УДК 517.952

ДВУМЕРНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ, СОДЕРЖАЩИМ СТЕПЕНИ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

TWO-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION WITH NONLINEAR SOURCE CONTAINING POWERS OF FIRST DERIVATIVES

И.В. Рахмелевич
I.V. Rakhmelevich

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Россия, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Nizhny Novgorod State University, 23 Gagarin Ave, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация
Исследовано двумерное неавтономное эллиптическое уравнение с правой частью, содержащей произвольную нелинейность от искомой функции, и степенные нелинейности от ее первых производных. Получены решения этого уравнения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны, автомодельное и сферически симметричное решения. Сформулированы условия существования найденных решений. Исследована зависимость решений от параметров уравнения.

Abstract
There is investigated two-dimensional non-autonomous elliptic equation, right side of which contains the arbitrary nonlinearity on unknown function and power-law nonlinearities on its first derivatives. There are received the solutions of this equation with additive and multiplicative separation of variables, and also solutions of travelling wave type, self-similar and spherically symmetric solutions. The conditions of existence of founded solutions are formulated. The dependence of solutions on parameters of equation is investigated.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, эллиптическое уравнение, обыкновенное дифференциальное уравнение, разделение переменных, степенная нелинейность, решение типа бегущей волны, автомодельное решение.
Keywords: partial differential equation, elliptic equation, ordinary differential equation, separation of variables, power-law nonlinearity, solution of travelling wave type, self-similar solution.

Введение

Исследование дифференциальных уравнений в частных производных со степенными нелинейностями является важной частью современной нелинейной математической физики. Этой проблеме уделяется большое внимание как в справочниках и учебных пособиях [1,2], так и в оригинальных работах [3-7]. При этом особый интерес представляют нелинейные неавтономные уравнения, так как они описывают нелинейные явления в нестационарных и неоднородных системах. Настоящая работа посвящена изучению решений эллиптического уравнения с правой частью, явно зависящей от координат и содержащей произвольную нелинейность от искомой функции и произведение степенных функций от ее первых производных. Анализ решений данного уравнения проводится с помощью метода разделения переменных (РП), который широко используется при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [1-9]. При этом находятся условия существования полученных решений, которым должна удовлетворять правая часть уравнения.

1. Постановка задачи. Простейшие решения

Рассмотрим двумерное уравнение второго порядка эллиптического типа относительно неизвестной функции $u(x,y)$, с правой частью, включающей произвольную нелинейность по искомой функции и степенные нелинейности по ее первым производным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(u)f(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{\beta_2}. \tag{1.1}$$

Здесь β_1,β_2 – параметры уравнения, $g(u), f(x,y)$ – заданные функции (их вид будет уточняться в дальнейшем).

Теорема 1.1.

Пусть выполнены условия:

$$g(u)=g_0\exp(\gamma u),\ f(x,y)=f_1(x)f_2(y). \tag{1.2}$$

1. Тогда при условии, что

$$f_2(y)=f_{20}(2a_2y+b_2)^{-\beta_2}\exp\left[-\gamma(a_2y^2+b_2y)\right] \tag{1.3а}$$

уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$u(x,y)=X(x)+a_2y^2+b_2y+c_2, \tag{1.3б}$$

причём $X(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ):

$$X''(x)=g_1f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\exp\left[\gamma X(x)\right]-2a_2, \tag{1.3в}$$

где коэффициент

$$g_1=g_0f_{20}\exp(\gamma c_2). \tag{1.3г}$$

2. Аналогично, при условии, что

$$f_1(x)=f_{10}(2a_1x+b_1)^{-\beta_1}\exp\left[-\gamma(a_1x^2+b_1x)\right] \tag{1.4а}$$

уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$u(x,y)=a_1x^2+b_1x+c_1+Y(y), \tag{1.4б}$$

причём $Y(y)$ удовлетворяет следующему ОДУ:

$$Y''(y)=g_2f_2(y)\left[Y'(y)\right]^{\beta_2}\exp\left[\gamma Y(y)\right]-2a_1, \tag{1.4в}$$

где коэффициент

$$g_2=g_0f_{10}\exp(\gamma c_1). \tag{1.4г}$$

Доказательство.

1. Согласно известной схеме аддитивного РП [1,2], решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(x,y)=X(x)+Y(y). \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в уравнение (1.1) и учитывая условия (1.2), получаем:

$$X''(x)+Y''(y)=g_0\varphi_1(x)\varphi_2(y), \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_1(x)=f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\exp\left[\gamma X(x)\right],\quad \varphi_2(y)=f_2(y)\left[Y'(y)\right]^{\beta_2}\exp\left[\gamma Y(y)\right]. \tag{1.6а}$$

Дифференцируя уравнение (1.6) по x, можно привести его к виду:

$$\frac{X'''(x)}{\varphi_1'(x)}=g_0\varphi_2(y). \tag{1.7}$$

Так как левая часть (1.7) зависит только от x, а правая часть – только от y, то это уравнение можно удовлетворить, только если обе его части равны постоянной, откуда следует, что $\varphi_2(y) = \tilde{a}_2 = \mathrm{const}$. Подставляя это выражение в (1.6), получаем:

$$Y''(y) = g_1\varphi_1(x) - X''(x), \qquad (1.8)$$

где $g_1 = g_0\tilde{a}_2$. Аналогично (1.7), левая и правая части уравнения (1.8) зависят от разных-переменных, и поэтому должны быть равны некоторой постоянной. Отсюда, с учетом (1.6а), следует, что $X(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$X''(x) - g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\exp\left[\gamma X(x)\right] = -2a_2, \qquad (1.9)$$

а $Y(y)$ – переопределенной системе из двух уравнений:

$$\left[Y'(y)\right]^{\beta_2}\exp\left[\gamma Y(y)\right] = \tilde{a}_2/f_2(y), \quad Y''(y) = 2a_2. \qquad (1.10)$$

Из второго уравнения системы (1.10) находим, что $Y(y) = a_2y^2 + b_2y + c_2$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.10), получаем функцию $f_2(y)$:

$$f_2(y) = f_{20}(2a_2y + b_2)^{-\beta_2}\exp\left[-\gamma(a_2y^2 + b_2y)\right], \qquad (1.11)$$

где $f_{20} = \tilde{a}_2\exp(-\gamma c_2)$. Выражая отсюда $\tilde{a}_2$, получаем формулу (1.3г) для коэффициента g_1. Из (1.9) и (1.11) следует, что первая часть теоремы доказана.

2. При доказательстве второй части теоремы уравнение (1.6) необходимо продифференцировать по y, и затем применить процедуру разделения переменных. Проводя рассуждения, аналогичные первой части доказательства, получаем уравнение для $Y(y)$ и переопределенную систему уравнений для $X(x)$:

$$Y''(y) - g_2 f_2(y)\left[Y'(y)\right]^{\beta_2}\exp\left[\gamma Y(y)\right] = -2a_1, \qquad (1.12)$$

$$\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\exp\left[\gamma X(x)\right] = \tilde{a}_1/f_1(x), \quad X''(x) = 2a_1. \qquad (1.13)$$

Из второго уравнения системы (1.13) находим, что $X(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (1.13), получаем функцию $f_1(x)$:

$$f_1(x) = f_{10}(2a_1x + b_1)^{-\beta_1}\exp\left[-\gamma(a_1x^2 + b_1x)\right], \qquad (1.14)$$

где $f_{10} = \tilde{a}_1\exp(-\gamma c_1)$. Выражая отсюда постоянную $\tilde{a}_1$, получаем формулу (1.4г) для коэффициента g_2. Из (1.12) и (1.14) следует, что вторая часть теоремы доказана.

Пример.

Пусть $\gamma = a_2 = 0$, $f_{20} = b_2^{\beta_2}$, $f_1(x) \equiv 1$. Тогда, из (1.2) и (1.3а) $g(u) \equiv g_0$, $f(x,y) \equiv 1$, т.е. в условиях данного примера уравнение (1.1) автономное и явно не зависит от искомой функции. Решение, определяемое теоремой 1.1, имеет вид $u(x,y) = X(x) + b_2y + c_2$, где $X(x)$ определяется выражениями:

$$X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{g_1(2-\beta_1)}\left(g_1(1-\beta_1)x + c_1\right)^{\frac{2-\beta_1}{1-\beta_1}} + X_0 & \text{при} \quad \beta_1 \neq 1, \beta_1 \neq 2 \\ a_1\exp(g_1x) + X_0 & \text{при} \quad \beta_1 = 1 \\ -\dfrac{1}{g_1}\ln\left|x - x_0\right| + X_0 & \text{при} \quad \beta_1 = 2 \end{cases}$$

Здесь a_1, c_1, x_0, X_0 - произвольные постоянные.

Теорема 1.2.

Пусть выполнены условия:

$$g(u) = g_0 u^{\gamma}\,,\ f(x,y) = f_1(x) f_2(y)\,. \tag{1.15}$$

1. Тогда, при условии что

$$f_2(y) = f_{20}(y - y_0)^{1-\beta_1-\gamma} \tag{1.16а}$$

уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x,y) = b_2 X(x)(y - y_0)\,, \tag{1.16б}$$

где $X(x)$ *является решением ОДУ:*

$$X''(x) = g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2} \tag{1.16в}$$

Здесь b_2, y_0 *-произвольные постоянные, а* g_1 *определяется выражением:*

$$g_1 = g_0 f_{20} b_2^{\gamma+\beta_\Sigma-1}\,. \tag{1.16г}$$

Здесь и всюду далее используется обозначение $\beta_\Sigma = \beta_1 + \beta_2$.

2. *При условии что*

$$f_2(y) = f_{20}(c_1 \operatorname{sh}(\lambda y) + c_2 \operatorname{ch}(\lambda y))^{-\beta_2}(c_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + c_2 \operatorname{sh}(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}\,. \tag{1.17а}$$

уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x,y) = X(x)(c_1 \operatorname{ch}(\lambda y) + c_2 \operatorname{sh}(\lambda y))\,, \tag{1.17б}$$

где $X(x)$ *является решением ОДУ:*

$$X''(x) = g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2} - \lambda^2 X(x)\,, \tag{1.17в}$$

а коэффициент g_1 *определяется выражением:*

$$g_1 = g_0 f_{20} \lambda^{\beta_2} \tag{1.17г}$$

3. *При условии что*

$$f_2(y) = f_{20}(c_2 \cos(\lambda y) - c_1 \sin(\lambda y))^{-\beta_2}(c_1 \cos(\lambda y) + c_2 \sin(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}\,. \tag{1.18а}$$

уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x,y) = X(x)(c_1 \cos(\lambda y) + c_2 \sin(\lambda y))\,, \tag{1.18б}$$

где $X(x)$ *является решением ОДУ:*

$$X''(x) = g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2} + \lambda^2 X(x)\,, \tag{1.18в}$$

причем коэффициент g_1 *определяется выражением* (1.17г).

Доказательство.

1. Используя мультипликативное РП [1,2], решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(x,y) = X(x) Y(y)\,. \tag{1.19}$$

Подставляя (1.19) в уравнение (1.1) и учитывая условия (1.15), получаем:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = g_0 \psi_1(x) \psi_2(y)\,, \tag{1.20}$$

где

$$\psi_1(x) = f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2-1}, \quad \psi_2(y) = f_2(y)\left[Y'(y)\right]^{\beta_2}\left[Y(y)\right]^{\gamma+\beta_1-1}. \tag{1.20а}$$

Аналогично доказательству теоремы 1.1, в результате дифференцирования (1.20) по x, получаем:

$$\frac{1}{\psi_1'(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{X''(x)}{X(x)}\right)=g_0\psi_2(y). \tag{1.21}$$

Правая и левая части уравнения (1.21) зависят от разных переменных, откуда следует, что

$$\psi_2(y)=\widetilde{a}_2=\text{const}. \tag{1.21a}$$

Подставляя выражение (1.21a) в (1.20), получаем:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=g_1\psi_1(x)-\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.22}$$

Здесь $g_1=g_0\widetilde{a}_2$. Разделяя переменные в (1.22) и учитывая (1.20a), находим уравнение для $X(x)$, и переопределенную систему из двух уравнений для $Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}-g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2-1}=-a, \tag{1.23}$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=a,\quad \left[Y'(y)\right]^{\beta_2}\left[Y(y)\right]^{\gamma+\beta_1-1}=\frac{\widetilde{a}_2}{f_2(y)}. \tag{1.24}$$

При анализе системы (1.24) рассмотрим возможные частные случаи.

Случай а): $a=0$. Тогда из первого уравнения системы (1.24) находим, что

$$Y(y)=b_2(y-y_0). \tag{1.25}$$

Подставляя (1.25) во второе уравнение системы (1.24), получаем выражение для $f_2(y)$:

$$f_2(y)=\widetilde{a}_2 b_2^{1-\gamma-\beta_\Sigma}(y-y_0)^{1-\gamma-\beta_1}. \tag{1.26}$$

При этом уравнение (1.23) упрощается следующим образом:

$$X''(x)=g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2}. \tag{1.27}$$

Для нахождения коэффициента g_1 сравним соотношения (1.26) и (1.16a), откуда $\widetilde{a}_2=f_{20}b_2^{\gamma+\beta_\Sigma-1}$. Далее, учитывая, что $g_1=g_0\widetilde{a}_2$, получаем выражение (1.16г).

Случай б): $a=\lambda^2>0$. Тогда из первого уравнения системы (1.24) получаем, что

$$Y(y)=c_1\operatorname{ch}(\lambda y)+c_2\operatorname{sh}(\lambda y). \tag{1.28}$$

Аналогично предыдущему случаю, находим $f_2(y)$, подставив (1.28) во второе уравнение (1.24):

$$f_2(y)=\widetilde{a}_2\lambda^{-\beta_2}(c_1\operatorname{sh}(\lambda y)+c_2\operatorname{ch}(\lambda y))^{-\beta_2}(c_1\operatorname{ch}(\lambda y)+c_2\operatorname{sh}(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}. \tag{1.29}$$

Случай в): $a=-\lambda^2<0$. Тогда из первого уравнения системы (1.24)

$$Y(y)=c_1\cos(\lambda y)+c_2\sin(\lambda y), \tag{1.30}$$

а функция $f_2(y)$ определяется выражением:

$$f_2(y)=\widetilde{a}_2\lambda^{-\beta_2}(c_2\cos(\lambda y)-c_1\sin(\lambda y))^{-\beta_2}(c_1\cos(\lambda y)+c_2\sin(\lambda y))^{1-\gamma-\beta_1}. \tag{1.31}$$

Из (1.20) получаем уравнение относительно $X(x)$ для случаев б), в) :

$$X''(x)=g_1 f_1(x)\left[X'(x)\right]^{\beta_1}\left[X(x)\right]^{\gamma+\beta_2}\mp\lambda^2 X(x), \tag{1.32}$$

где верхний знак относится к случаю б), а нижний - к случаю в). Выражение (1.17г) для g_1 находится путем рассуждений, аналогичных проведенным при анализе случая а).

Таким образом, в результате приведенных рассуждений в трех рассмотренных случаях получены выражения (1.25), (1.28), (1.30) для $Y(y)$, уравнения (1.27), (1.32) для

$X(x)$, и выражения (1.26), (1.29), (1.31) для $f_2(y)$, при которых найденное решение существует. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично теореме 1.2, можно сформулировать утверждение о решениях уравнения (1.1), которые получаются из (1.16), (1.17), (1.18) путем замены $x \leftrightarrow y$, $X \leftrightarrow Y$, $f_1 \leftrightarrow f_2$, $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$, а также соответствующие условия существования этих решений. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 1.2.

2. Функциональное разделение переменных

В данном разделе рассмотрим решения уравнения (1.1), которые могут быть получены методом функционального разделения переменных.

Теорема 2.1.

Пусть $f(x,y)=F(z)$, $z=c_1x+c_2y$, где F – произвольная функция, c_1,c_2 - некоторые постоянные. Тогда уравнение (1.1) имеет решение типа бегущей волны $u(x,y)=U(z)$, причем функция $U(z)$ является решением следующего ОДУ:

$$U''(z)=Cg\big(U(z)\big)\big[U'(z)\big]^{\beta_\Sigma}F(z) \tag{2.1}$$

где $C=\dfrac{c_1^{\beta_1}c_2^{\beta_2}}{c_1^2+c_2^2}$.

Доказательство.

Используя известный метод функционального РП [1,2], решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(x,y)=U(z), \quad z=X(x)+Y(y) \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (1.1), после дифференцирования и элементарных преобразований получаем:

$$\frac{U''(z)}{U'(z)}+\frac{X''(x)+Y''(y)}{[X'(x)]^2+[Y'(y)]^2}=g\big(U(z)\big)\big[U'(z)\big]^{\beta_\Sigma-1}\frac{f(x,y)[X'(x)]^{\beta_1}[Y'(y)]^{\beta_2}}{[X'(x)]^2+[Y'(y)]^2} \tag{2.3}$$

Положим $X(x)=c_1x$, $Y(y)=c_2y$. Подставив эти выражения в (2.3) и учитывая, что по условию теоремы $f(x,y)=F(z)$, приходим к уравнению (2.1) относительно $U(z)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1.

Если $f(x,y)\equiv 1$, то решение уравнения (1.1) типа бегущей волны может быть представлено в неявном виде следующим образом:

1.Если $\beta_\Sigma \neq 1, \beta_\Sigma \neq 2$, то

$$c_1x+c_2y-z_0=\int\big[\nu(CG(u)+A)\big]^{-\frac{1}{\nu}}du\,. \tag{2.4а}$$

2.Если $\beta_\Sigma = 2$, то

$$c_1x+c_2y-z_0=A\int\exp(-CG(u))du\,. \tag{2.4б}$$

3.Если $\beta_\Sigma = 1$, то

$$c_1x+c_2y-z_0=\int\frac{du}{CG(u)+A}, \tag{2.4в}$$

где c_1,c_2,z_0,A - произвольные постоянные, $\nu=2-\beta_\Sigma$; $G(u)$ определяется выражением:

$$G(u)=\int g(u)du\,. \tag{2.4г}$$

Доказательство.

Поскольку по условию $F(z)\equiv 1$, то уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$U''(z)\left[U'(z)\right]^{1-\beta_\Sigma}-C\frac{dG(U(z))}{dz}=0. \qquad (2.5)$$

При условиях $\beta_\Sigma\neq 1, \beta_\Sigma\neq 2$ уравнение (2.5) в результате интегрирования сводится к уравнению первого порядка:

$$\left[U'(z)\right]^{\nu}=\nu(CG(U(z))+A). \qquad (2.6)$$

В результате решения уравнения (2.6) получаем:

$$z-z_0=\int\left[\nu(CG(U)+A)\right]^{-\frac{1}{\nu}}dU. \qquad (2.7)$$

Подставив в (2.7) выражение $z=c_1x+c_2y$ и заменив $U\to u$, получаем для данного случая решение (2.4а). Проводя рассуждения, аналогичные представленным выше, для случаев $\beta_\Sigma=2$ и $\beta_\Sigma=1$, получаем решения (2.4б) и (2.4в) соответственно. Доказательство закончено.

Теорема 2.2.

Пусть $f(x,y)=b_0x^{-\beta_1}y^{-\beta_2}F(z)$, $\quad z=x^2+y^2$, *где* F *– произвольная функция. Тогда уравнение (1.1) имеет решение* $u(x,y)=U(z)$, *причем функция* $U(z)$ *является решением ОДУ:*

$$\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)=bg(U(z))\left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma}F(z), \qquad (2.8)$$

где $b=b_0\cdot 2^{\beta_\Sigma-2}$. *В частности, если выполнены условия* $F(z)\equiv 1$, $\beta_\Sigma=1$, *то решение уравнения (1.1) можно представить в неявном виде:*

$$x^2+y^2=c_0\exp\left(\int\frac{du}{bG(u)+a_0}\right) \qquad (2.9)$$

где c_0, a_0 *– произвольные постоянные.*

Доказательство.

Аналогично доказательству теоремы 2.1, используем метод функционального РП. Положим $X(x)=x^2$, $Y(y)=y^2$. Подставляя эти выражения в (2.3), и учитывая выражение для $f(x,y)$, получаем:

$$\frac{U''(z)}{U'(z)}+\frac{1}{z}=\frac{b}{z}g(U(z))\left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma-1}F(z). \qquad (2.10)$$

Умножив (2.10) на z и учитывая, что $\frac{d}{dz}\left(zU'(z)\right)=zU''(z)+U'(z)$, приходим к уравнению (2.8).

Предположим теперь, что выполнены условия $F(z)\equiv 1$, $\beta_\Sigma=1$. Тогда (2.8) можно представить так:

$$\frac{d}{dz}\left(zU'(z)-bG(U(z))\right)=0. \qquad (2.11)$$

Понижая порядок уравнения (2.11) и решая полученное уравнение первого порядка, находим:

$$z=c_0\exp\left(\int\frac{dU}{bG(U)+a_0}\right), \qquad (2.12)$$

где c_0, a_0 – произвольные постоянные. Подставляя в (2.12) $z = x^2 + y^2$ и заменяя $U \to u$, получаем решение в форме (2.9). Теорема доказана.

Теорема 2.3.

Пусть

$$f(x,y) = (c_1 + 2ax)^{-\beta_1}(c_2 - 2ay)^{-\beta_2}\left[(c_1 + 2ax)^2 + (c_2 - 2ay)^2\right]F(z), \tag{2.13а}$$

$$z = a\left(x^2 - y^2\right) + c_1 x + c_2 y + z_0, \tag{2.13б}$$

где F *– произвольная функция. Тогда уравнение (1.1) имеет решение* $u(x,y) = U(z)$, *причем функция* $U(z)$ *является решением ОДУ:*

$$U''(z) = g(U(z))[U'(z)]^{\beta_\Sigma} F(z). \tag{2.14}$$

Доказательство.

Аналогично доказательству теорем 2.1, 2.2, используем метод функционального РП. Положим $X(x) = ax^2 + c_1 x + x_0$, $Y(y) = -ay^2 + c_2 y + y_0$. Подставляя эти выражения в (2.3), и учитывая выражение для $f(x,y)$, получаем уравнение (2.14). Теорема доказана.

Теорема 2.4.

1. Пусть

$$f(x,y) = x^{-\beta_2} y^{-\beta_1}\left(x^2 + y^2\right)F(z), \quad z = xy, \tag{2.15}$$

где F *– произвольная функция. Тогда уравнение (1.1) имеет решение* $u(x,y) = U(z)$, *причем функция* $U(z)$ *является решением уравнения (2.14).*

Доказательство.

Будем искать автомодельное решение уравнения (1.1), которое имеет вид:

$$u(x,y) = x^{\alpha} U(z), \quad z = yx^{\sigma}, \tag{2.16}$$

где α, σ – параметры, которые должны быть определены ниже. Подставляя (2.16) в (1.1), получаем:

$$x^{\alpha+2\sigma}\left(1 + \frac{\sigma^2 y^2}{x^2}\right)U''(z) + \sigma(2\alpha + \sigma - 1)yx^{\alpha+\sigma-2}U'(z) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}U(z) =$$

$$= g\left(x^{\alpha}U(z)\right)f(x,y)\left\{\sigma yx^{\alpha+\sigma-1}U'(z) + \alpha x^{\alpha-1}U(z)\right\}^{\beta_1}\left\{x^{\alpha+\sigma}U'(z)\right\}^{\beta_2}. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) допускает разделение переменных только в том случае, если $\alpha = 0, \sigma = 1$; тогда z определяется второй формулой (2.15). При указанных значениях параметров (2.17) сводится к виду:

$$\left(x^2 + y^2\right)U''(z) = g(U(z))[U'(z)]^{\beta_\Sigma} f(x,y) y^{\beta_1} x^{\beta_2}. \tag{2.18}$$

Из (2.18) с учетом (2.15) следует, что функция $U(z)$ должна удовлетворять уравнению (2.14). Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследовано двумерное уравнение второго порядка эллиптического типа с правой частью, явно зависящей от координат, и содержащей произвольную нелинейность от искомой функции и степенные нелинейности от ее первых производных. Получены решения данного уравнения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, а также решения типа бегущей волны, автомодельное и сферически симметричное решения. Сформулированы условия существования полученных решений, которым должна удовлетворять правая часть уравнения. Результаты, полученные в данной работе, могут быть обобщены для уравнений более высокой размерности и с более сложными дифференциальными операторами.

Список литературы
References

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. 2002. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М., Физматлит, 432.

Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. 2012. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.

2. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. 2005. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 256.

Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., Zhurov A. I. 2005. Metody resheniya nelineynyh uravneniy matematicheskoy fiziki i mehaniki. M., Fizmatlit (In Russian).

3. Рахмелевич И.В. 2015. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 1: 12-19.

Rakhmelevich I.V. 2015. O dvumernyh hyperbolicheskih uravneniyah so stepennoy nelineynostiu po proizvodnym. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, №1: 12-19. (In Russian).

4. Рахмелевич И.В. 2015. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, № 3: 18-25.

Rakhmelevich I.V. 2015. O nekotorykh novykh resheniyakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynost\`yami. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, No 3: 18-25 (in Russian).

5. Рахмелевич И.В. 2016. О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями. Владикавказский математический журнал., 18 (4): 41-49.

Rakhmelevich I.V. 2016. O resheniyakh mnogomernogo differentsialnogo uravneniya so smeshannoy starshey chastnoy proizvodnoy i stepennymi nelineynost\`yami. Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal. 18(4): 41-49 (in Russian).

6. Рахмелевич И.В. 2016. О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных. Известия вузов. Математика, № 4: 57-67.

Rakhmelevich I.V. 2016. Reduction of multidimensional first order equations with multi-homogeneous function of derivatives. Russian Mathematics, 60(4): 47-55.

7. Рахмелевич И.В. 2017. О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным. Уфимский математический журнал, 9 (1): 98-108.

Rakhmelevich I.V. 2016. On multidimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives. Ufa Mathematical Journal, 8(4): 98-108.

8. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. 1993. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. Journal of Physics A., 26: 1901-1913.

9. Zhdanov R.Z. 1994. Separation of variables in the non-linear wave equation. Journal of Physics A., 27: L291-L297.