УДК 517.76

АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВ ГРЕЯ ТЕНЗОРА РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ ПЕРВОГО РОДА

ANALOGS IDENTITIES GRAY RIEMANN CURVATURE TENSOR OF SPECIAL GENERALIZED MANIFOLDS KENMOTSU FIRST KIND

А.Р. Рустанов, О.С. Ищенко
A.R. Rustanov, O.S. Ishchenko

Московский педагогический государственный университет,
119991, Россия, Москва, ул. Малая Пироговская, 1/1

Moscow state pedagogical university,
119991, Russia, Moscow, Malaya Pirogovskaya St., 1/1

E-mail: olga.ishchenko.88@yandex.ru, aligadzhi@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматриваются специальные обобщенные многообразия Кенмоцу первого рода, получена полная группа структурных уравнений, подсчитаны компоненты тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G-структуры, доказано, всякое SGK-многообразие I рода является либо многообразием Кенмоцу, либо пятимерным собственным (т.е. не многообразием Кенмоцу) SGK-многообразие I рода. Рассмотрены контактные аналоги тождеств Грея для данного класса многообразий. Доказано, что SGK-многообразие I рода является CR_2- или CR_3-многообразием тогда и только тогда, когда оно является многообразием Кенмоцу, а SGK-многообразие I рода, являющееся CR_1-многообразием является трехмерным многообразием Кенмоцу.

Resume. In this paper, we consider special generalized manifolds Kenmotsu first kind, received the full group of structural equations, calculated components of the Riemann-Christoffel tensor in the space of the associated G-structure, proved every SGK-manifold of type I is a manifold Kenmotsu or five-dimensional proper (i.e. not a manifold Kenmotsu) SGK-manifold of type I. We consider analogues contact Gray identities for this class of manifolds. It is proved that SGK-manifold type I is CR_2- or CR_3-manifold if and only if it is a Kenmotsu manifold and SGK-manifold of type I, which is CR_1-manifold is a three-dimensional manifold Kenmotsu.

Ключевые слова: специальные обобщенные многообразия Кенмоцу первого рода, почти контактные многообразия, тензор римановой кривизны, CR_i-многообразием, тождества Грея.

Keywords: special generalized manifolds Kenmotsu first kind, almost contact manifolds, the Riemann curvature tensor, CR_i-manifold, identities Gray.

Введение

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, \eta, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти контактное метрическое многообразие.

В 1972 г. Кенмоцу [1] ввел в рассмотрение новый класс почти контактных метрических структур, характеризуемых тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = -\eta(Y)\Phi X - \langle X, \Phi Y\rangle\xi; X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{1}$$

Эти структуры являются нормальными, но не являются ни сасакиевыми структурами, ни косимплектическими структурами [2]. Такие структуры возникают на нечетномерных пространствах Лобачевского кривизны (-1). Структуры Кенмоцу получаются с помощью конструкции косого (warped) произведения $\boldsymbol{C}^n \times_f \boldsymbol{R}$ в смысле Бишопа и О'Нейла [3] комплексного евклидова пространства и вещественной прямой, где $f(t) = ce^t$ (см. [1]). Более того, всякое конформно-плоское многообразие Кенмоцу, а также всякое локально-симметрическое многообразие Кенмоцу локально эквивалентно многообразию Кенмоцу такого типа [1]. В данной работе мы придерживаемся терминологии принятой в монографии [2].

Из тождества (1) легко следует, что [2]

$$\nabla_X(\eta)Y = \langle X, Y\rangle - \eta(Y)\eta(X); X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{2}$$

В самом деле, применяя оператор ∇_X к тождеству $\Phi^2 = -id + \eta\otimes\xi$, получим, что $\nabla_X(\Phi)(\Phi Y) + \Phi(\nabla_X(\Phi)Y) = \nabla_X(\eta)(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi$, или, с учетом (1) $\langle\Phi X, \Phi Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi^2 X = \nabla_X(\eta)(Y)\xi +$

$\eta(Y)\nabla_X\xi$. Поскольку $\langle\nabla_X\xi,\xi\rangle = \frac{1}{2}X(\langle\xi,\xi\rangle) = 0$, имеем, что $\nabla_X\xi \in \mathcal{L}$, и, поскольку $\mathcal{L}\cap\mathcal{M} = \{0\}$, $\nabla_X(\eta)Y = \langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(Y)\eta(X); X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Положив в тождестве (1) $Y = X$, получим

$$\nabla_X(\Phi)X = -\eta(X)\Phi X; X \in \mathcal{X}(M). \tag{3}$$

В полученном тождестве сделаем замену $X \to X + Y$ (поляризация по X), тогда получим:

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y; X, Y \in \mathcal{X}(M). \tag{4}$$

Определение 1 [4]. Класс почти контактных метрических многообразий, характеризуемых тождеством (4), называется *обобщенными многообразиями Кенмоцу* (короче, *GK-многообразиями*).

Тождество (4) на пространстве расслоения реперов над M примет вид:

$$\Phi^i_{j,k} + \Phi^i_{k,j} = -\eta_k\Phi^i_j - \eta_j\Phi^i_k. \tag{5}$$

Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G-структуры, получим:

Предложение 1. Компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма GK-структуры на пространстве присоединенной G-структуры удовлетворяют следующим соотношениям:

1) $\Phi^0_{0,i} = \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = \Phi^a_{\hat{b},0} = 0$; 2) $\Phi^0_{i,0} = \Phi^i_{0,0} = 0$; 3) $\Phi^b_{0,a} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$; 4) $\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = \Phi^a_{\hat{b},c} = 0$; 5) $\Phi^{\hat{a}}_{0,b} + \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = 0$; 6) $\Phi^a_{0,\hat{b}} + \Phi^a_{\hat{b},0} = 0$; 7) $\Phi^0_{a,b} + \Phi^0_{b,a} = 0$; 8) $\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},\hat{a}} = 0$; 9) $\Phi^0_{a,\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},a} = 0$; 10) $\Phi^{\hat{c}}_{a,b} + \Phi^{\hat{c}}_{b,a} = 0$; 11) $\Phi^c_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^c_{\hat{b},\hat{a}} = 0$.

Предложение 2. Интегральные кривые векторного поля ξ GK-многообразия являются геодезическими.

Доказательство: так как $0 = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) = \xi g(X,\xi) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X\xi, \xi) = g(X, \nabla_\xi\xi)$, где $\mathcal{L}_\xi$ – производная Ли в направление вектора ξ, то интегральные кривые векторного поля ξ являются геодезическими.

Согласно Предложения 1 первая группа структурных уравнений GK-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры примет вид:

$$1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b + F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\ 2)\ d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b + C^{abc}\omega_b\wedge\omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega\wedge\omega_b + \delta^a_b\omega\wedge\omega^b;\ 3)\ d\omega_a = \theta^b_a\wedge\omega_b + C_{abc}\omega^b\wedge\omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega\wedge\omega^b + \delta^b_a\omega\wedge\omega_b, \tag{6}$$

где

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}};\ C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c};\ C^{[abc]} = C^{abc};\ C_{[abc]} = C_{abc};\ \overline{C^{abc}} = C_{abc};\ F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}};\ F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\ F^{ab} + F^{ba} = 0;\ F_{ab} + F_{ba} = 0;\ \overline{F^{ab}} = F_{ab}. \tag{7}$$

Из (6) следует следующее Предложение.

Предложение 3 [4]. Если $C^{abc} = C_{abc} = 0$ и $F^{ab} = F_{ab} = 0$, то GK-многообразие является многообразием Кенмоцу.

Предложение 3 дает примеры GK-многообразий.

Специальные обобщенные многообразия Кенмоцу первого рода

Наиболее интересные геометрические свойства почти контактных метрических многообразий появляются, когда применяются дополнительные ограничения. Поэтому представляет интерес изучить частные случаи обобщенных многообразий Кенмоцу. В работе [4] выделены два типа специальных обобщенных многообразий Кенмоцу.

В данной работе мы рассмотрим специальный тип GK-многообразий, выделенных в работе [4] и названный SGK-многообразиями I рода. Напомним это определение.

Определение 1 [4]. GK-многообразия для которых $C^{abc} = C_{abc} = 0$ называются SGK-многообразиями I рода.

Замечание. Согласно Предложения 3 SGK-многообразия I рода, для которых $F^{ab} = F_{ab} = 0$ являются многообразиями Кенмоцу.

Тогда первая группа структурных уравнений SGK-многообразий I рода примет вид [4]:

$$1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a\wedge\omega^b + F^{ab}\omega_a\wedge\omega_b;\ 2)\ d\omega^a = -\theta^a_b\wedge\omega^b - \frac{3}{2}F^{ab}\omega\wedge\omega_b + \delta^a_b\omega\wedge\omega^b;\ 3)\ d\omega_a = \theta^b_a\wedge\omega_b - \frac{3}{2}F_{ab}\omega\wedge\omega^b + \delta^b_a\omega\wedge\omega_b, \tag{8}$$

где

$$F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}};\quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\quad F^{ab} + F^{ba} = 0;\quad F_{ab} + F_{ba} = 0;\quad \overline{F^{ab}} = F_{ab} \tag{9}$$

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений (8) дает следующую теорему.

Теорема 1. Полная группа структурных уравнений GK-многообразий I рода на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид:

$$1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b;\ 2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b - \tfrac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta^a_b\omega \wedge \omega^b;\ 3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b - \tfrac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta^b_a\omega \wedge \omega_b;\ 4)\ d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + \left(A^{ad}_{bc} - \tfrac{3}{2}F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c \wedge \omega_d - \delta^a_b F_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \delta^a_b F^{cd}\omega_c \wedge \omega_d;\ 5)\ dF^{ab} + F^{cb}\theta^a_c + F^{ac}\theta^b_c = -2F^{ab}\omega;\ 6)\ dF_{ab} - F_{cb}\theta^c_a - F_{ac}\theta^c_b = -2F_{ab}\omega. \tag{10}$$

При этом имеют место следующие тождества:

$$1)\ F^{a[b}F^{cd]} = 0;\ 2)\ F_{a[b}F_{cd]} = 0;\ 3)\ \delta^{[b}_a F^{cd]} = 0;\ 4)\ \delta^a_{[b}F_{cd]} = 0. \tag{11}$$

Теорема 2. Всякое SGK-многообразие I рода является либо многообразием Кенмоцу, либо пятимерным собственным (т.е. не многообразием Кенмоцу) SGK-многообразием I рода.

Доказательство. Рассмотрим равенство (11:3), т.е. $\delta^b_a F^{cd} + \delta^c_a F^{db} + \delta^d_a F^{bc} = 0$. Свернем полученное равенство по индексам a и b, тогда получим:

$$(n-2)F^{bc} = 0. \tag{12}$$

Если $F^{bc} = 0$, то согласно Предложения 3 многообразие M является многообразием Кенмоцу. Если же $F^{bc} \neq 0$, то $n = 2$, т.е. $dimM = 5$. □

Пусть M – SGK-многообразие I рода. Вычислим компоненты его тензора Римана-Кристоффеля на пространстве присоединенной G-структуры. Для тензорных компонент формы римановой связности имеем следующие соотношения на пространстве присоединенной G-структуры [1]:

$$1)\ \theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},i}\omega^i;\ 2)\ \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,i}\omega^i;\ 3)\ \theta^a_0 = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,i}\omega^i;\ 4)\ \theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,i}\omega^i;$$
$$5)\ \theta^0_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,i}\omega^i;\ 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},i}\omega^i;\ 7)\ \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0;\ 8)\ \theta^0_0 = 0. \tag{13}$$

Соотношения (13), с учетом Предложения 2, для SGK-многообразий I рода на пространстве присоединенной G-структуры примут вид:

$$1)\ \theta^a_{\hat{b}} = \tfrac{1}{2}F^{ab}\omega;\ 2)\ \theta^{\hat{a}}_b = \tfrac{1}{2}F_{ab}\omega;\ 3)\ \theta^a_0 = \delta^a_b\omega^b - F^{ab}\omega_b;\ 4)\ \theta^{\hat{a}}_0 = \delta^b_a\omega_b - F_{ab}\omega^b;\ 5)\ \theta^0_a = F_{ab}\omega^b - \delta^b_a\omega_b;\ 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = F^{ab}\omega_b - \delta^a_b\omega^b. \tag{14}$$

Дифференциальное продолжение уравнений (14) дает:

$$1)\ d\theta^a_{\hat{b}} = -\frac{1}{2}F^{cb}\theta^a_c \wedge \omega - \frac{1}{2}F^{ac}\theta^b_c \wedge \omega + \frac{1}{2}F^{ab}F_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}F^{ab}F^{cd}\omega_c \wedge \omega_d;$$
$$2)\ d\theta^{\hat{a}}_b = \frac{1}{2}F_{cb}\theta^c_a \wedge \omega + \frac{1}{2}F_{ac}\theta^c_b \wedge \omega + \frac{1}{2}F_{ab}F_{cd}\omega^c \wedge \omega^d + \frac{1}{2}F_{ab}F^{cd}\omega_c \wedge \omega_d;$$
$$3)\ d\theta^a_0 = -\theta^a_b \wedge \omega^b + F^{cb}\theta^a_c \wedge \omega_b + \left(\frac{3}{2}F^{ac}F_{cb} + \delta^a_b\right)\omega \wedge \omega^b - \frac{1}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b;$$
$$4)\ d\theta^{\hat{a}}_0 = \theta^b_a \wedge \omega_b - F_{cb}\theta^c_a \wedge \omega^b - \frac{1}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \left(\frac{3}{2}F_{ac}F^{cb} + \delta^b_a\right)\omega \wedge \omega_b;$$
$$5)\ d\theta^0_a = -\theta^b_a \wedge \omega_b + F_{cb}\theta^c_a \wedge \omega^b + \frac{1}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b - \left(\frac{3}{2}F_{ac}F^{cb} + \delta^b_a\right)\omega \wedge \omega_b;$$
$$6)\ d\theta^0_{\hat{a}} = \theta^a_b \wedge \omega^b - F^{cb}\theta^a_c \wedge \omega_b - \left(\tfrac{3}{2}F^{ac}F_{cb} + \delta^a_b\right)\omega \wedge \omega^b + \tfrac{1}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b. \tag{15}$$

Вторая группа структурных уравнений римановой связности имеет вид [1]:

$$d\theta^i_j = -\theta^i_k \wedge \theta^i_j + \tfrac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \tag{16}$$

где $\{R^i_{jkl}\} \subset C^\infty(BM)$ – компоненты тензора Римана-Кристоффеля. Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G-структуры с учетом (14), получим:

$$1)\ d\theta^a_{\hat{b}} = -\tfrac{1}{2}F^{cb}\theta^a_c \wedge \omega - \tfrac{1}{2}F^{ac}\theta^b_c \wedge \omega + \left(\tfrac{1}{2}R^a_{\hat{b}cd} + \delta^a_{[c}\delta^b_{d]}\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(R^a_{\hat{b}c\hat{d}} + \delta^b_c F^{ad} - \delta^a_c F^{bd}\right)\omega^c \wedge \omega_d + \left(\tfrac{1}{2}R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} + F^{a[c}F^{|b|d]}\right)\omega_c \wedge \omega_d + R^a_{\hat{b}0c}\omega \wedge \omega^c + R^a_{\hat{b}0\hat{c}}\omega \wedge \omega_c;$$

$$2)\ d\theta^{\hat{a}}_b = \tfrac{1}{2}F_{cb}\theta^c_a \wedge \omega + \tfrac{1}{2}F_{ac}\theta^c_b \wedge \omega + \left(\tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{bcd} + F_{a[c}F_{|b|d]}\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(R^{\hat{a}}_{bc\hat{d}} + \delta^d_a F_{bc} - \delta^d_b F_{ac}\right)\omega^c \wedge \omega_d + \left(\tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} + \delta^{[c}_a\delta^{d]}_b\right)\omega_c \wedge \omega_d + R^{\hat{a}}_{b0c}\omega \wedge \omega^c + R^{\hat{a}}_{b0\hat{c}}\omega \wedge \omega_c;$$

$$3)\ d\theta^a_0 = -\theta^a_b \wedge \omega^b + F^{cb}\theta^a_c \wedge \omega_b + \tfrac{1}{2}R^a_{0bc}\omega^b \wedge \omega^c + R^a_{0b\hat{c}}\omega^b \wedge \omega_c + \tfrac{1}{2}R^a_{0\hat{b}\hat{c}}\omega_b \wedge \omega_c + \left(R^a_{00b} + \tfrac{1}{2}F^{ac}F_{cb}\right)\omega \wedge \omega^b + \left(R^a_{00\hat{b}} - \tfrac{1}{2}F^{ab}\right)\omega \wedge \omega_b;$$

$$4)\ d\theta^{\hat{a}}_0 = \theta^b_a \wedge \omega_b - F_{cb}\theta^c_a \wedge \omega^b + \tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{0bc}\omega^b \wedge \omega^c + R^{\hat{a}}_{0b\hat{c}}\omega^b \wedge \omega_c + \tfrac{1}{2}R^{\hat{a}}_{0\hat{b}\hat{c}}\omega_b \wedge \omega_c + \left(R^{\hat{a}}_{00\hat{b}} + \tfrac{1}{2}F_{ac}F^{cb}\right)\omega \wedge \omega_b + \left(R^{\hat{a}}_{00b} - \tfrac{1}{2}F_{ab}\right)\omega \wedge \omega^b; \tag{17}$$

$$5)\ d\theta^0_a = -\theta^b_a \wedge \omega_b + F_{cb}\theta^c_a \wedge \omega^b + \tfrac{1}{2}R^0_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + R^0_{ab\hat{c}}\omega^b \wedge \omega_c + \tfrac{1}{2}R^0_{a\hat{b}\hat{c}}\omega_b \wedge \omega_c + \left(R^0_{a0b} + \tfrac{1}{2}F_{ab}\right)\omega \wedge \omega^b + \left(R^0_{a0\hat{b}} - \tfrac{1}{2}F_{ac}F^{cb}\right)\omega \wedge \omega_b;$$

6) $d\theta_{\hat{a}}^0 = \theta_b^a \wedge \omega^b - F^{cb}\theta_c^a \wedge \omega_b + \frac{1}{2}R_{\hat{a}bc}^0\omega^b \wedge \omega^c + R_{\hat{a}b\hat{c}}^0\omega^b \wedge \omega_c + \frac{1}{2}R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}}^0\omega_b \wedge \omega_c + \left(R_{\hat{a}0b}^0 - \frac{1}{2}F_{bc}F^{ca}\right)\omega \wedge \omega^b + \left(R_{\hat{a}0\hat{b}}^0 + \frac{1}{2}F^{ab}\right)\omega \wedge \omega_b$;

7) $d\theta_b^a = -\theta_c^a \wedge \theta_b^c + \left(\frac{1}{2}R_{bcd}^a - \delta_{[c}^a F_{|b|d]}\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(R_{bc\hat{d}}^a + \delta_c^a\delta_b^d - F_{bc}F^{ad}\right)\omega^c \wedge \omega_d + \left(\frac{1}{2}R_{b\hat{c}\hat{d}}^a - F^{a[c}\delta_b^{d]}\right)\omega_c \wedge \omega_d + R_{b0c}^a\omega \wedge \omega^c + R_{b0\hat{c}}^a\omega \wedge \omega_c$;

8) $d\theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} = -d\theta_a^b = \theta_c^b \wedge \theta_a^c + \left(\frac{1}{2}R_{\hat{b}cd}^{\hat{a}} - F_{a[c}\delta_{d]}^b\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(R_{\hat{b}c\hat{d}}^{\hat{a}} - \delta_c^b\delta_a^d + F_{ac}F^{bd}\right)\omega^c \wedge \omega_d + \left(\frac{1}{2}R_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} - F^{b[c}\delta_a^{d]}\right)\omega_c \wedge \omega_d + R_{\hat{b}0c}^{\hat{a}}\omega \wedge \omega^c + R_{\hat{b}0\hat{c}}^{\hat{a}}\omega \wedge \omega_c$.

Сравнивая (9:4), (15) и (17), в силу линейной независимости базисных форм, имеем, что существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля имеют вид:

$$1)\ R_{00b}^a = F^{ac}F_{cb} + \delta_b^a;\ \ 2)\ R_{bcd}^a = -\delta_b^a F_{cd};\ \ 3)\ R_{bc\hat{d}}^a = A_{bc}^{ad} - F_{bc}F^{ad} - \delta_c^a\delta_b^d;\ \ 4)\ R_{\hat{b}cd}^a = F^{ab}F_{cd} - 2\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b. \quad (18)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. существенные ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля SGK-многообразия I рода на пространстве присоединенной G-структуры имеют вид:
1) $R_{00b}^a = F^{ac}F_{cb} + \delta_b^a$; 2) $R_{bcd}^a = -\delta_b^a F_{cd}$; 3) $R_{bc\hat{d}}^a = A_{bc}^{ad} - F_{bc}F^{ad} - \delta_c^a\delta_b^d$; 4) $R_{\hat{b}cd}^a = F^{ab}F_{cd} - 2\delta_{[c}^a\delta_{d]}^b$.

Аналоги тождеств Грея тензора римановой кривизны *SGK*-многообразий I рода

Контактными аналогами тождеств А.Грея R_1, R_2 и R_3 кривизны почти эрмитовых многообразий для тензора римановой кривизны являются тождества кривизны CR_1, CR_2 и CR_3 для почти контактных метрических многообразий:

$$CR_1: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle;$$

$$CR_2: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W\rangle;$$

$$CR_3: \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\rangle; X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Назовем SGK-многообразие I рода, обладающее тождествами CR_1, CR_2 и CR_3, соответственно, CR_1, CR_2 и CR_3 – многообразием.

Исследуем эти тождества.

Теорема 4. Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – AC-структура. Тогда:
(1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ структура класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$;
(2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ структура класса CR_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = 0$;
(3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ структура класса CR_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R_{\hat{a}bcd} = 0$.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы для почти эрмитовых многообразий [2].

Теорема 5. SGK-многообразие I рода является CR_3 – многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{R}$, снабженному косимплектической структурой.

Доказательство. Пусть SGK-многообразие I рода является CR_3–многообразием, тогда согласно Теореме 4 и (18), имеем $R_{\hat{a}bcd} = -\delta_b^a F_{cd} = 0$. Свернем это равенство по индексам b и c, тогда $nF_{cd} = 0$, т.е. $F_{cd} = 0$. Согласно Предложения 3 SGK-многообразие I рода является многообразием Кенмоцу. Поскольку многообразие Кенмоцу является SGK-многообразием I рода для которого $R_{\hat{a}bcd} = 0$, то учитывая Теорему 5.2 [1, стр. 424], можно сказать, что SGK-многообразие I рода является CR_3–многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{R}$, снабженному косимплектической структурой. □

Теорема 6. SGK-многообразие I рода является CR_2 – многообразием тогда и только тогда, когда оно является CR_3–многообразием.

Доказательство. Поскольку для SGK-многообразия I рода $R_{bcd}^{\hat{a}} = 0$, согласно Теореме 4 SGK-многообразия I рода являющееся CR_2 – многообразием является CR_3–многообразием. Но поскольку $CR_3 \supset CR_2 \supset CR_1$, то SGK-многообразие I рода являющееся CR_3 – многообразием является CR_2–многообразием. □

С учетом теоремы 5 теорему 6 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 7. SGK-многообразие I рода является CR_2 – многообразием тогда и только тогда, когда оно канонически конциркулярно многообразию $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{R}$, снабженному косимплектической структурой.

Теорема 8. SGK-многообразие I рода является CR_1 – многообразием тогда и только тогда, когда оно является трехмерным многообразием Кенмоцу.

Доказательство. Согласно теореме 4 почти контактная метрическая структура является структурой класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$. Тогда согласно теореме 3 SGK-структура I рода является структурой класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры: 1) $R^a_{bcd} = -\delta^a_b F_{cd} = 0$; 2) $R^a_{\hat{b}cd} = F^{ab}F_{cd} - 2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]} = 0$. Как было показано выше выполнение равенства $R^a_{bcd} = -\delta^a_b F_{cd} = 0$ влечет, что SGK-структура I рода является структурой Кенмоцу. Рассмотрим равенство $R^a_{\hat{b}cd} = F^{ab}F_{cd} - 2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]} = 0$. Свернем это равенство сначала по индексам a и c, а затем по индексам b и d, тогда получим $F^{ab}F_{ab} = n(n-1)$. Так как $F_{ab} = 0$, то $n(n-1) = 0$, т.е. $n = 1$. Таким образом, SGK-многообразие I рода являющееся класса CR_1 является многообразием Кенмоцу размерности 3.

Обратно, поскольку для трехмерного многообразия Кенмоцу имеем, что $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$, то оно является SGK-многообразием I рода являющееся CR_1 – многообразием.

Список литературы
References

1. Kenmotsy K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J., 24 (1972). – P. 93-103.
Kenmotsy K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J., 24 (1972). – P. 93-103.
2. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: «Печатный Дом», 2013, 458 с.
V.F. Kirichenko. Differential-geometric structures on manifolds. Second Edition, Revised. Odessa: "Printing House", 2013, 458 p.
3. Bishop R.L., O'Neil B. Manifolds of negative curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1-50.
4. Умнова С.В. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МПГУ, 2002. – 88 с.
Umnova S.V. Geometry Kenmotsu manifolds and their generalizations: Dis. ... Cand. Sci. Sciences. - M.: Moscow State Pedagogical University, 2002. - 88 p.