УДК 517.95

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE LOADED DIFFUSION-WAVE EQUATION

С.Х. Геккиева
S.Kh. Gekkieva

Институт прикладной математики и автоматизации, Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89 a Shortanova St, Nalchik, 3600004, Russia

E-mail: gekkieva_s@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются смешанные краевые задачи для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной. С помощью функции Грина доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

Abstract. The paper deals with the mixed boundary value problem for a loaded diffusion-wave equation with fractional derivative. Using Green's function we proved unique solvability for the set problem.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, функция Грина.

Key words: loaded equation, fractional derivative, Green's function.

Введение

Известно [1], что в основе математических моделей нелокальных физико-биологических фрактальных процессов лежат, как правило, нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка.

В монографии А.М. Нахушева [1] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Следует отметить, что к краевым задачам для нагруженных параболических уравнений сводятся, в том числе, задачи, связанные с прогнозом и уровнем грунтовых вод.

Данная работа посвящена исследованию смешанных краевых задач для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной.

В области $D=\{(x,t): 0<x<l, 0<t<T\}$ рассмотрим уравнениеo

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)-u_{xx}-\sum_{k=1}^{m}q_k(x,t)u(x_0,t)=f(x,t), \quad 0<\alpha<2, \tag{1}$$

где $x_0\in(0,l)$, D_{0t}^{α} – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α [2].

Уравнение (1) относится к классу уравнений, предложенных в [3].

В работе [4] с помощью метода функции Грина исследована смешанная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности.

Краевые задачи для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной рассмотрены в монографии [5].

В работах [6, 7] получены решения краевых задач для нагруженного диффузионного уравнения.

Постановка задачи

Решение $u(x,t)$ уравнения (1) назовем регулярным в области D, если $D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)\in C(\overline{D})$, $k=1,2$; $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(D)$.

Задача 1. *В области* D *требуется найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию*

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-k}u(x,t)=\tau_k(x),\quad k=1,2,\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,t)=\varphi(t),\quad u_x(l,t)=\psi(t),\quad 0<t<T,$$

где $\tau_k(x),\varphi(t),\psi(t)$ *– заданные функции.*

Задача 2. *В области* D *требуется найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию* (2) и граничным условиям:

$$u_x(0,t)=\psi(t),\quad u(l,t)=\varphi(t),\quad 0<t<T,$$

где $\tau_k(x),\psi(t),\varphi(t)$ *– заданные функции.*

Используя метод функции Грина докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $t^{k-\alpha}\varphi(t)$, $t^{k-\alpha}\psi(t)\in C[0,l]$; $\tau_k(x)\in C[0,l]$; $t^{k-\alpha}f(x,t)$, $t^{k-\alpha}q_k(x,t)\in C(\overline{D})$ *и выполнены условия согласования*

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-k}\varphi(t)=\tau_k(0),\quad \lim_{t\to l}D_{0t}^{\alpha-k}\psi(t)=\tau_k(l).$$

Тогда существует единственное регулярное решение задачи 1.

Доказательство. Известно, [5], что функция Грина смешанной краевой задачи для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)-u_{xx}=f(x,t)$$

в области $D=\{(x,t):a_1<x<a_2,\,0<t<b\}$ имеет вид:

$$G_1(x,y,\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left[\Gamma_n(x-\xi,y-\eta)+\Gamma_n(x+\xi-2a_1,y-\eta)\right],$$

где

$$\Gamma_n(s,t)=\frac{1}{2}t^{\beta-1}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{\left|s+2n(a_2-a_1)\right|}{t^{\beta}}\right),\quad \beta=\alpha/2,$$

$$e_{1,\beta}^{1,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\beta-\beta n)}$$

– функция типа Райта.

Тогда для решения задачи 1 с помощью функции Грина получим соотношение

$$u(x,t)=\int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_0^t G_1(x,t,l,\eta)\psi(\eta)d\eta+\int_0^l\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G_1(x,t,\xi,0)d\xi-$$

$$-\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^t\int_0^l\sum_{k=1}^{m}q_k(\xi,\eta)G_1(x,t,\xi,\eta)u(x_0,\eta)d\xi d\eta\,. \tag{3}$$

Отсюда при $x\to x_0$ получим интегральное уравнение:

$$u(x_0,t)-\int_0^t u(x_0,\eta)K(t,\eta)=F(t) \tag{4}$$

с ядром

$$K(t,\eta)=(t-\eta)^{\delta-1}k(t,\eta),$$

где

$$k(t,\eta)=\frac{1}{2}\int_0^l q_k(\xi,\eta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(-1)^n\left[e_{1,\delta}^{1,\delta}\left(-\frac{|x_0-\xi+2nl|}{(t-\eta)^{\delta}}\right)-e_{1,\delta}^{1,\delta}\left(-\frac{|x_0+\xi+2nl|}{(t-\eta)^{\delta}}\right)\right]\right],$$

и правой частью

$$F(t)=\int_0^t G_{1\xi}(x_0,t,0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_0^t G_1(x_0,t,l,\eta)\psi(\eta)d\eta+\int_0^l\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G_1(x_0,t,\xi,0)d\xi-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_1(x_0,t,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta .$$

Нетрудно заметить, что уравнение (4) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо.

Пусть $H(t,\eta;q)$ – резольвента ядра $K(t,\eta)$, тогда решение уравнения (4) примет вид [8]

$$u(x_0,t)=F(t)+\int_0^t H(t,\eta;q)F(\eta)d\eta . \tag{5}$$

Принимая во внимание выражение (5), из (3) получаем, что единственное решение задачи 1 дается формулой

$$u(x,t)=\int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_0^t G_1(x,t,l,\eta)\psi(\eta)d\eta+\int_0^l\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\tau_k(\xi)\frac{\partial^{k-1}}{\partial\eta^{k-1}}G_1(x,t,\xi,0)d\xi-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_1(x,t,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^t\int_0^l\sum_{k=1}^{m}q_k(\xi,\eta)G_1(x,t,\xi,\eta)F(\eta)d\xi d\eta-$$
$$-\int_0^t\int_0^l\sum_{k=1}^{m}q_k(\xi,\eta)G_1(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta\int_0^{\eta}H(t,s;q)F(s)ds .$$

Аналогично формулируется и доказывается теорема для задачи 2.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения / А.М. Нахушев. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications / A.M. Nakhushev. – M: Nauka, 2012. – 232 p.

2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

Nakhushev A.M. Equations of mathematical biology / A.M. Nakhushev. – M: Vysshaja shkola, 1995. – 301 p.

3. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. – 1976.– Т. 12. – №1. – С. 103–108.

Nakhushev A.M. On the Darboux problem for one degenerate loaded integro-differential equation of the second order // Differ. equation. – 1976. – V. 12. – №1. P. 103–08.

4. Дикинов Х.Ж. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности / Х.Ж. Дикинов, А.А. Керефов, А.М. Нахушев // Дифференц. уравнения. 1976. – Т. 12. – №1. – С. 177–179.

Dikinov Kh.Zh. On a boundary problem for a loaded heat equation / Kh.Zh.Dikinov, A.A. Kerefov, A.M. Nakhushev // Differ. equation. – 1976. – V. 12. – №1. – P. 177–179.

5. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка / А.В. Псху. – М.: Наука, 2005. – 199 с.

Pskhu A.V. Partial differential equations of fractional order / A.V. Pskhu. – M.: Nauka, 2005. – 199 p.

6. Геккиева С.Х. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения с дробной производной / С.Х. Геккиева // Материалы Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик, 2004. – С. 47–49.

Gekkieva S.Kh. On a boundary problem for a loaded equation with fractional derivative / S.Kh. Gekkieva // Proceedings of the International Russian-Kazakh symposium «Mixed type equations and related problems of analysis and informatics». – Nalchik, 2004. – P. 47–49.

7. Геккиева С.Х. Вторая краевая задача для нагруженного уравнения с дробной производной / С.Х. Геккиева // Доклады АМАН. – 2008. – Т. 10. – №2. – С. 17–19.

Gekkieva S.Kh. Second boundary value problem for a loaded equation with fractional derivative / S.Kh. Gekkieva. // Reports of Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. – 2008. – V. 10. – №2. – P. 17–19.

8. Трикоми Ф.Дж. Интегральные уравнения / Ф.Дж. Трикоми; Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957.

Tricomi F.G. Integral equations / F.G. Tricomi // Interscience publishers, INC., New York, Interscience publishers, LTD., London. 1957.