характеристическая функция порового пространства, $p(\mathbf{x}, t)$ – давление, ρ_f и ρ_s соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердом скелете грунта, отнесенные к средней плотности воды ρ_0 , \mathbf{I} – единичная матрица.

Безразмерные постоянные α_μ и α_λ определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2 \rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2 \rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ, τ – характерное время физического процесса, L – характерный размер рассматриваемой физической области.

Уравнение (0.2) понимается в смысле теории распределений и содержит уравнение Стокса в жидкой части, уравнение Ламэ в твердом скелете и условие непрерывности перемещений и нормальных напряжений на границе «твердый скелет – поровое пространство».

Эта математическая модель содержит естественный малый параметр ε , которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой области $\varepsilon = l/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие допущения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. 1) Пусть область Y_s есть «твердая часть» единичного куба $Y = (0,1)^3 \subset R^3$, и его «жидкая» часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ есть липшицева поверхность.

2) Область E_f есть периодическое повторение в R^3 элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, область E_s – периодическое повторение в R^3 элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3) Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f , а твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s$ – периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s .

Непрерывная по Липшицу граница $\Gamma^\varepsilon = \partial \Omega_s^\varepsilon \cap \partial \Omega_f^\varepsilon$ представляет собой периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon \gamma$.

4) $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$. Поровое пространство Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами.

Тогда характеристическая функция области Ω примет вид

$$\tilde{\chi}(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi_0(\mathbf{x}) \chi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

где $\chi_0(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω_0 .



Пусть безразмерные параметры α_μ и α_λ зависят от малого параметра задачи ε и существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0.$$

Целью настоящей работы является нахождение предельного режима (усредненных уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий при

$$0 < \lambda_0 < \infty, \quad 0 < \mu_0 < \infty.$$

Вывод полученных результатов основан на систематическом использовании метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом ([7]).

1. Постановка задачи

Как правило, начальный импульс, определяющий гидравлический удар, передается в нефтяной пласт через заполненный жидкостью резервуар.

Моделируя этот процесс, мы рассматриваем область Q , занимающую конечный объем и лежащую в полупространстве $\{x_3 < 0\}$. Её граница S состоит из двух частей: S^1 лежит в плоскости $\{x_3 = 0\}$, остальная часть границы $S^2 = S \setminus S^1$ есть гладкая поверхность класса C^2 , вблизи плоскости $\{x_3 = 0\}$, заданная уравнением $\Phi(x_1, x_2) = 0$ (то есть представляющая собой цилиндр).

В качестве Ω выступает подобласть области Q , такая что дополнение Ω в Q есть цилиндр $\bar{\Omega}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq \delta^2 < 1, \varphi_0(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$ (см. рисунок 1).

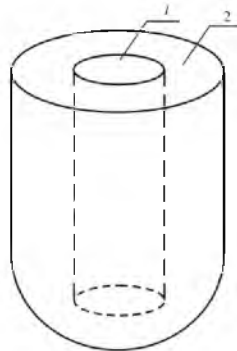


Рис.1.1 – область Ω^0 , 2 – область Ω .

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, в области Ω_T описывается системой

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbf{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

В области Ω_T^0 движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (1.1) и уравнения баланса импульса

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{P}^0, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{P}^0 = \alpha_\mu \mathbf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) - p^\varepsilon \mathbf{I}. \quad (1.5)$$



На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$, а также на границе Γ^ε «твердый скелет – поровое пространство» выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^0}} \mathbf{P}^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ – вектор нормали к соответствующей границе в точке \mathbf{x}_0 .

На части S^1 границы S задано нормальное напряжение

$$(\zeta \mathbf{P}^0(\mathbf{x}, t) + (1 - \zeta) \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{e}_3 = -p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_3, \quad (1.8)$$

где $p_0(\mathbf{x}, t)$ есть импульс, определяющий гидравлический удар. Будем считать, что функ-

ция $p_0(\mathbf{x}, t) = p_0(x_1, x_2, t)$ финитна в области $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < \frac{\delta^2}{2} < 1, -\delta < x_3 < 0\}$.

На оставшейся части внешней границы $S^2 = S \setminus S^1$ выполняется условие

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ при } t > 0. \quad (1.9)$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \quad (1.10)$$

Обычным образом определяется понятие обобщённого решения задачи (1.1) – (1.10).

Определение 1. Пара функций $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$, таких что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in W_2^{1,0}(Q_T), \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \in L_2(Q_T), \quad p^\varepsilon \in L_2(Q_T),$$

называется обобщённым решением задачи (1.1) – (1.10), если данные функции удовлетворяют уравнению неразрывности (1.1) почти всюду в области Q_T , начальному условию (1.10) для функции \mathbf{w}^ε и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (-\tilde{\rho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\zeta \mathbf{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbf{P}) : D(\mathbf{x}, \varphi)) dx dt = \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) dx dt \quad (1.11)$$

для всех функций $\varphi \in W_2^{1,0}(Q_T)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L_2(Q_T)$, таких что $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ на границе S_T^2 , и

$\varphi(\mathbf{x}, T) = 0$ для $\mathbf{x} \in Q$.

Очевидно, что давление p^ε определяется с точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем эту постоянную условием

$$\int_{\Omega} p^\varepsilon d\mathbf{x} = 0. \quad (1.12)$$

В уравнении (1.11) $\tilde{\rho}^\varepsilon = (\zeta + (1 - \zeta)\chi^\varepsilon)\rho_f + (1 - \zeta)(1 - \chi^\varepsilon)\rho_s$ и $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q . Через $A : B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A : B = tr(B^* \circ A) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}$.

Иногда мы будем записывать тождество (1.11) в дифференциальной форме

$$\tilde{\rho}^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\zeta \mathbf{P}^0 + (1 - \zeta) \mathbf{P}) \quad (1.13)$$



и говорить, что функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ удовлетворяют уравнению (1.13) и граничному условию (1.8) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция p_0 подчинена следующему условию

$$\int_{Q_T} (|\nabla p_0(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla \frac{\partial p_0}{\partial t}(\mathbf{x}, t)|^2) dx dt = \beta^2 < \infty,$$

где β – константа, зависящая только от областей Q, Ω и Ω_0 .

Вывод усредненных уравнений модели базируется на следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функции $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ являются слабым решением задачи (1.1) – (1.10).

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \int_Q (|\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}|^2 + |p^\varepsilon|^2 + \alpha_\mu (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2 + \\ + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2) dx \leq C_0 \beta^2, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε .

Доказательство существования обобщенного решения (1.1) – (1.10) при всех $\varepsilon > 0$ и оценки (1.14) стандартно (см. [6], [8]) и базируется на энергетическом тождестве

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_Q (\tilde{\rho}^\varepsilon |\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}|^2 + \alpha_\lambda (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2) dx + \\ + \int_Q \alpha_\mu (\zeta + (1-\zeta)\chi^\varepsilon) |D(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2})|^2 dx = \int_Q \nabla (\frac{\partial p_0}{\partial t}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx, \end{aligned} \tag{1.15}$$

2. Формулировка основных результатов

Теорема 2. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ – слабое решение задачи (1.1) – (1.10). Тогда

1) последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\}$ сходятся слабо в $\overset{1,0}{W}_2(Q_T)$ к функциям \mathbf{w} и \mathbf{v} соответственно, последовательности $\{\frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(Q_T)$ к функциям $\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$ и p соответственно;

2) предельные функции \mathbf{w}, \mathbf{v} и p есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T , состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{2.1}$$

и усредненного уравнения баланса импульса

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla p - \nabla \cdot (\zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + (1-\zeta) \mathcal{A}_1 : D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = \\ = \nabla \cdot \left(\mathcal{A}_2 : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \int_0^t \mathcal{A}_3(t-\tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau \right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

совместно с краевыми и начальными условиями

$$(\mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) - p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I}) \cdot \mathbf{e}_3 = p_0(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x} \in S_T^1, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_T^2, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q; \tag{2.5}$$

3) задача (2.1) – (2.5) однозначно разрешима.

В уравнении (2.2)

$$\rho(\mathbf{x}) = (\zeta(\mathbf{x}) + (1-\zeta(\mathbf{x}))m)\rho_f + (1-\zeta(\mathbf{x}))(1-m)\rho_s.$$



Тензоры четвертого ранга $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3(t)$ определены ниже формулой (3.11).

Доказательство теоремы 2.

На основании теоремы 1 заключаем, что последовательности $\{p^\varepsilon\}, \{\mathbf{w}^\varepsilon\}, \{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}, \{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}, \{D(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon)\}$ и $\{D(\mathbf{x}, \partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ ограничены в $L_2(Q_T)$. Следовательно, существует подпоследовательность от малого параметра $\{\varepsilon > 0\}$ и функции p, \mathbf{w} и \mathbf{v} , такие что

$$p^\varepsilon \rightarrow p, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и

$$\mathbf{w}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{w}, \quad \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$$

слабо в $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

По теореме Нгуетсенга существуют 1-периодические по переменной \mathbf{y} функции $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T \times Y)$ и $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ из $L_2(Q_T; W_2^1(Y))$, такие что последовательности $\{p^\varepsilon\}, \{\mathbf{w}^\varepsilon\}, \{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}, \{\nabla \mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\nabla(\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t)\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ к функциям $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}))$ и $(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} \partial \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) / \partial t)$ соответственно.

Лемма 1. Предельные функции \mathbf{w} и \mathbf{W} удовлетворяют макроскопическому и микроскопическому уравнениям неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T. \tag{3.1}$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T, \quad \mathbf{y} \in Y. \tag{3.2}$$

Доказательство. Для доказательства (3.1) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности (1.1) в виде

$$\int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой функции φ , равной нулю на части S_T^1 границы ∂Q и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Уравнение (3.2) получим, перейдя к двухмасштабному пределу в уравнении неразрывности (1.1) в интегральной форме:

$$\int_{Q_T} \varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \nabla (h_0(\mathbf{x}, t) h(\mathbf{x}/\varepsilon)) d\mathbf{x} dt = 0.$$

Лемма 2. Предельные функции $\mathbf{w}, p, \mathbf{W}$ и P удовлетворяют макроскопическому уравнению баланса импульса

$$\begin{aligned} & \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \nabla p - \nabla \cdot (\zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) = \\ & = \nabla \cdot (1 - \zeta)(\mu_0 m D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda_0 (1 - m) D(\mathbf{x}, \mathbf{w})) + \\ & + \nabla \cdot (1 - \zeta) \left(\mu_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) \right\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) \right\rangle_{Y_s} \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

в области Q_T , краевому условию (2.3), начальному условию (2.5) и микроскопическому уравнению баланса импульса



$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\mu_0 \chi(\mathbf{y}) D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) + \lambda_0 (1 - \chi(\mathbf{y})) D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) - pI \right) + \\ & + \nabla \cdot \left(\mu_0 \chi(\mathbf{y}) D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda_0 (1 - \chi(\mathbf{y})) D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

в области Y для почти всех (\mathbf{x}, t) .

Доказательство. Осуществив двухмасштабный предельный переход в интегральном тождестве (1.11) с пробными функциями $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi p_0) + (pI - \zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : D(\mathbf{x}, \varphi) \right) d\mathbf{x} dt = \\ & = \int_{\Omega_T} \left(\mu_0 m D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda_0 (1 - m) D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \right) : D(\mathbf{x}, \varphi) d\mathbf{x} dt + \\ & + \int_{\Omega_T} \left(\mu_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) \right\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \left\langle D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) \right\rangle_{Y_s} \right) : D(\mathbf{x}, \varphi) d\mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

что эквивалентно дифференциальному уравнению (3.3) и начальному условию (2.5). Последнее интегральное тождество, записанное в виде

$$\int_{Q_T} \left(\rho_f \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (pI - \zeta \mu_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : D(\mathbf{x}, \varphi) \right) d\mathbf{x} dt = - \int_{Q_T} \nabla \cdot (\varphi p_0) d\mathbf{x} dt$$

для финитных в области Ω_0 функции φ , обеспечивает краевое условие (2.3).

Уравнение (3.4) следует из (1.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями $\varphi = \varepsilon h(\mathbf{x}, t) \varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где h есть финитная в области Ω функция.

Перейдем теперь к выводу усредненного уравнения баланса импульса (2.2). Чтобы найти тензоры $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3(t)$, необходимо решить периодическую задачу (3.2), (3.4) в области Y_T , найти $D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t})$ и $D(\mathbf{y}, \mathbf{W})$ как операторы на $D(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t})$ и $D(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ и подставить их выражения в макроскопическое уравнение (3.3).

Перепишем тождество (3.4) в следующем виде

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\chi \left(\mu_0 D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}) + Z \right) + \lambda_0 (1 - \chi) D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) - pI \right) = 0,$$

где

$$Z(\mathbf{x}, t) = \mu_0 D(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}) - \lambda_0 D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^3 Z_{ij}(\mathbf{x}, t) J^{(ij)}.$$

Пусть $\{\mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t), P^{(ij)}(\mathbf{y}, t)\}$ и $\{\mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y}), P_0^{(ij)}(\mathbf{y})\}$, где $i, j = 1, 2, 3$, есть решения периодических задач

$$\left. \begin{aligned} & \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\chi \mu_0 D(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}^{(ij)}}{\partial t}) + \right. \\ & \left. + \lambda_0 (1 - \chi) D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}) - P^{(ij)} I \right) = 0, \\ & \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W}^{(ij)} = 0, \\ & \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y}), \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$



$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\chi \left(\mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}) + J^{(ij)} - P_0^{(ij)} I \right) \right) &= 0, \\ \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W}^{(ij)} &= 0, \\ \int_Y \chi(\mathbf{y}) \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

в области Y , тогда

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{i,j=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t - \tau) Z_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

и

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \chi(\mathbf{y}) \sum_{i,j=1}^3 P_0^{(ij)}(\mathbf{y}) Z_{ij}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i,j=1}^3 \int_0^t P^{(ij)}(\mathbf{y}, t - \tau) Z_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau,$$

$$D(\mathbf{y}, \mathbf{W}) = \mathcal{M}_0(\mathbf{y}) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}) - \int_0^t \mathcal{M}_j(\mathbf{y}, t - \tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau, \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{y}) = \mu_0 \sum_{i,j=1}^3 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) \otimes J^{(ij)}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{M}_j(\mathbf{y}, t) = \sum_{i,j=1}^3 \left(\mu_0 D \left(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \right) + \lambda_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t)) \right) \otimes J^{(ij)}. \quad (3.10)$$

Уравнения (3.8) – (3.9) влекут

$$\begin{aligned} D \left(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \right) &= \mathcal{M}_0(\mathbf{y}) : D(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}) - \mathcal{M}_j(\mathbf{y}, 0) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) - \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial \mathcal{M}_j}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \mu_0 m \sum_{i,j=1}^3 J^{(ij)} \otimes J^{(ij)} + \mu_0 \langle \mathcal{M}_0 \rangle_{Y_f}, \\ \mathcal{N}_2 &= \lambda_0 (1 - m) \sum_{i,j=1}^3 J^{(ij)} \otimes J^{(ij)} + \lambda_0 \langle \mathcal{M}_0 \rangle_{Y_s} + \mu_0 \langle \mathcal{M}_j(\mathbf{y}, 0) \rangle_{Y_f}, \\ \mathcal{N}_3(t) &= \mu_0 \left\langle \frac{\partial \mathcal{M}_j(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \right\rangle_{Y_f} + \lambda_0 \langle \mathcal{M}_j(\mathbf{y}, t) \rangle_{Y_s}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Лемма 3. Задачи (3.5), (3.6) однозначно разрешимы

Доказательство. Утверждение леммы, а также бесконечная гладкость решения по времени есть следствие оценки

$$\max_{0 < t < T} \int_{Y_f} \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t)) \right|^2 d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{Y_s} \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, \tau)) \right|^2 d\mathbf{y} d\tau \leq C_0,$$

которая выводится из энергетических тождеств

$$\frac{1}{2} \int_Y \chi \mu_0 \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, t)) \right|^2 d\mathbf{y} + \int_0^t \int_Y (1 - \chi) \lambda_0 \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, \tau)) \right|^2 d\mathbf{y} d\tau =$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_Y \chi \mu_0 \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) \right|^2 d\mathbf{y}, \\
 &\int_Y \chi \mu_0 \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) \right|^2 d\mathbf{y} + \int_Y \chi D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}(\mathbf{y})) : J^{(ij)} d\mathbf{y} = 0, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

после умножения первого уравнения в (3.6) на $\mathbf{W}^{(ij)}$ и интегрирования по частям по области $Y \times (0, t)$ а также умножения первого уравнения в (3.7) на $\mathbf{W}_0^{(ij)}$ и интегрирования по частям по Y .

Рассматривая функцию $(1 - \chi(\mathbf{y}))\mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0)$ как периодическое решение системы Стокса

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\lambda_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}) - P^{(ij)} I) = 0, \quad \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W}^{(ij)} = 0$$

в Y_s , совпадающее на границе γ с функцией

$$\chi(\mathbf{y})\mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0) \in W_2^1(Y_s),$$

мы получаем (см. [8])

$$\int_{Y_s} \left| D(\mathbf{y}, \mathbf{W}^{(ij)}(\mathbf{y}, 0)) \right|^2 d\mathbf{y} \leq C_0.$$

Повторяя эту процедуру, мы получим требуемое.

Лемма 4. Симметричный тензор \mathfrak{S}_γ строго положительно определен.

Доказательство. Пусть $\zeta = (\zeta_{ij})$ и $\eta = (\eta_{ij})$ – произвольные симметричные матрицы и

$$\mathbf{Y}_\zeta = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{W}_0^{(ij)} \zeta_{ij}, \quad \mathbf{Y}_\eta = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{W}_0^{(ij)} \eta_{ij}.$$

По определению

$$(\mathfrak{S}_\gamma : \zeta) : \eta = \mu_0 m \zeta : \eta + \mu_0^2 \langle D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\zeta) \rangle_{Y_f} : \eta.$$

Воспользуемся равенством

$$\int_Y \chi \mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(ij)}) : D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(kl)}) d\mathbf{y} + \int_Y \chi D(\mathbf{y}, \mathbf{W}_0^{(kl)}) : J^{(ij)} d\mathbf{y} = 0$$

Для $i, j = 1, 2, 3$, которое является очевидным следствием (3.12) и приводит к соотношению

$$\mu_0 \langle D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\eta) \rangle_{Y_f} : \zeta + \mu_0^2 \langle D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\zeta) : D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\eta) \rangle_{Y_f} = 0. \quad (3.13)$$

Таким образом,

$$(\mathfrak{S}_\gamma : \zeta) : \eta = \mu_0 \langle (\mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\zeta) + \zeta) : (\mu_0 D(\mathbf{y}, \mathbf{Y}_\eta) + \eta) \rangle_{Y_f}.$$

Утверждение Леммы следует из последнего соотношения.

Лемма 5. Задача (2.1) – (2.5) имеет единственное решение.

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (2.1) – (2.5) следует из энергетического равенства

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)|^2 d\mathbf{x} + \int_0^{t_0} \int_{\Omega} (\mathfrak{S}_\gamma : D(\mathbf{x}, \mathbf{v})) : D(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} dt = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathfrak{S}_\gamma : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_0))) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t_0)) d\mathbf{x} - \\
 &- \int_0^{t_0} \int_{\Omega} D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) : \left(\int_0^t \mathfrak{S}_\gamma(t-\tau) : D(\mathbf{x}, \mathbf{w}(\mathbf{x}, \tau)) d\tau \right) d\mathbf{x} dt
 \end{aligned}$$

Для решения $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ однородной ($p_0 = 0$) задачи.



Список литературы
References

1. Adachi J. I., Detournaray E., Peirce A. P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers// *Int J of Rock Mechanics and Mining Sciences*. – 2010. 47 – P. 625 – 630.
2. Kovalyshen Y., Detounaray E. A. Reexamination of the Classical PKN Model of Hydraulic Fracture// *Transp. Porous Med* – 2010. 81. – P. 317-339.
3. Weiguob L., Yangshenga Z. A mathematical model for solid liquid and mass transfer coupling and numerical simulation for hydraulic fracture in rock salt // *Progress in Natural Science*. – 2005. – 15; 8. – P.742-748.
4. Гарипов Т.Т. Моделирование процесса гидроразрыва пласта в проупругой среде // *Мат. Моделирование*. – 2006. – 18; 6. – С.53-69.
Garipov T. T. process Modeling of hydraulic fracturing in proposal environment // *Abstr. Modeling*. – 2006. – 18; 6. – С.53-69.
5. Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure // *Journal of Acoustic Society of America*. – 1981. – 70; 4. – P.1140-1146.
6. Meirmanov A. Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – 163; 2 – P.111-172.
7. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM J. Math. Anal.* – 1989. – 20; 3. – P.608-623.
8. Ладыженская О.А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
O. A. Ladyzhenskaya, *Mathematical questions of dynamics of viscous incompressible fluid* / O. A. Ladyzhenskaya. – М.: Science, 1970.