УДК 517.5

ПРОСТРАНСТВО ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИЗОМЕТРИЧНО ПОПОЛНЕНИЮ ПРОСТРАНСТВА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО НЕКОТОРОЙ НОРМЕ

THE SPASE OF KERNEL OPERATORS IS ISOMETRIC TO SPASE COMPLETION OF FINITE –DIMENSIONAL OPERATORS WITH RESPECT TO THIS NORM

И.В. Атласов
I.V. Atlasov

Федеральное государственное казенное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский институт Министерства внутренних дел Российской Федерации»,
Россия, Воронеж, 394065, проспект Патриотов, дом 53

Federal State Public Educational Establishment of Higher Training «Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of the Russian Federation», 53 Patriots Avenue, Voronezh, *Russia*

E-mail: mail@vimvd.ru; mathematic1@rambler.ru

Аннотация. В работе доказывается, что пространство когерентно-ядерных операторов изометрично пополнению пространства конечномерных операторов по некоторой норме.

Resume. In the article is proved, that the space of kernel operators is isometric to space completion of finite-dimensional operators with respect to the some norm.

Ключевые слова: операторный идеал, банахово пространство.

Key words: operator ideal, Banach space.

Введение

Работа посвящена некоторым проблемам, представленным в монографии Альберта Пича. Рассматривается связь между банаховыми пространствами: пространством ядерных операторов и пространством, полученным пополнением множества конечномерных операторов по некоторой норме. В монографии Альберта Пича написано, что эти пространства в общем случае различны и совпадают в частных случаях. К сожалению, нет контрпримера и ссылок на литературу с этим контрпримером.

Постановка задачи

Рассмотрим основные определения. Символами C и D будем обозначать банаховы пространства. Скажем, что пространство C вложено в пространство D с константой вложения λ и обозначим это символом $C\overset{\lambda}{\subset}D$, если существует инъекция $J:C\to D$, такая что для любого $x\in C$ имеем $J(x)\in D$ и $\|J(x)\|_D\le\lambda\|x\|_C$. В дальнейшем будем предполагать, что любой упоминаемый ниже оператор вложения $J:C\to D$ задан аналитически $J(x)=x$, для всех $x\in C$.

Символом $L(C,D)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов T, действующих из C в D. Пространство $L(C,D)$ является банаховым относительно нормы:

$$\|T\|_{L(C,D)}=\sup_{c\in C}\frac{\|T(c)\|_D}{\|c\|_C}.$$

Если пространство D совпадает с пространством действительных чисел R, то пространство $L(C,D)$ будем обозначать символом C^*.

Определение 1. 13 *Обозначим через* $\mathsf{F}(C,D)$ [1] *линейное многообразие в пространстве* $L(C,D)$*, состоящее из множества конечномерных операторов:*

$$F=\sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k, \quad где\ c_k \in C^*,\ d_k \in D,\ k=1,\dots,n.$$

Определение 2. 14 *Обозначим символом* $\mathsf{R}(C,D)$*, линейное многообразие в пространстве* $L(C,D)$*, состоящее из всех операторов* $T \in L(C,D)$*, представимых в виде*

$$T=\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k, \qquad \left(c_k \in C^*, d_k \in D, k=1,\dots\right)$$
$$таких\_что \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D < \infty. \tag{1}$$

Замечание 1. 15 *Согласно [1, часть 2б, раз. 6.3, теорема 6.3.2], пространство* $\mathsf{R}(C,D)$ *является нормированным операторным идеалом. Откуда, в частности, следует, что это пространство банахово относительно нормы:*

$$N(T)=\inf_{T=\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D,$$

где $\inf$ берется по всевозможным представлениям оператора T, для которых представимо неравенство $\sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D < \infty$.

Покажем, что справедливо вложение $\mathsf{R}(C,D) \overset{1}{\subset} L(C,D)$. Имеем:

$$\|T\|_{L(C,D)} = \sup_{c\in C} \frac{\left\|\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k(c) d_k\right\|_D}{\|c\|_C} < \sup_{c\in C} \frac{\sum_{k=1}^{k=\infty} |c_k(c)| \|d_k\|_D}{\|c\|_C} <$$
$$< \sum_{k=1}^{k=\infty} \|d_k\|_D \sup_{c\in C} \frac{|c_k(c)|}{\|c\|_C} < \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D.$$

Отсюда следует, что

$$\|T\|_{L(C,D)} < \inf_{T=\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D = N(T),$$

что эквивалентно вложению $\mathsf{R}(C,D) \overset{1}{\subset} L(C,D)$.

Определение 3. 16 *На элементах* $T=\sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k \in \mathsf{F}(C,D)$ *рассмотрим функцию*

$$N^0(T)=\inf_{T=\sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=n} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D,$$

где $\inf$ берется по всем конечным представлениям оператора T из пространства $\mathsf{F}(C,D)$.

Замечание 2. 17 *Согласно [1, часть 2, раз. 6.8, теорема 6.8.2), функция* N^0 *является наибольшей нормой на операторном идеале* $\mathsf{F}(C,D)$.

Определение 4. 18 *Обозначим символом* $\mathsf{G}(C,D)$ *банахово пространство, являющееся абстрактным пополнением линейного многообразия* $\mathsf{F}(C,D)$ *в пространстве* $L(C,D)$ *по норме* N^0.

В этом случае, элементами пространства $\mathsf{G}(C,D)$ являются всевозможные фундаментальные по норме N^0 последовательности $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящие из элементов пространства $\mathsf{F}(C,D)$. Покажем, что каждой такой последовательности, можно поставить в соответствие единственный оператор пространства $L(C,D)$.

Заметим, что для оператора $\mathsf{T} \in \mathsf{F}(C,D)$ справедливо неравенство:

$$\|T\|_{L(C,D)} = \sup_{c\in C}\frac{\left\|\sum_{k=1}^{k=n} c_k(c)d_k\right\|_D}{\|c\|_C} < \sup_{c\in C}\frac{\sum_{k=1}^{k=n}|c_k(c)|\|d_k\|_D}{\|c\|_C} <$$

$$< \sum_{k=1}^{k=n}\|d_k\|_D \sup_{c\in C}\frac{|c_k(c)|}{\|c\|_C} < \sum_{k=1}^{k=n}\|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D.$$

Отсюда следует, что

$$\|T\|_{L(C,D)} < \inf_{T=\sum_{k=1}^{k=n} c_k\otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=n}\|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D = N^0(T).$$

Рассмотрим фундаментальную по норме N^0 последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящую из элементов пространства $\mathsf{F}(C,D)$. Из последненго неравенства имеем:

$$\|F_n - F_m\|_{L(C,D)} < N^0(F_n - F_m) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

То есть последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна по норме пространства $L(C,D)$ и имеет единственный предел $F \in L(C,D)$, к которому сходится по норме пространства $L(C,D)$. Совершая в неравенстве $\|F_n\|_{L(C,D)} < N^0(F_n)$ предельный переход, получим неравенство $\|F\|_{L(C,D)} < N^0(F)$. Доказано утверждение.

Лемма 1. *Справедливо вложение* $G(C,D)\overset{1}{\subset}L(C,D)$.

Далее, необходимо доказать утверждение о совпадении пространств $\mathsf{G}(C,D)$ и $\mathsf{R}(C,D)$ для произвольных банаховых пространств C и D.

Доказательство теоремы о совпадении двух пространств

Наконец, докажем утверждение о совпадении пространств $\mathsf{G}(C,D)$ и $\mathsf{R}(C,D)$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим еще одну конструкцию, представленную в [2, глава 1]

Определение 5. 19 *Пусть* W *- некоторое банахово пространство, такое что банаховы пространства* $E_i \overset{1}{\subset} W$ *для всех* $i \in I$. *Обозначим символом* $\bigcup_{i\in I} E_i$ *множество элементов* $x \in W$, *представимых в виде:*

$$x = \sum_{i\in I} u_i,\quad u_i \in E_i \quad i \in I, \qquad \text{где} \qquad \sum_{i\in I}\|u_i\|_{E_i} < \infty.$$

Замечание 3. 20 *Пусть* W *- некоторое банахово пространство, такое что банаховы пространства* $E_i \overset{1}{\subset} W$ *для всех* $i \in I$. *Согласно* [2, глава 1] *справедливы утверждения:*

1) любой элемент $x \in \bigcup_{i \in I} E_i$ может быть представим в виде суммы не более счетного числа компонент E_i, $i \in I$;

2) пространство $\bigcup_{i \in I} E_i$ банахово, относительно нормы:

$$\|x\|_{\bigcup_{i \in I} E_i} = \inf_{\substack{u_i \in E_i \\ i \in I \\ x = \sum_{i \in I} u_i}} \sum_{i \in I} \|u_i\|_{E_i};$$

3) справедливо вложение:

$$\bigcup_{i \in I} E_i \overset{1}{\subset} W.$$

Рассмотрим основное утверждение работы.

Теорема 1. 21 *Пусть* C *и* D --- *произвольные банаховы пространства, тогда пространства* $\mathsf{G}(C, D)$ *и* $\mathsf{R}(C, D)$ *изометричны.*

Доказательство. Пусть $T = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k \in \mathsf{F}(C, D)$. В этом случае

$$N(T) = \inf_{T = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D \le$$
$$\le \inf_{T = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=n} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D = N^0(T) \tag{2}$$

Пусть элемент $c \in C^*$ $(c \ne 0)$. Обозначим символом

$$D_c = \{x = c \otimes d \in L(C, D),\_\text{где}\_\|x\|_{D_c} = \|d\|_D * \|c\|_{C^*}\ \_\text{для}\_\text{всех} \in D\}$$

Заметим, что пространство D_c $(c \ne 0)$ изоморфно пространству D. Действительно, каждому элементу $d \in D$ пространства D поставим в соответствие элемент $d_c = c \otimes d \in D_c$. Аналогично доказывается, если элемент $d_c = c \otimes d \in D_c$, то $d \in D$. Также $\|d_c\|_{D_c} = \|d\|_D * \|c\|_{C^*}$.

Пусть $c \in C^*$, $c \ne 0$ и $d \in D$. В этом случае для $x = c \otimes d \in D_c$ имеем

$$N^0(x) = \inf_{x = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=n} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D \le \|c\|_{C^*} * \|d\|_D = \|x\|_{D_c}. \tag{3}$$

Покажем что отсюда следует вложение:

$$D_c \overset{1}{\subseteq} \mathsf{G}(C, D).$$

Действительно, пусть оператор $J : D_c \to \mathsf{G}(C, D)$ по формуле

$$J(x) = x \qquad \text{для}\_\text{всех} \qquad x \in D_c.$$

Пусть $x \in D_c$ и $J(x)=0$. Тогда $x=0$. Из неравенства [3] имеем:

$$N^0(J(x)) \le \|x\|_{D_c}, \qquad x \in D_c.$$

Доказано, что оператор J является непрерывным оператором вложения пространства D_c в пространство $\mathsf{G}(C,D)$. Согласно [2, глава 1] справедливо вложение

$$\bigcup_{c\in C^*} D_c \overset{1}{\subseteq} \mathsf{G}(C,D) \tag{4}$$

Пусть оператор:

$$T=\sum_{k=1}^{k=n} \vec{c}_k \otimes \vec{d}_k \in \mathsf{F}(C,D).$$

В этом случае, согласно [2, глава 1] справедливо вложение

$$T \in \bigcup_{k=1}^{k=n} D_{\vec{c}_k} \overset{1}{\subseteq} \bigcup_{c\in C^*} D_c \tag{5}$$

и выполнено неравенство:

$$\|T\|_{\bigcup_{c\in C^*} D_c} \le \|T\|_{\bigcup_{k=1}^{k=n} D_{\vec{c}_k}}.$$

Следовательно,

$$\|T\|_{\bigcup_{c\in C^*} D_c} = \inf_{\substack{T=\sum_{k=1}^{k=\infty} T_k \\ T_k=c_k\otimes d_k \in D_{c_k} \\ k=1,2,\dots}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \|T_k\|_{D_{c_k}} = \inf_{T=\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k\otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D = N(T) \tag{6}$$

Объединяя вложения (4) и (5) имеем:

$$T \in \bigcup_{k=1}^{k=n} D_{\vec{c}_k} \overset{1}{\subseteq} \bigcup_{\substack{c\in C^* \\ c\ne 0}} D_c \overset{1}{\subseteq} \mathsf{G}(C,D)$$

Следовательно, из (6) вытекает что

$$N^0(T) \overset{def}{=} \|T\|_{\mathsf{G}(C,D)} \le \|T\|_{\bigcup_{c\in C^*} D_c} = N(T). \tag{7}$$

Объединяя (2) и (7), получим, что для всех операторов $T \in \mathsf{F}(C,D)$ выполнено равенство:

$$N^0(T)=N(T). \tag{8}$$

Заметим, что пространство $\mathsf{F}(C,D)$ плотно в пространстве $\mathsf{R}(C,D)$. Действительно, пусть

$$T=\sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k \in \mathsf{R}(C,D), \qquad (c_k \in C^*, d_k \in D, k=1,\dots),$$

причем $\sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in N$, такое что для всех $n > n_0$ выполнено неравенство:

$$\sum_{k=n+1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D < \varepsilon.$$

Рассмотрим оператор $T_\varepsilon = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k \in \mathsf{F}(C,D)$. В этом случае $T - T_\varepsilon = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k$ и справедливо равенство:

$$N(T - T_\varepsilon) = \inf_{T-T_\varepsilon = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k \otimes d_k} \sum_{k=1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D \le \sum_{k=n+1}^{k=\infty} \|c_k\|_{C^*} * \|d_k\|_D < \varepsilon.$$

Следовательно, пространство $\mathsf{R}(C,D)$ является пополнением пространства $\mathsf{F}(C,D)$ по норме N.

Так как пространство $\mathsf{R}(C,D)$ является пополнением пространства $\mathsf{F}(C,D)$ по норме N, пространство $\mathsf{G}(C,D)$ является пополнением пространства $\mathsf{F}(C,D)$ по норме N^0 и для всех операторов $T = \sum_{k=1}^{k=n} c_k \otimes d_k \in \mathsf{F}(C,D)$ выполнено неравенство (8), то пространство $\mathsf{G}(C,D)$ изометрично пространству $\mathsf{R}(C,D)$. Теорема доказана.

Заключение

В монографии Пича [1, часть 2, раз. 6.8.3) написано, что существуют банаховы пространства C и D, такие что пространства $\mathsf{G}(C,D)$ и $\mathsf{R}(C,D)$ различны. В работе наоборот доказано, что для любых банаховых пространств C и D пространства $\mathsf{G}(C,D)$ и $\mathsf{R}(C,D)$ совпадают.

Список литературы

1. Пич А. Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 536 с.
Pich A. Operator ideals. – M.: Mir, 1982.– 536 p.
2. Крейн С.Г. Интерполяция линейных операторов. – М., Наука, 1976. – 400 с.
Krein C. Interpolation of linear operators. – M.: Nauka, 1976. – 400 p.