УДК 511

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А.А. КАРАЦУБЫ
ON A KARATSUBA'S PROBLEM

До Дык Там
Do Duc Tam

Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia
E-mail:doductam140189@gmail.com

Аннотация. Настоящая работа посвящена проблеме распределения нетривиальных нулей дзета–функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой $\Re s = 1/2$. В 1984 г. А.А. Карацуба доказал, что почти все отрезки прямой $\Re s = 1/2$ вида $[T, T + X^{\varepsilon}]$, где $0 < X_0(\varepsilon) < X \le T \le 2X$, содержат более $c_0(\varepsilon)T^{\varepsilon}\ln T$ нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$. В настоящей работе автор уменьшил длину отрезка осреднения. Мы доказали результат Карацубы для отрезка $(X, X + X^{7/8+\varepsilon})$. Доказательство главной теоремы основано на получении оценки сверху для специальной кратной тригонометрической суммы.

Resume. In this paper, we study the distribution of non-trivial zeros of the Riemann zeta function $\zeta(s)$, which are on the critical line $\Re s = 1/2$. In 1984, A. A. Karatsuba proved that almost all intervals of line $\Re s = 1/2$ of the form $[T, T + X^{\varepsilon}]$, where $0 < X_0(\varepsilon) < X \le T \le 2X$, contain more than $c_0(\varepsilon)T^{\varepsilon}\ln T$ zeros of odd orders of the function $\zeta(1/2+it)$. In this paper, the length of the averaging interval has reduced. We proved Karatsuba's result for interval $(X, X + X^{7/8+\varepsilon})$. Proof of the main theorem is based on obtaining an upper estimate for the special multiple trigonometric sum.

Ключевые слова: дзета-функция, нетривиальные нули, критическая прямая.

Keywords: the Riemann zeta function, non-trivial zeros, critical line.

Введение

Дзета-функция Римана задаётся на полуплоскости $\Re s > 1$ рядом Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость кроме точки s=1. Леонард Эйлер доказал следующее замечательное тождество:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \Re s > 1,$$

с помощью которого он дал аналитическое доказательство теоремы о бесконечности количества простых чисел.

Бернхард Риман стал изучать дзета-функцию как функцию комплексного переменного. Хорошо известно, что все комплексные нули $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно прямой $\Re s = 1/2$, которая называется критической. В 1859 г. Б. Риман [1] высказал гипотезу о том, что все комплексные нули $\zeta(s)$ дзета-функции лежат на критической прямой $\Re s = 1/2$.

В 1914 г. Г. Харди доказал, что на критической прямой лежит бесконечно много нулей $\zeta(s)$ дзета–функции. Пусть $N_0(T)$ – число нулей нечетного порядка функции, лежащих на промежутке $(0,T]$. В 1921 г. Г. Харди и Д. Литтлвуд [2] доказали следующую теорему:

Для любого $\varepsilon>0$ *существуют* $T_0=T_0(\varepsilon)>0$, $c=c(\varepsilon)>0$ *такие, что при* $T>T_0$, $H=T^{0.5+\varepsilon}$ *справедливо неравенство:*

$$N_0(T+H)-N_0(T)\ge cH.$$

В 1942 г. А. Сельберг [3] улучшил результат Харди и Литтлвуда. Он доказал, что при условиях теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство:

$$N_0(T+H)-N_0(T)\ge cH\ln T. \qquad (1)$$

Сельберг [3] высказал гипотезу о том, что оценка (1) имеет место при меньших H, то есть, при $H=T^{\alpha+\varepsilon}$, где α положительная постоянная, меньшая $1/2$.

Ряд замечательных работ о нулях дзета – функции Римана выполнил А. А. Карацуба [4–11]. В 1984 г. А.А. Карацуба установил, что неравенство (1) справедливо при $H=T^{27/82+\varepsilon}$. Тем самым он доказал гипотезу Сельберга о числе нулей дзета–функции Римана, лежащих на критической прямой. А.А. Карацуба [6] решил задачу о числе нулей дзета–функции Римана на очень коротких промежутках критической прямой <<в среднем>>. Доказана следующая теорема:

Пусть $\varepsilon>0$ *произвольно малое фиксированное число,* $X\ge X_0(\varepsilon)>0$, $H=X^{\varepsilon}$, $X\le T\le 2X$. *Рассмотрим соотношение:*

$$N_0(T+H)-N_0(T)\ge c_1H\ln T, \qquad (2)$$

где $c_1=c_1(\varepsilon)>0$ – *некоторая постоянная, зависящая только от* ε, *и через* E_1 *обозначим множество тех* T *из промежутка* $X\le T\le 2X$, *для которых (2) не выполняется. Тогда для меры этого множества* $\mu(E_1)$ *справедлива оценка:*

$$\mu(E_1)\le X^{1-0,5\varepsilon}.$$

В 1988 г. Л.В. Киселёва [12] получила результат подобного рода, но для отрезка $(X,X+X^{11/12+\varepsilon})$. В настоящей работе автор уменьшил длину отрезка осреднения. Сформулируем основные теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon>0$– *произвольно малое число,* $X>X_0(\varepsilon)>0$, $H=X^{\varepsilon}$, $X_1\ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X\le T\le X+X_1$.

Через E *обозначим множество тех* T *из промежутка* $[X,X+X_1]$, *для которых интервал* $[T,T+H]$ *содержит меньше, чем* $c_0H\ln T$ *число нулей нечетного порядка функции* $\zeta(0,5+it)$, *где* $c_0=c_0(\varepsilon)>0$ – *некоторая постоянная, зависящая только от* ε. *Тогда для меры этого множества* $\mu(E)$ *справедлива оценка*

$$\mu(E)\le X_1X^{-0,5\varepsilon}.$$

Теорема 2. *Пусть* $0<\varepsilon$ – *произвольно малое число,* $X\ge X_0(\varepsilon)>0$, $H=X^{\varepsilon}$, $X_1\ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X\le T\le X+X_1$, $M=[X/H]$, $M_1=[X_1/H]$. *При* $m=M+1,M+2,\cdots,M+M_1$ *рассмотрим интервалы вида* $[mH,mH+H]$.

Тогда в каждом из указанных интервалов, за исключением не более $M_1M^{-0,5\varepsilon}$ *из них, содержится более чем* $c_1H\ln T$ *нулей нечетного порядка функции* $\zeta(0,5+it)$, *где* $c_1=c_1(\varepsilon)>0$ – *некоторая постоянная, зависящая только от* ε.

Вспомогательные утверждения

В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения: $\varepsilon,\varepsilon_1\cdots>0$ – произвольно малые фиксированные числа, X – растущий параметр, $X_1\ge X^{7/8+\varepsilon}$, $X\le T\le X+X_1$, $P=\sqrt{T/2\pi}$, $H=X^{\varepsilon}$,

$L=\ln X$, $Y=H^{0.01}$, $0<h<h_1<1$ – параметры, зависящие от T, значение которых будет определено позднее, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \cdots$ – положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит Y, действительные числа $\alpha(\nu)$ находятся из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^2}, \qquad \Re s>1,$$

числа $\beta(\nu)$ и $a(\lambda)$ определяются следующим образом:

$$a(\lambda)=\sum_{m\nu_1=\lambda\nu_2}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2}, \quad \beta(\nu)=\begin{cases}\alpha(\nu)\left(1-\ln\nu/\ln Y\right), 1\le\nu<\mathrm{Y},\\ 0, \nu\ge\mathrm{Y}.\end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть при* $j=1,2$ *суммы* $W_j(T)$ *определяются равенствами:*

$$W_1(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P}\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right),$$

$$W_2(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2\le P}\frac{a(\lambda_1)d(\lambda_1)a(\lambda_2)\overline{d(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2\right),$$

где

$$d(\lambda)=\int_{-h_1}^{h_1}e^{-(u/h)^2}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{iu}du.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int_X^{X+X_1}W_1^2(T)dT<<\frac{X_1Y^{11}L^{10}}{H}, \quad \int_X^{X+X_1}W_2^2(T)dT<<\frac{h^4X_1Y^{11}L^{10}}{H},$$

где постоянные в знаке $<<$ *зависят только от* ε.

Схема доказательства. Пусть $W(T)$ – одна из двух сумм $W_j(T), j=1,2$ и $d_1(\lambda)=1$, $h_2=1$, если $W(T)=W_1(T)$, а $d_1(\lambda)=d(\lambda)$, $h_2=h$, если $W(T)=W_2(T)$. Пользуясь определения числа $a(\lambda)$ и неравенством Коши, получаем:

$$\int_X^{X+X_1}|W(T)|^2dT<<Y^8\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{n_1\le\alpha P}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\le\gamma P}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2dT, \tag{3}$$

где
$$\Phi(n_1,n_2,T)=\frac{d_1(n_1\nu_1/\nu_2)\overline{d_1(n_2\nu_3/\nu_4)}}{\sqrt{n_1n_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1\beta}\right)\right)^2\right),$$

$\alpha=\nu_2/\nu_1, \beta=\nu_1\nu_4/(\nu_2\nu_3), \gamma=\nu_4/\nu_3$ и ν_1,ν_2,ν_3,ν_4 – некоторые фиксированные натуральные числа, не превосходящие Y. Пусть $P_0=\sqrt{X/(2\pi)}$. Разбивая промежуток суммирования по n_1 на два промежутка точкой $P_0\alpha$, приходим к неравенству:

$$\int_X^{X+X_1}|W(T)|^2dT<<Y^8\left(\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{n_1\le P_0\alpha}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\le P\gamma}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2dT+\right.$$
$$\left.+\int_X^{X+X_1}\left|\sum_{P_0\alpha<n_1\le P\alpha}\ \sum_{\substack{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)\\ n_2\le P\gamma}}\Phi(n_1,n_2,T)\right|^2dT\right). \tag{4}$$

Будем обозначать два интеграла в правой части выражения (4) через J_1 и J_2, соответственно, $n_1\le P_0\alpha$ и $P_0\alpha<n_1\le P\alpha$.

Пользуясь тем, что промежуток суммирования по n_1 короткий, оценим интеграл J_2 так:

$$J_2 << \frac{h_2^4 L^7 X_1}{H}. \tag{5}$$

Оценим интеграл J_1 сверху. Разбивая промежуток суммирования по n_1 в этой формуле на $<< L$ промежутков вида $N < n_1 \le N_1 \le 2N \le P_0\alpha$, приходим к неравенству:

$$J_1 << L^2 \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\le N_1} \sum_{n_1\beta<n_2\le n_1\beta(1+L/H)} \Phi(n_1,n_2,T) \right|^2 dT.$$

Применяя к последней сумме по n_1, n_2 преобразование Абеля, пользуясь оценками

$$\left| d\left(\frac{uv_1}{v_2}\right) \right| \le h; \qquad \left| d'\left(\frac{uv_1}{v_2}\right) \right| \le \frac{h}{u}; \qquad \left| d''\left(\frac{uv_1}{v_2}\right) \right| \le \frac{h}{u^2},$$

приходим к неравенству:

$$J_1 << h_2^4 L^2 I_1, \tag{6}$$

где

$$I_1 = \int_X^{X+X_1} \left| \sum_{N<n_1\le N_2} \sum_{N\beta<n_2\le N_3\beta} \frac{e^{-(H\ln(n_2/n_1\beta)/2)^2}}{\sqrt{n_1 n_2 v_1 v_2 v_3 v_4}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{iT} E(n_1,n_2) \right|^2 dT,$$

$$E(n_1,n_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{N} < \mathrm{n}_1 \le \mathrm{N}_1 \text{ и } \mathrm{n}_1\beta < \mathrm{n}_2 \le \mathrm{n}_1\beta(1+\mathrm{L/H}), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$N < N_2 \le N_1$ и $N < N_3 \le N_1(1+L/H)$ – некоторые фиксированные числа.

Далее, применяя к I_1 известный прием [7], получаем:

$$I_1 << X_1 \left| \sum_{N<n_1,n_3\le N_2} \sum_{\substack{N\beta<n_2,n_4\le N_3\beta \\ 0\le n_2n_3-n_1n_4\le N^2\beta L/X_1}} \left(\frac{n_2 n_3}{n_1 n_4}\right)^{iX} \eta(n_1,n_2,n_3,n_4) E(n_1,n_2) E(n_3,n_4) \right| + O\left(e^{-0.01L^2}\right), \tag{7}$$

где $$\eta(n_1,n_2,n_3,n_4) = \frac{e^{-(H\ln(n_2/(n_1\beta))/2)^2} e^{-(H\ln(n_4/(n_3\beta))/2)^2} e^{-(X_1\ln(n_2n_3/(n_1n_4))/2)^2}}{\sqrt{n_1n_2n_3n_4}}.$$

Разобъем последнюю сумму на две суммы: Σ – часть этой суммы, отвечающая таким слагаемым, у которых $n_2n_3 = n_1n_4$, а W – слагаемым, у которых

$$1 \le n_2n_3 - n_1n_4 \le \frac{N^2\beta L}{X_1}.$$

Оценим сумму Σ количеством возможных наборов чисел n_1, n_2, n_3, n_4 :

$$\Sigma \le \frac{L^2}{H}. \tag{8}$$

Так как в W присутствует множитель

$$\left(\frac{n_2n_3}{n_1n_4}\right)^{iX},$$

то можно воспользоваться осцилляцией. Оценим сумму W так:

$$|W| << \frac{Y^3 L^8}{H}. \tag{9}$$

Из (3–9) следует утверждение леммы.

Следствие 1. Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_2 – множество таких T из интервала $[X, X+X_1]$, для которых выполняются неравенства

$$W_1^2(T) \geq \frac{X_1^{1-\delta} Y^{11} L^{10}}{H}, \qquad W_2^2(T) \geq \frac{h^4 X_1^{1-\delta} Y^{11} L^{10}}{H}.$$

Тогда для меры множества E_2 справедлива оценка $\mu(E_2) << X_1^{\delta}$.

Лемма 2. При обозначениях теоремы 2 справедливы неравенства:

$$\sum_{m=M+1}^{M+b} W_1^2(mH) << \frac{M_1 Y^{11} L^{11}}{H}, \quad \sum_{m=M+1}^{M+b} W_1^2(mH) << \frac{h^4 M_1 Y^{11} L^{11}}{H}.$$

Лемма 2 доказывается по аналогии с доказательством леммы 1.

Доказательство основной теоремы

В следствии 1 полагаем $\delta = 1 - 4/7\varepsilon$. Будем рассматривать те числа T из $X \leq T \leq X + X_1$, которые не принадлежат множеству E_2; для них выполняются оценки:

$$W_1^2(T) < \frac{Y^{11} L^{10}}{\sqrt{H}}, W_2^2(T) < \frac{h^4 Y^{11} L^{10}}{\sqrt{H}}. \tag{10}$$

Из рассматриваемых чисел T выбросим те, для которых выполняется неравенство:

$$\left| \int_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+H-1)) \varphi^2(\sigma + i(T+H-1)) d\sigma \right| +$$
$$+ \left| \int_{1/2}^{2} \zeta(\sigma + i(T+1)) \varphi^2(\sigma + i(T+1)) d\sigma \right| > \frac{H}{L}. \tag{11}$$

В силу леммы 7 статьи [13] следует, что мера выброшенных чисел есть величина порядка $O(X_1 X^{-\varepsilon})$.

Далее, доказательство проводится по схеме работы А.А. Карацубы [5]. Введём следующие параметры $h = A/(c \ln T)$, $h_1 = 2h$, $T \geq X > 0$. Будем считать, что X так велико, что $0 < h < h_1 < 1$. Числа $0 < c < 1$ и $0 < A$ будут определены позднее. При $T \leq t \leq T + H$ рассматриваются интегралы $j_1(t)$ и $j_2(t)$:

$$j_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} \left| F(t+u) \right| du, j_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} F(t+u) du \right|,$$

где $F(t)$ – функция Харди–Сельберга [13, гл. 3].

Обозначим через E_4 подмножество интервала $(T, T+H)$, на котором выполняется неравенство $j_1(t) > j_2(t)$. Так как вне E_4 два интеграла $j_1(t)$ и $j_2(t)$ равны, то имеем:

$$\int_{E_4} j_1(t) dt = \int_T^{T+H} j_1(t) dt - \int_{\overline{E_4}} j_2(t) dt \geq \int_T^{T+H} j_1(t) dt - \int_T^{T+H} j_2(t) dt.$$

Применяя интегральное неравенство Коши, приходим к соотношению:

$$\sqrt{\mu(E_4) I_1} + \sqrt{H I_2} \geq I_3, \tag{12}$$

где $\mu(E_4)$ – мера множества E_4,

$$I_1 = \int_T^{T+H} (j_1(t))^2 dt, I_2 = \int_T^{T+H} (j_2(t))^2 dt, I_3 = \int_T^{T+H} j_1(t) dt.$$

Пользуясь способом, указанным в работе [5, с. 572], и неравенством (11), оценим интеграл I_3 так:

$$I_3 \geq hH + c_4 hHL^{-1}. \tag{13}$$

Интеграл I_1 оценен [5, с. 576]:

$$I_1 << h^2 H \left(\frac{\ln T}{\ln Y} + W_1(T) \right),$$

где $W_1(T)$ – тригонометрическая сумма леммы 1. Для суммы $W_1(T)$ справедлива оценка, которая следует из (10):

$$W_1(T) < H^{-0,25} Y^{5,5} L^5.$$

Таким образом, получаем оценку сверху для I_1:

$$I_1 \le c_5 h^2 H\left(\frac{\ln T}{\ln Y} + H^{-0.25} Y^{5.5} L^5\right). \qquad (14)$$

Интеграл I_2 оценим сверху, пользуясь способом работы А.А. Карацубы [14, с. 195]. Получаем:

$$I_2 << H\left(h^2 \frac{\ln T}{\ln Y}\left(c + \frac{1}{(ch\ln T)^2 e^{2(h_1/h)^2}} + \frac{1}{e^{2(hc\ln T)^2}}\right) + W_2(T)\right) + h^2 H T^{-0,02},$$

где $W_2(T)$ – тригонометрическая сумма леммы 1. Сумма $W_2(T)$ оценивается с помощью (10):

$$W_2(T) < h^2 H^{-0,25} Y^{5,5} L^5.$$

В силу определения Y, h, h_1 получаем:

$$I_2 \le c_6 h^2 H\left(\frac{\ln T}{\ln X} 100\varepsilon^{-1}\left(c + \frac{1}{A^2 e^8} + \frac{1}{e^{2A^2}}\right) + H^{-0.25} Y^{5.5} L^5 + T^{-0.02}\right).$$

Возьмем теперь

$$c = \frac{\varepsilon}{4800 c_6},\ A = \left(\frac{4800 c_6}{\varepsilon}\right)^{0.5},$$

и число X выберем так, чтобы выполнялось неравенство:

$$H^{-0.25} Y^{5.5} L^5 + T^{-0.02} < \frac{1}{8 c_6}.$$

В итоге получаем:

$$I_2 < \frac{1}{4} h^2 H. \qquad (15)$$

Из оценок (12–15) получаем неравенство $\mu(E_4) \ge c_7 H$, $c_7 = c_7(\varepsilon) > 0$, откуда следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 2 проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 и с использованием леммы 2.

Список литературы

1. Риман Б. Сочинения / Б. Риман. – М.–Л.: ОГИЗ, 1948. – 479 с.
Riemann B. The works / B. Riemann. – Moskva–Leningrad: OGIZ, 1948. – 479 p.

2. Hardy G.H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Mathematische Zeitschrift. – 1921. – V. 10. – P. 283–317.

3. Selberg A. On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. – 1942.– V. 10. – P. 1–59.

4. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой / А.А. Карацуба // Тр. МИАН СССР. – 1981. – Т. 157. – С. 49–63.
Karatsuba A. A. On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line / A.A. Karatsuba // Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1981. – V.157. – P. 49–63.

5. Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой / А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – Т. 48. – № 3. – С. 569–584.
Karatsuba A. A. On the zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line / A.A. Karatsuba // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math. – 1984. – V.48. – No. 3. – P. 569–584.

6. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ / А.А. Карацуба // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – Т. 48. – Вып. 6. – С. 1214–1224.
Karatsuba A. A. The distribution of zeros of the function $\zeta(1/2+it)$ / A.A. Karatsuba // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math. – 1984. – V.48. – No 6. – P. 1214–1224.

7. Карацуба А.А. О нулях дзета-функции Римана на критической прямой / A.A. Karatsuba // Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 167. – С. 167–178.

Karatsuba A. A. Zeros of the Riemann zeta function on the critical line / A.A. Karatsuba // Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1985. – V.167. – P. 167–178.

8. Карацуба А.А. О вещественных нулях функции $\zeta(1/2+it)$ / А.А. Карацуба // УМН. – 1985. – Т. 40. – № 4. – С. 171–172.

Karatsuba A. A. On the real zeros of the function $\zeta(1/2+it)$ / A.A. Karatsuba // Uspekhi Mat. Nauk. – 1985. – V. 40. – No. 4. – P. 171–172.

9. Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и ее нули / А.А. Карацуба // УМН. – 1985. – Т. 40. – № 5. – С. 23–82.

Karatsuba A. A. The Riemann zeta function and its zeros/ A.A. Karatsuba // Uspekhi Mat. Nauk. – 1985. – V. 40. – No 5. – P. 23–82.

10. Карацуба А.А. О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой / А.А. Карацуба // Изв. РАН. Сер. матем. – 1992. – Т. 56. – № 2. – С. 372–397.

Karatsuba A. A. On the number of zeros of the Riemann zeta-function lying in almost all short intervals of the critical line/ A.A. Karatsuba // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math. – 1992. – V. 56. – No 2. – P. 372–397.

11. Карацуба А.А. Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на отрезках критической прямой, некоторых рядов Дирихле / А.А. Карацуба // УМН. – 1992. – Т. 47. – № 2. – С. 193–194.

Karatsuba A. A. A refinement of theorems on the number of zeros lying on intervals of the critical line of certain Dirichlet series/ A.A. Karatsuba // Uspekhi Mat. Nauk. – 1992. – V. 47. – № 2. – P. 193–194.

12. Киселева Л.В. О количестве нулей функции $\zeta(s)$ на “почти всех” коротких промежутках критической прямой / Л.В. Киселева // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1988. – Т. 52. – Вып. 3. – С. 479–500.

Kiseleva L.V. The number of zeros of the function $\zeta(s)$ on "almost all" short intervals of the critical line / L.V. Kiseleva // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. – 1988. – V.52. – № 3. – P. 479–500. Translation in Math. USSR-Izv., 1989. – V. 32. – № 3. – P. 475–499.

13. Воронин С.М. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин, А.А. Карацуба. – М.: Физматлит, 1994. – 376 с.

Voronin S. V., Karatsuba A. A. The Riemann zeta-function. – M.: Fizmatlit, 1994. – 376 p.

14. Карацуба А.А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле / А.А. Карацуба // Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И.М. Виноградова: Сборник статей. Тр. МИАН 1994. Вып. 207. – С. 180–196.

Karatsuba. A.A. A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series / A.A. Karatsuba // Trudy Mat. Inst. Steklov., 1994. V. 207. – P. 180–196; translation in Proc. Steklov Inst. Math., 1995. – V. 207. –№ 6. – P. 163–177.