МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

A PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Ф.М. Лосанова
F.M. Losanova

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А
Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 A, Shortanov St, Nalchik, 360000, Russia

E-mail: losanovaf@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии. Доказана теорема существования решения исследуемой задачи.

Abstract. In this paper we consider a nonlocal boundary value problem with integral condition. The theorems of existence and uniqueness of the problem are proved.

Ключевые слова: задача с интегральным условием, уравнение дробной диффузии, дробная производная Римана-Лиувилля, аналог условия Тихонова.

Key words: problem with an integral condition, fractional diffusion equation, fractional Riemann-Liouville derivative, analogue of Tikhonov conditions.

Введение

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целого порядка и имеют не только огромный теоретический интерес, но и большое практическое значение. Такие уравнения могут выступать в качестве математических моделей, описывающих различные процессы, в том числе в средах с фрактальной структурой [1], [2].

В области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости независимых переменных (x,y) рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,\eta) = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^y \dfrac{u(x,\eta)d\eta}{(y-\eta)^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(x,y), & \alpha = 0, \\ \dfrac{\partial^n}{\partial y^n} D_{0y}^{\alpha-n} u(x,\eta), & n-1 < \alpha \le n, \ n \in \mathrm{N} \end{cases}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка α [1, с. 9], $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера, $0 < \alpha \le 1$.

Уравнения вида (1) как с дробной производной Капуто, так и с дробной производной Римана-Лиувилля исследовались ранее многими зарубежными и отечественными учеными. В работе [3] для уравнения (1) рассматривались первая краевая задача в прямоугольной области, задача Коши и краевая задача в бесконечной области, а в [4, с. 104] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка построено решение задачи Коши и первой краевой задачи для уравнения

(1). Также в работе [4, с. 115] построено общее представление решения уравнения (1) в прямоугольной области, решены основные краевые задачи и найдены соответствующие функции Грина. Для обобщенного уравнения (1) с младшими членами доказан принцип экстремума в работе [5].

Краевые задачи с интегральными условиями для параболических уравнений, в том числе с дробной производной, исследовались в работах [6] - [9].

Решение $u(x,y)$ уравнения (1) назовем регулярным в области Ω, если $y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $u(x,y)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка по x, $D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta)$ - непрерывную производную по y в области Ω.

В работе исследуется следующая **задача.**

В области Ω требуется найти регулярное решение $u=u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta)=\tau(x), \qquad 0\le x<\infty, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{K}(x,y)u(x,y)dx=\psi(y), \qquad 0\le y\le T, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\psi(y)$, $\mathrm{K}(x,y)$ – заданные достаточно-гладкие функции.

Без ограничения общности можно считать, что $f(x,y)\equiv 0$, $\tau(x)\equiv 0$. Действительно рассмотрим задачу

$$\upsilon_{xx}(x,y)-D_{0y}^{\alpha}\upsilon(x,\eta)=f(x,y), \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\upsilon(x,\eta)=\tau(x), \qquad 0\le x<\infty, \tag{5}$$

$$\upsilon(0,y)=0, \qquad 0\le y\le T. \tag{6}$$

Тогда решение задачи (4)-(6) имеет вид [3]

$$\upsilon(x,y)=\int_0^\infty G(x,y,\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\int_0^y\int_0^\infty f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\xi\,d\eta.$$

Искомое решение ищем в виде $u(x,y)=\widetilde{u}(x,y)+\upsilon(x,y)$,

$$\widetilde{u}_{xx}(x,y)-D_{0y}^{\alpha}\widetilde{u}(x,\eta)=0, \tag{7}$$

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\widetilde{u}(x,\eta)=0, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{K}(x,y)\widetilde{u}(x,y)dx=\widetilde{\psi}(y), \qquad 0\le y\le T, \tag{9}$$

где $\widetilde{\psi}(y)=\psi(y)-\int_0^\infty \mathrm{K}(x,y)\upsilon(x,y)dx$.

Таким образом задача (1)-(3) эквивалента задаче (7)-(9).

Поэтому далее будем рассматривать следующую **задачу.**

В области Ω требуется найти регулярное решение $u=u(x,y)$ однородного уравнения

$$u_{xx}(x,y)-D_{0y}^{\alpha}u(x,\eta)=0, \tag{1'}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta)=0, \qquad 0\le x<\infty, \tag{2'}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{K}(x,y)u(x,y)dx=\psi(y), \qquad 0\le y\le T, \tag{3'}$$

где $\psi(y)$, $\mathrm{K}(x,y)$ – заданные функции.

Теорема существования. *Пусть* $\mathrm{K}(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $\mathrm{K}_x(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $\mathrm{K}(0,y)\not\equiv 0$,

$$D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\psi(y)}{\mathrm{K}(0,y)}\in AC[0,T], \quad \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\psi(y)}{\mathrm{K}(0,y)}=0,$$

причем $K(x,y)=o\left(\exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)\right)$ и $K_x(x,y)=o\left(\exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)\right)$, ρ *– некоторая положительная константа. Тогда существует регулярное решение уравнения (1)' в области* Ω *, удовлетворяющее краевым условиям (2)' (3)' и представимое в виде*

$$u(x,y)=\int_0^y \frac{1}{y-\eta} e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)\varphi(\eta)d\eta, \tag{10}$$

где $\varphi(y)=D^{\alpha}_{0y}g(y)$, а $g(y)$ *– является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода*

$$g(y)+\int_0^y G(y,y-t)g(t)dt=\frac{\psi(y)}{K(0,y)},$$

где $G(y,y-t)=\frac{1}{K(0,y)}\int_0^\infty \frac{1}{(y-\eta)^{-1}} e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K_x(x,y)dx.$

Доказательство.

Используя представление решения задачи (10) с условиями *(3)'* и $u(0,y)=\varphi(y)$ для однородного уравнения (1) [3, с. 38] и удовлетворив условию (9), получим

$$\int_0^\infty K(x,y)u(x,y)dx=\int_0^\infty K(x,y)\int_0^y \frac{1}{y-\eta} e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)\varphi(\eta)d\eta\, dx=\psi(y) \tag{11}$$

здесь $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Райта [4, с. 22].

Перепишем (11) в виде

$$\int_0^y K_1(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\psi(y), \tag{12}$$

где

$$K_1(y,\eta)=\int_0^\infty K(x,y)\frac{1}{y-\eta} e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)dx. \tag{13}$$

Уравнение (12) является интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода с ядром $K_1(y,\eta)$ и правой частью $\psi(y)$.

Проинтегрировав (13) по частям, получим

$$K_1(y,\eta)=K(0,y)\frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\int_0^\infty (y-\eta)^{\alpha-1} e^{1,\alpha}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K_x(x,y)dx.$$

Подставим $K_1(y,\eta)$ в (12)

$$K(0,y)\int_0^y \frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\varphi(\eta)d\eta+\int_0^y \varphi(\eta)K_2(y,y-\eta)d\eta=\psi(y),$$

где $K_2(y,y-\eta)=\int_0^\infty (y-\eta)^{\alpha-1} e^{1,\alpha}_{1,c}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K_x(x,y)dx.$

$$K(0,y)D^{-\alpha}_{0y}\varphi(y)+\int_0^y \varphi(\eta)K_2(y,y-\eta)d\eta=\psi(y). \tag{14}$$

В силу формулы дробного интегрирования функции Райта [4, с. 26], второе слагаемое в левой части уравнения (14) можно записать в виде

$$\int_0^y \varphi(\eta)K_2(y,y-\eta)d\eta=\int_0^y \varphi(\eta)D^{-\alpha}_{y\eta}K_3(y,y-\eta)d\eta=\int_0^y K_3(y,y-t)D^{-\alpha}_{0t}\varphi(t)dt, \tag{15}$$

где $K_3(y,y-\eta)=\int_0^\infty \frac{1}{(y-\eta)^{-1}} e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K_x(x,y)dx.$

Далее обозначив $g(y)=D^{-\alpha}_{0y}\varphi(y)$ с учетом (15), равенство (14) перепишем в виде

$$K(0,y)g(y)+\int_0^y K_3(y,y-t)g(t)dt=\psi(y). \tag{16}$$

Так как по условию $K(0,y)\not\equiv 0$, то соотношение (16) принимает вид

$$g(y)+\int_0^y K_4(y,y-t)g(t)dt=\psi_1(y), \tag{17}$$

где $K_4(y, y-t) = \dfrac{K_3(y, y-t)}{K(0, y)}$, $\psi_1(y) = \dfrac{\psi(y)}{K(0, y)}$.

Уравнение (17) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Из теории интегрального уравнения Вольтерра второго рода известно [10, с. 227], что для любых функций $K_4(y, y-t) \in C(\overline{D})$ и $\psi_1(y) \in L[0, T]$ существует единственное решение $g(y) \in L[0, T]$ уравнения (17) и выписывается в виде

$$g(y) = \psi_1(y) - \int_0^y R(y, t)\psi_1(t)dt,$$

где $R(y, t)$ – резольвента ядра $K_4(y, y-t)$.

Учитывая условия теоремы, накладываемые на $\psi(y)$ и на $K(x, y)$, получим что $\varphi(y) = D_{0y}^{\alpha} g(y)$.

Теорема доказана.

Список литературы
References

1. Нахушев А.М. 2003. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 272с.

Nakhushev A.M. 2003. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit.

2. Учайкин В.В. 2008. Метод дробных производных// Ульяновск: Изд. Артишок, 512 с.

Uchaikin V.V. 2008. Metod drobnyh proizvodnyh [The method of fractional derivatives]. Ulyanovsk. Izd. Artichoke, 512.

3. Геккиева С.Х. 2003. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени. Кандидатская диссертация. Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН.

Gekkieva S.H. 2003. Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh parabolicheskih uravnenii s drobnoi proizvodnoi po vremeni [Boundary value problems for the loaded parabolic equations with fractional time derivative]. Kandidatskaia dissertatciya. Nalchik, Nauchno-issledovatel'skii institute prikladnoi matematiki I avtomatizacii KBNC RAN.

4. Псху А.В. 2005. Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 199 с.

Pskhu A.V. 2005. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka.

5. Нахушева В.А. 2006. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 173 с.

Nahusheva V.A. 2006. Differencial'nye uravneniya matematicheskih modelei nelokal'nyh processov [Differential equations of mathematical models of non-local processes]. Moscow, Nauka.

6. Нахушева З.А. 1990. 1-я и 2-я краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка// Дифференциальные уравнения. Т. 26, № 1 С. 1982-1992.

Nahusheva Z.A. 1990. 1-aya i 2-aya kraevye zadachi v integral'noi postanovke dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poriadka [1st u2 th boundary problems in an integrated setting for a parabolic equation of second order]. Moscow, Differential equations. 26, № 1. 1982-1992.

7. Лосанова Ф.М. 2014. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения с оператором Капуто// Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых "Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики". С. 80-81.

Losanova F.M. 2014. Nelokalnaya kraevaya zadacha dlya nagruzhennogo uravneniya s operatorom Kaputo [Nonlocal boundary value problem for a loaded equation with Caputo operator]. Materialy Vserossiiskoi nauchnoi konferencii molodyh uchenyh "Sovremennye voprosy matematicheskoi fiziki, matematicheskoi biologii i informatiki". 80-81.

8. Лосанова Ф.М. 2010. Нелокальная краевая задача с оператором Капуто// Изв. ВУЗов Северо-Кавказский регион. № 5 (159). С. 22-25.

Losanova F.M. 2010. Nelokalnaya kraevaya zadacha s operatorom Kaputo [A nonlocal boundary value problem with Caputo operator]. Izvestiya VUZov Severo-Kavkazskii region. 5 (159). 22-25.

9. Лосанова Ф.М. 2015. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе// Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. № 2 (11). С. 17-21.

Losanova F.M. 2015. Zadacha s usloviem Samarskogo dlya uravneniya drobnoi diffuzii v polupolose [The problem with the condition of Samara for fractional diffusion equation in the half]. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. Nauki. 2 (11). 17-21.

10. Краснов М.Л. 1975. Интегральные уравнения. М: Наука, 304.

Krasnov M.L. 1975. Integral'nye uravneniya [Integral equations]. Moscow, Nauka. 304.