УДК 517.9

СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

SYSTEMS OF ROMANOVSKIJ INTEGRAL EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

А.С. Калитвин, В.А. Калитвин, Н.И. Трусова
A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin, N.I. Trusova

Липецкий государственный педагогический университет, Россия, 398020, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
Lipetsk State Pedagogical University, 42, Lenina St, Lipetsk, 398020, Russia

E-mail: kalitvinas@mail.ru; kalitvin@mail.ru; trusova.nat@gmail.com

Аннотация. Получены условия фредгольмовости для системы интегральных уравнений Романовского в пространствах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций.

Resume. The fredholmness conditions for systems of Romanovskij integral equations in the spaces of continuosly and of continuosly differentiable functions are obtained.

Ключевые слова: системы интегральных уравнений Романовского, частные интегралы, фредгольмовость системы.

Key words: systems of Romanovskij integral equations, partial integrals, fredholmness of systems.

Введение

В работе изучаются системы линейных интегральных уравнений с частными интегралами, характерной особенностью которых является то, что они содержат частные интегралы, в которых у неизвестных функций сначала переставляются переменные и лишь затем производится интегрирование по одной из переменных. Системы таких уравнений будем называть системами уравнений типа Романовского, по имени известного советского математика В.И. Романовского, описавшего в 1932 году задачу теории марковских цепей, приводящую к интегральному уравнению

$$x(t,s)=\int_a^b m(t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma+f(t,s), \tag{1}$$

и впервые изучавшему уравнение (1) в [1]. Более общие классы интегральных уравнений типа Романоского изучались в [2].

Через M_{ij} и M будем обозначать операторы, определяемые равенствами

$$(M_{ij}x_j)(t,s)=\int_a^b m_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma, i,j=1,\dots,n, \tag{2}$$

$$M=(M_{ij})_{i,j=1}^n \tag{3}$$

где $t,s,\sigma\in[a,b]$, функции $m_{ij}(t,s,\sigma)$ измеримы по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть $D=[a,b]\times[a,b]$, $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций, $C^{(1)}(D)$ — пространство непрерывно дифференцируемых на D функций, $C_n(D)$ и $C_n^{(1)}(D)$ — пространства вектор-функций

$$x(t,s)=(x_1(t,s),\dots,x_n(t,s)), \tag{4}$$

где $x_j \in C(D)$ и $x_j \in C^{(1)}(D)$ соответственно, $j = 1,\dots,n$.

Через Π обозначим оператор перестановки переменных у функции $x(t,s)$, то есть $\Pi : x(t,s) \to x(s,t)$. Очевидны следующие свойства оператора Π:

1. Π – линейный непрерывный оператор в $C(D)$ и в $C^{(1)}(D)$;
2. $\|\Pi\| = 1$;
3. $\Pi \circ \Pi = I$, где I – единичный оператор;

Будем рассматривать в пространствах $C(D)$ и $C^{(1)}(D)$ системы интегральных уравнений Романовского с частными интегралами следующего вида:

$$x_i(t,s) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b m_{ij}(t,s,\sigma) x_j(\sigma,t) d\sigma + f_i(t,s), i = 1,\dots,n. \tag{5}$$

Систему уравнений (5) запишем в виде:

$$x(t,s) = (M\Pi x)(t,s) + f(t,s), \tag{6}$$

где $x(t,s)$ — вектор-функция (4), $f(t,s) = (f_1(t,s),\dots,f_n(t,s))$, а M — матричный оператор (3).

Условия фредгольмовости системы в пространстве $C_n(D)$

Так как оператор Π действует в $C_n(D)$ и непрерывен, то действие и непрерывность в $C_n(D)$ оператора $M\Pi$ равносильны действию и непрерывности в $C_n(D)$ оператора M. Отсюда и теоремы 2.1 из [3] вытекает теорема 1.

Теорема 1. *Равносильны утверждения:*

1. В $C_n(D)$ действует оператор $M\Pi$;

2. В $C_n(D)$ действует оператор M;

3. В $C(D)$ действуют операторы $M_{ij}, i, j = 1,\dots,n$.

При этом оператор $M\Pi$ непрерывен.

Отметим, что критерии действия и достаточные условия действия частично интегральных операторов M_{ij} в $C(D)$ приведены в [3]. Операторы M_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$ не являются компатными в $C(D)$ даже в случае непрерывных ненулевых ядер [3]. Поэтому и оператор $M\Pi$ с такими же ядрами не является компактным оператором в $C_n(D)$. Однако ситуация меняется для оператора $(M\Pi)^2$ в $C_n(D)$. Данное обстоятельство позволяет получить условия фредгольмовости для уравнения (6) в $C_n(D)$.

Замечание 1. Здесь и далее фредгольмовым уравнением в банаховом пространстве X считается линейное уравнение $x = \lambda Ax + f$, где $f \in X$, A — ограниченный в X линейный оператор и оператор $I - \lambda A$ имеет нулевой индекс, то есть фредгольмов оператор. В силу теоремы 2 [4] из компактности оператора A^2 следует фредгольмовость оператора $I - \lambda A$, то есть фредгольмовость уравнения $x = \lambda Ax + f$.

Через $C(L^1)$ обозначим пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в $L^1 = L^1([a,b])$. Пространство $C(L^1)$ состоит из функций $a(t,s,\sigma)$, для которых

$$\int_a^b | a(t,s,\sigma) | d\sigma \le const < \infty, \tag{7}$$

$$\int_a^b | a(t,s,\sigma) - a(t_1,s_1,\sigma) | d\sigma \to 0 \tag{8}$$

при $t \to t_1, s \to s_1$. $C(L^1)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|a\|_{C(L^1)} = \sup_D \int_a^b | a(t,s,\sigma) | d\sigma.$$

Аналогично определяется пространство $C(L^1(D))$, состоящее из функций $b(t,s,\sigma,\sigma_1)$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C_n(D)$ *и пусть* $m_{ij} \in C(L^1)$ $(i,j=1,\ldots,n)$. *Тогда уравнение (6) фредгольмово в* $C_n(D)$.

Доказательство. В силу замечания 1 достаточно доказать компактность оператора $(M\Pi)^2$ в $C_n(D)$.

Учитывая теорему Фубини, оператор $(M\Pi)^2$ запишем в виде

$$(M\Pi)^2 = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}, \tag{9}$$

где операторы A_{ij} $(i,j=1,\ldots,n)$ определяются равенством

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\Pi M_{kj}\Pi, \tag{10}$$

в котором операторы $M_{ik}\Pi M_{kj}\Pi$ допускают представление

$$(M_{ik}\Pi M_{kj}\Pi)z(t,s) = \int_a^b m_{ik}(t,s,\sigma)(\int_a^b m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1)z(\sigma_1,\sigma)d\sigma_1)d\sigma =$$

$$= \int_a^b\int_a^b m_{ik}(t,s,\sigma)m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1)z(\sigma_1,\sigma)d\sigma_1 d\sigma,) \tag{11}$$

где $z \in C(D)$.

Покажем, что ядро $b(t,s,\sigma,\sigma_1) = m_{ik}(t,s,\sigma)m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1) \in C(L^1(D))$. Имеем:

$$\int_a^b\int_a^b |b(t,s,\sigma,\sigma_1)|\, d\sigma_1 d\sigma = \int_a^b\int_a^b |m_{ik}(t,s,\sigma)m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1)|\, d\sigma_1 d\sigma =$$

$$= \int_a^b |m_{ik}(t,s,\sigma)|\,(\int_a^b |m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1)|\, d\sigma_1)d\sigma \le C_{kj}\int_a^b |m_{ik}(t,s,\sigma)|\, d\sigma \le C_{ik}C_{kj} < \infty,$$

где C_{ik} и C_{kj} — константы, с которыми выполняется неравенство (7) для функций m_{ik} и m_{kj}.

С другой стороны:

$$\int_a^b\int_a^b |b(t,s,\sigma,\sigma_1) - b(t_1,s_1,\sigma,\sigma_1)|\, d\sigma_1 d\sigma =$$

$$= \int_a^b\int_a^b |m_{ik}(t,s,\sigma)m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1) - m_{ik}(t_1,s_1,\sigma)m_{kj}(\sigma,t_1,\sigma_1)|\, d\sigma_1 d\sigma \le$$

$$= \int_a^b\int_a^b |m_{ik}(t,s,\sigma) - m_{ik}(t_1,s_1,\sigma)||m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1)|\, d\sigma_1 d\sigma +$$

$$+ \int_a^b\int_a^b |m_{ik}(t_1,s_1,\sigma)||m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1) - m_{kj}(\sigma,t_1,\sigma_1)||\, d\sigma_1 d\sigma \le$$

$$\le C_{kj}\int_a^b |m_{ik}(t,s,\sigma) - m_{ik}(t_1,s_1,\sigma)|\, d\sigma + C_{ik}\int_a^b |m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1) - m_{kj}(\sigma,t_1,\sigma_1)|\, d\sigma_1.$$

Из полученных оценок и условия (8) для функций m_{ik} и m_{kj} имеем, что

$$\int_a^b\int_a^b |b(t,s,\sigma,\sigma_1) - b(t_1,s_1,\sigma,\sigma_1)|\, d\sigma_1 d\sigma \to 0$$

при $t \to t_1$ и $s \to s_1$.

Таким образом, функция $b \in C(L^1(D))$ при любых $i, j, k = 1,\dots,n$. Следовательно, операторы $M_{ik}\Pi M_{kj}\Pi$ компактны в $C(D)$ [5]. Тогда в $C(D)$ компактны операторы (10). В силу компактности операторов (10) в $C(D)$ оператор (9), очевидно, компактен в $C_n(D)$.

Теорема доказана.

Так как непрерывные функции m_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$ принадлежат $C(L^1)$, то из теоремы 2 вытекает, что система интегральных уравнений Романовского с непрерывными ядрами является фредгольмовой в пространстве $C_n(D)$.

Утверждение теоремы 2 справедливо, если ядра m_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$ — ограниченные измеримые функции, имеющие разрывы только вдоль конечного числа поверхностей $\sigma = \varphi_{ij}(t, s)$ с непрерывными функциями φ_{ij}; более того, оно справедливо, если ограниченность функций заменить неравенствами $\|\varphi_{ij}(t,s,\sigma)\|_{L^p} \le c < \infty$ $(1 < p < \infty$, так как при этих условиях $m_{ij} \in C(L^1)$ $(i, j = 1,\dots,n)$ [3].

Утверждение теоремы 2 справедливо для уравнения (6) с ядрами типа потенциала, то есть с ядрами вида:

$$m_{ij}(t,s,\sigma) = \frac{n_{ij}(t,s,\sigma)}{|s-\sigma|^{\gamma_{ij}}},$$

где $0 < \gamma_{ij} < 1$, а n_{ij} — непрерывные функции $(i, j = 1,\dots,n)$, так как ядра типа потенциала принадлежат $C(L^1)$ [3].

Условия фредгольмовости системы в пространстве $C_n^{(1)}(D)$

Так же, как и в предыдущем разделе, операторы M_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$ не являются компактными в $C^{(1)}(D)$ даже в случае непрерывно дифференцируемых ненулевых ядер. Поэтому и оператор $M\Pi$ с такими же ядрами не является компактным оператором в $C_n^{(1)}(D)$. Однако оператор $(M\Pi)^2$ при естественных условиях на ядра является компактным в $C_n^{(1)}(D)$. Данное обстоятельство позволяет получить достаточно простые условия фредгольмовости для уравнения (6) в $C_n^{(1)}(D)$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C_n^{(1)}(D)$ *и пусть* m_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$ *— непрерывно дифференцируемые функции. Тогда уравнение (6) фредгольмово в* $C_n^{(1)}(D)$.

Доказательство. Так же, как в теореме 2, достаточно доказать компактность оператора (9) в $C_n^{(1)}(D)$. В виду равенства (10) достаточно убедиться в компактности операторов (11) в $C^{(1)}(D)$. Компактность же операторов (11) в $C_n^{(1)}(D)$ обеспечивается непрерывной дифференцируемостью функций $m_{ik}(t,s,\sigma)m_{kj}(\sigma,t,\sigma_1)$ $(i, j = 1,\dots,n)$, которая вытекает из предполагаемой в условии теоремы 3 непрерывной дифференцируемости функций m_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$.

Теорема доказана.

В заключение заметим, что фредгольмовость уравнения (6) в $C_n^{(1)}(D)$ может иметь место и при меньших ограничениях на ядра m_{ij} $(i, j = 1,\dots,n)$. В этом случае приходится использовать менее ограничительные предположения о дифференцируемости под знаком интеграла Лебега с параметром [6].

Работа поддержана Минобрнауки России (Госзадание № 2015/351, НИР № 1815).

Список литературы

1. Romanovskij V.I. Sur une classe d'equations integrales lineares / V.I. Romanovskij // Acta Math.– 1932. – V. 59. – P. 99–208.

2. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2014. – 196 с.

Kalitvin A.S. Integral Equations of Romanovskij type with partial integrals / A.S. Kalitvin. – Lipetsk: LGPU, 2014. – 196 p.

3. Калитвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. С-теория. – Липецк: ЛГПУ, 2015. – 195 с.

Kalitvin A.S. Linear equations with partial integrals / A.S. Kalitvin, E.V. Frolova. C-theory. – Lipetsk: LGPU, 2015. – 195 p.

4. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Kantorovich L.V. Functional analysis / L.V. Kantorovich, G.P. Arilov. – M.: Nauka, 1984. – 752 p.

5. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский и др. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

Zabrejko P.P. Integral equations / P.P. Zabrejko, A.I. Koshelev and other. – M.: Nauka, 1968. – 448 p.

6. Макаров Б.М. Лекции по вещественному анализу / Б.М. Макаров, А.Н. Подкорытов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 688 с.

Makarov B.V. Lectures by real analysis / B.V. Makarov, A.N. Podkorytov. – Sankt-Petersburg: BXV-Petersburg, 2011. – 688 p.