УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

CORRECTNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN THE MULTIDIMENSIONAL DOMAIN FOR THE MODEL EQUATIONS OF MIXED TYPE

С.А. Алдашев
S.A. Aldashev

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Казахстан

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

E-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация
Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x=(x_1,...,x_m), m\geq 2,$ то по принципу Гамильтона приходим к многомерным гиперболическим уравнениям. Полагая, что в положении изгиба мембрана находиться в равновесии,из принципа Гамильтона также получаем многомерные эллиптические уравнения. Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерных гиперболо-эллиптических уравнений. Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости и пространстве.В работе используется метод, предположенный в работах автора, показано однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в многомерной области для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Abstract
It is known that the vibrations of elastic membranes in space are modeled by partial differential equations. If the deflection of the membrane is considered a function $u(x,t), x=(x_1,...,x_m), m\geq 2,$ then by the Hamilton principle we arrive at multidimensional hyperbolic equations. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, the Hamiltonian principle also yields multidimensional elliptic equations. Consequently, the vibrations of elastic membranes in space can be modeled as multidimensional hyperbola-elliptic equations. The problem of the well-posedness of the Dirichlet problem for mixed-type equations in special domains was the subject of research by many authors on the plane and space. The method used in the author's papers is used to demonstrate unambiguous solvability and obtain an explicit form of the classical solution of the Dirichlet problem in the multidimensional region for the Lavrent'ev-Bitsadze equation .

Ключевые слова: многомерная область, задача Дирихле, однозначная разрешимость, сферические функций, ортогональность.
Keywords: multidimensional domain, Dirichlet problem, unique solvability, spherical functions, orthogonality.

1. Постановка задачи и результат

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости [1-5] и в пространстве [6-9].

В данной работе найден многомерный область в которой, задача Дирихле однозначна разрешима для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Пусть Ω – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная при $t>0$ сферической поверхностью $\Gamma: r\ +t\ =1$, а при $t<0$ конической поверхностью $K: t=-\varphi(r)$,

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0,\ \varphi(r)\in C^1([0,1])\cap C^2((0,1)), |\varphi'(r)|<1, \varphi'(r)\neq 0,$$

где $r=|x|$ – длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0$.

Пусть далее S – общая часть границ областей Ω^+, Ω^- представляющее множество $\{t=0, 0<|x|<1\}$ в E_m.

В области D рассмотрим многомерные уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$(\operatorname{sgn} t)\Delta_x u + u_{tt} = 0 \qquad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $m\geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим

$r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1}, t,\ r\geq 0, 0\leq\theta_i\leq\pi, i=1,2,\ldots,m-2,\ 0\leq\theta<2\pi, \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$.

Задача 1(Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области Ω при $t\neq 0$ из класса $C(\overline{D})\cap \tilde{N}^1(D\cup S)\cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma=\varphi(r,\theta), \qquad (2)$$

$$u|_K=\psi(r,\theta), \qquad (3)$$

при этом $\varphi(1,\theta)=\psi(1,\theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\leq k\leq k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2), W_2^l(S_\varepsilon), l=0,1,\ldots$ - пространства Соболева.

Имеет место ([10])

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\geq m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)|\leq c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2\leq c_2,\quad c_1,c_2=const..$$

Через, $\overline{\varphi_n^k}(r)$ обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $\varphi(r,\theta)$.

Пусть $\varphi(r,\theta)\in W_2^l(S), \psi(r,\theta)=r^3\psi^*(r,\theta), \psi^*(r,\theta)\in W_2^l(S), l>\frac{3m}{2}+4$.

Тогда справедлива

Теорема . Задача D однозначно разрешима.

2. Доказательство теоремы

В сферических координатах уравнения (1) в области Ω^+ имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u+u_{tt}=0, \tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}),\ g_1=1,\ g_j=\left(\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{j-1}\right)^2,\ j>1.$$

Известно ([10]), что спектр оператора δ состоит из собственных $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи D в области Ω^+ принадлежит классу $C\left(\overline{\Omega}^+\right)\cap C^2\left(\Omega^+\right)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\overline{u}_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([10]), будем иметь

$$\overline{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{u}_{nr}^k+\overline{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\overline{u}_n^k=0,\ k=\overline{1,k_n},n=0,1,\ldots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\overline{u}_n^k\left(r,\sqrt{1-r^2}\right)=\overline{\varphi}_n^k(r),\ k=\overline{1,k_n},n=0,1,\ldots,0\le r\le1. \tag{8}$$

В (7), (8) произведя замену $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{\frac{1-m}{2}}u_n^k(r,t)$, а затем полагая $r=\rho\cos\varphi,\ t=\rho\sin\varphi,\quad \rho\ge0, 0\le\varphi\le\pi$ получим

$$\upsilon_{n\rho\rho}^k+\frac{1}{\rho}\upsilon_{n\rho}^k+\frac{1}{\rho^2}\upsilon_{n\varphi\varphi}^k+\frac{\lambda_n}{\rho^2 ños^2\varphi}\upsilon_n^k=0,\ , \tag{9}$$

$$\upsilon_n^k(1,\varphi)=g_n^k(\varphi), \tag{10}$$

где

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi)=u_n^k(\rho\cos\varphi,p\sin\varphi),\overline{\lambda}_n=\frac{\left[(m-1)(3-m)-4\lambda_n\right]}{4},$$

$$g_n^k(\varphi)=(ños\varphi)^{\frac{(m-1)}{2}}\overline{\varphi}_n^k(\cos\varphi).$$

Решение задачи (9), (10) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi)=R(\rho)\phi(\varphi). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9) будем иметь

$$\rho^2R_{\rho\rho}+\rho R_\rho-\mu R=0, \tag{12}$$

$$\phi_{\varphi\varphi}+\left(\mu+\frac{\overline{\lambda}_n}{\cos^2\varphi}\right)\phi=0,\ \mu=const. \tag{13}$$

Если решение уравнение Эйлера (12) будем искать в виде $R(\rho)=\rho^s$, $0\le s=const,$ то получим $s^2=\mu.$

Далее уравнение (13) запишем следующим образом

$$\phi_{\varphi\varphi}=\left(\frac{l(l-1)}{\cos^2\varphi}-s^2\right)\phi,\ l=-n-\frac{(m-3)}{2}. \tag{14}$$

В уравнений (14) произведя замену $\xi=\sin^2\varphi$ приходим к уравнению

$$\xi(\xi-1)g_{\xi\xi}+\left[(\beta+\gamma+1)\xi-\frac{1}{2}\right]g_\xi+\beta\gamma g=0, \tag{15}$$

$$g(\xi)=\frac{\phi(\varphi)}{\cos^l\varphi},\beta=\frac{(l+s)}{2},\ \gamma=\frac{(l-s)}{2}.$$

Общее решение уравнение (15) представимо по формуле ([11])

$$g_s(\xi)=c_{1s}F\left(\beta,\gamma;\frac{1}{2};\xi\right)+c_{2s}F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\xi\right), \tag{16}$$

которая периодическая по φ если $s=0,1,...,$ где $\tilde{n}_{1s},c_{2s}-$произвольные независимое постоянные, а $F(\beta,\gamma;\alpha;\xi)-$ гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом, из (11), (16) вытекает, что общее решение уравнения (9) запишется в виде

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi)=\sum_{s=0}^{\infty}\rho^s\cos^l\varphi\left[c_{1s}F\left(\beta,\gamma;\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right)+c_{2s}\sin\varphi F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right] \tag{17}$$

Так как $\left|\upsilon_n^k\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\right|<\infty,$ то из (17) будем иметь

$$c_{1s}F\left(\beta,\gamma;\frac{1}{2};1\right)+c_{2s}F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)=0,$$

или

$$c_{2s}=-\frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)}c_{1s}, \tag{18}$$

где $\Gamma(z)-$гамма-функция

Подставляя (18) в (17) получим

$$\upsilon_n^k(\rho,\varphi)=\sum_{s=0}^{\infty}c_{1s}\rho^s\cos^l\varphi\left[F\left(\beta,\gamma;\frac{1}{2};\sin^2\varphi\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)}\sin\varphi F\left(\beta+\frac{1}{2},\gamma+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\sin^2\varphi\right)\right]. \tag{19}$$

Известно ([12]), что система функций $\left\{\frac{1}{2},\tilde{n}os2s\varphi,\sin 2s\varphi,s=1,2,...\right\}$ полна, ортогональна в $\tilde{N}(0,\pi)$, следовательно и замкнута.

Отсюда следует, что если $g_n^k(\varphi) \in C([0,\pi])$ разложим в ряд

$$g_n^k(\varphi) = a_{0,n}^k + \sum_{s=1}^{\infty}\left(a_{s,n}^k \cos 2s\varphi + b_{s,n}^k \sin 2s\varphi\right), \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} a_{0,n}^k = \int_0^\pi g_n^k(\varphi)\,d\varphi,\ a_{s,n}^k = \int_0^\pi g_n^k(\varphi)\cos 2s\varphi d\varphi, \\ b_{s,n}^k = \int_0^\pi g_n^k(\varphi)\sin 2s\varphi d\varphi,\ s = 1,2,..., \end{gathered} \tag{21}$$

Далее, удовлетворяя функцию (19) условию (10), учитывая разложение (20) и полагая $\varphi = 0$ получим

$$c_{1s} = a_{s,n}^k,\ s = 0,1,..., \tag{22}$$

Таким образом, из (6), (19), (22) следует, что решением задачи (5), (8) в области Ω^+ является функция

$$\begin{gathered} u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=p}^{\infty}\Bigg[a_n^k r^{2-m-n}\left(r^2+t^2\right)^{\frac{s}{2}+\frac{n}{2}+\frac{(m-3)}{4}} \\ F\left(-\frac{n}{2}+\frac{3-m}{4}+\frac{s}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{3-m}{4}-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{r^2+t^2}\right) - \\ -\frac{2\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+\frac{m-3}{4}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}+\frac{m-3}{4}+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{m-3}{4}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{m-3}{4}+\frac{s}{2}\right)} t\left(r^2+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ F\left(-\frac{n}{2}+\frac{5-m}{4}+\frac{s}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{5-m}{4}-\frac{s}{2}, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{r^2+t^2}\right)\Bigg] Y_{n,m}^k(\theta). \end{gathered} \tag{23}$$

Из (23) при $t \to +0$ будет иметь

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=p}^{\infty} a_n^k r^{s+\frac{(1-m)}{2}} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{24}$$

где $p \geq \dfrac{m+5}{2}$, а $a_{s,n}^k$ определяются из (21).

Известно, что если $g_n^k(\varphi) \in C^q((0,\pi))$ то имеет место оценка ([12])

$\left|a_{s,n}^k\right| \leq \dfrac{c_1}{s^{q+2}}$, $q = 0,1,...$, а также справедливы формулы ([14])

$$\begin{gathered} \frac{d^q}{dz^q}F(a,b,c;z) = \frac{(a)_q (b)_q}{(c)_q}F(a+q,b+q,c+q;z), \\ (a)_q = \frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)},\ \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta}\left[1+\frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+O\left(z^{-2}\right)\right], \end{gathered}$$

и оценки ([10])

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j = \overline{1,m-1}. \tag{25}$$

Из теоремы вложения ([15]) следует, что $W_2^l(S) \subset C^q(S) \cap C(\overline{S})$, если $l > q + \frac{m}{2}$.

Из выше изложенного и учитывая лемму 2, а также граничное условие $\varphi(r,\theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2} + 4$, получим, что решение (23) $u(r,\theta,t) \in C(\overline{D}^+) \cap C^2(D^+)$, а также из (24) вытекает, что $\tau(r,\theta) = r^3 \tau^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta) \in W_2^l(S)$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (24) приходим к задаче Дирихле в области Ω^- для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0$$

с данными $u|_\Gamma = \varphi(r,\theta)$, $u|_K = \psi(r,\theta)$, которое имеет единственное решение ([16]).

Теорема доказана.

Список литературы
References

1. Шабат Б.В. 1957. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа. ДАН СССР, 112 (3): 386-389.

Shabat B.V. 1957. Examples of the solution of the Dirichlet problem for a mixed-type equation, DAN SSSR, 112(3): 386-389.

2. Бицадзе А.В. 1958. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях. ДАН СССР, 122(2): 167-170.

Bitsadze A.V. 1958. Inadequacy of the Dirichlet problem for equations of mixed type in mixed domains. DAN USSR, 122(2): 167-170.

3. Солдатов А.П. 1993. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Докл. РАН, 332(6): 696-698, 333(1): 16-18.

Soldatov A.P. 1993. Problems of Dirichlet type for the Lavrent'ev-Bitsadze equation. Dokl. RAS, 332(6): 696-698, 333(1): 16-18.

4. Нахушев А.М. 2006. Задачи со смещением для уравнения в частных производных, М.: Наука, 287.

Nakhushev A.M. 2006. Problems with displacement for a partial differential equation, M .: Наука, 287.

5. Сабитов К.Б. 2007. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области. Докл.РАН, 413(1): 23-26.

Sabitov K.B. 2007. The Dirichlet problem for a mixed-type equation in a rectangular domain, Dokl.RAN, 413(1): 23-26.

6. Хачев М.М. 1998. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа, Нальчик: Эльбрус, 168.

Khachev M.M. 1998. The first boundary-value problem for linear equations of mixed type, Nal'chik: El'brus, 168.

7. Нахушев А.М. 1970. Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндрической области. Дифференц. уравнения, 6(1): 190-191.

Nakhushev A.M. 1970. A uniqueness criterion for the solution of the Dirichlet problem for equations of mixed type in cylindrical region. Differents. equations, 6(1): 190-191.

8. Алдашев С.А. 2012. Корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Укр. матем.Вестник, 9(3): 301-307.

Aldashev S.A. 2012. Correctness of the Dirichlet problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation // Ukr. mat. The bulletin, 9(3): 301-307.

9. Алдашев С.А. 2010. Критерий единственности решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН: 22-23.

Aldashev S.A. 2010. A uniqueness criterion for the solution of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional equation Lavrent'eva-Bitsadze // Proceedings of the International

Russian-Bulgarian Symposium "Equations of the mixed type and related problems of analysis and informatics Nalchik: SRI PMA KBNC RAN: 22-23.

10. Михлин С.Г. 1962. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 254.

Mikhlin, S.G. 1962. Multi-dimensional Singular Integrals and Integral Equations. Moscow: Fizmatgiz (in Russian), 254.

11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965, 703.

Kamke, E. 1965. Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka (Russian translation), 703.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. 1976. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 542.

Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. 1976. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka (in Russian), 542.

13. Смирнов М.И. 1950. Курс высшей математики. Т.2,М.: Издательство технико-теор. литературы, 622.

Smirnov M.I. 1950. Course of higher mathematics. T.2, M .: Publishing house tekhniko-teor. literature, 622. (in Russian).

14. Бейтмен Г., Эрдейи А. 1973. Высшие трансцендентные функции, 1, М.: Наука, 292.

Bateman, H., Erdelyi, A. 1974. Higher Transcendental Functions, 2, Moscow: Nauka (Russian translation).

15. Соболев С.Л. 1962. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 255.

Sobolev S.L. 1962. Some applications of functional analysis in mathematical Physics, Novosibirsk: Izd-vo SA AN SSSR, 255. (in Russian).

16. Алдашев С.А. 2014. Корректности задач Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения. Укр. матем. журнал, 66(10): 1414-1419

Aldashev S.A. 2014. Correctness of the Dirichlet and Poincaré problems in a multidimensional domain for wave equation. Ukr. Math. Journal, 66(10): 1414-1419