УДК 517.165

СРЕДНИЕ К. ДЖИНИ И ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ НИХ В ХИМИИ ПОЛИМЕРОВ

MEANS OF C. JINI AND APPLICATIONS OF ITS INEQUALITIES IN THE POLYMER CHEMISTRY

С.М. Ситник
S.M. Sitnik

Воронежский институт МВД России, Россия, Воронеж, проспект Патриотов, 53

Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs, Russia, Voronezh, Pr. Patriotov, 53

E-mail: mathsms@yandex.ru

Аннотация. Различные виды средних значений используются не только в самой математике, но и в многочисленных приложениях: социальной статистике, термодинамике, квантовой физике, химии, финансовой математике. В работе рассматриваются неравенства для специального класса средних величин, введённых итальянским статистиком Коррадо Джини. Оказывается, что средние Джини и неравенства для них находят неожиданные применения в химии полимеров.

Resume. Different kinds of means are used not only in mathematics itself but also in many its applications: social statistics, thermodynamics, quantum physics, chemistry, financial mathematics. In the paper we consider inequalities for a special class of means, introduced by an Italian statistician Corrado Jini. It occurred that Jini means and inequalities for them have unexpected applications in polymer chemistry.

Ключевые слова: неравенства, средние, средние Джини, полимеризация.

Keywords: inequalities, means, Jini means, polymerization.

Средние значения в математике и экономике

Теория средних значений играет важную роль в математике [1–6]. Для двух неотрицательных чисел x>0, y>0 к числу стандартных средних относятся среднее арифметическое и геометрическое:

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, G(x,y) = \sqrt{xy},$$

которые являются примерами степенных средних порядка s

$$M_s(x,y) = \left(\frac{x^s+y^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}. \qquad (1)$$

Также используется степенное среднее с произвольными весами

$$M_s(x,y) = (ux^s + vy^s)^{\frac{1}{s}}, u+v=1. \qquad (2)$$

К числу менее известных относится среднее Джини с двумя параметрами s,t [3-5].

$$Gi_{s,t}(x,y) = \left(\frac{x^s+y^s}{x^t+y^t}\right)^{\frac{1}{s-t}} \qquad (3)$$

Рассматриваются также весовые и невесовые средние для любого числа величин, а также их интегральные аналоги. Основным предметом изучения Коррадо Джини было имущественное неравенство, для его описания он и ввёл знаменитый «индекс Джини», для вычисления и анализа которого использовались, в том числе, и средние [1]. Это одно из основных понятий современной социальной статистики [7], а сам К. Джини - один из общепризнанных её создателей. Он также использовал и пропагандировал результаты своего соотечественника Вильфреда Парето. Парето первым провёл конкретные расчёты, из которых следовало, что в его время всего 20% населения владело 80% национального богатства, и сделал вывод, что организованное таким образом государство, ждёт быстрая и неизбежная гибель. Просто отметим, что сейчас в России реальные показатели индексов Джини ещё намного хуже. Развивая работы Парето, американский экономист О. Лоренц разработал теорию оценки разницы доходов населения по группам (кривая Лоренца), которая сейчас называется методологией Парето–Лоренца–Джини [7].

Важный частный случай средних Джини получается из (3) при t=s-1. Такие средние были переоткрыты в 1971 г. Д. Лемером и имеют вид

$$Le_s(x,y) = Gi_{s,s-1}(x,y) = \frac{x^s+y^s}{x^{s-1}+y^{s-1}}. \tag{4}$$

Эти средние в советское время чуть позже Лемера также переоткрыл школьный учитель Ю.М. Фирсов [6].

Средние значения в химии полимеров

Отметим сразу, что следующий ниже текст не ставит целью указать на различные недочёты и использование нестрогих рассуждений в известных химических монографиях. У каждой науки свои задачи: математики находят и строго доказывают новые теоремы, в других естественных науках используются их результаты, а когда их не хватает, то применяются нестрогие рассуждения и эмпирические рассмотрения.

Средние значения достаточно широко используются в химии, в частности, в теории полимеризации [8–10]. Так, в монографии [8] в главе о молекулярно-массовом распределении рассматриваются кривые распределения по молекулярным массам, рассматриваются различные способы усреднения по массе молекул и по числу частиц, вводится и изучается весовое среднее арифметическое [8, с. 127], для средневязкостной молекулярной массы вводится весовое степенное среднее вида (2) [8, с. 130]. При этом с математической точки зрения без доказательства используется монотонность весовых степенных средних по параметру (свойство шкалы средних [2–5]), а также минимизационное свойство невесового среднего арифметического в семействе весовых средних. При изучении связей механизмов полимеризации с молекулярно-массовым распределением вводятся и изучаются свойства интегральных аналогов средних Джини $Gi_{3,2}$, $Gi_{2,1}$ [8, с. 184–185], с их использованием определяется так называемый коэффициент полидисперсности Шульца.

В монографии [9] при изучении физических методов исследования макромолекул в растворах для блочных полимеров со сложной совокупностью полимерных цепей при измерениях характеристической вязкости с учётом гибкости макромолекул вводится так называемое вискозиметрическое среднее, которое выражается через молекулярные веса макромолекул с помощью среднего Джини $Gi_{s+1,1}$ [9, с. 36].

Различные средние величины также широко используются в известной монографии [10]. Так, на с. 23-24 для средних значений молекулярных весов вводятся последовательно весовое интегральное среднее произвольного порядка, вес которого равен численной функции распределения; среднее Джини, совпадающее со средним Лемера $Gi_{q,q-1} = Le_q$, которое называется q – средним молекулярным весом, а также степенное среднее. На с. 67 при статистическом анализе механизмов фракционирования вводится среднее Джини–Лемера $Gi_{2,1} = Le_2$. На с. 83 при изучении гидродинамических средних весов и связанных с ними критериев полидисперсности вводятся понятия среднедиффузионного и среднеседиментационного веса, которые выражаются через весовые степенные интегральные средние некоторых отрицательных порядков, а также весовое интегральное среднее Джини $Gi_{1,1-b}$. При этом без строгого доказательства с необычной для математика формулировкой «обычно это верно» утверждается, что указанное среднее Джини всегда больше среднего арифметического. На с. 83–84 вводится двойной средневесовой вес, который выражается через среднее Джини–Лемера $Gi_{2-b,1-b} = Le_{2-b}$. После этого на нестрогом уровне приводятся эмпирические и численные аргументы сравнения этого среднего с весовыми и средним арифметическим, критикуются неверные подходы, рассматриваются приложения к критериям полидисперсности и распределениям Шульца. Далее, на с. 85–87 как интегральные весовые степенные средние вводятся ряд моментов для гидродинамических весов. Приводятся способы их использования при анализе различных случаев распределения Шульца, при этом обосновывается необходимость в качестве новых средних использовать их отношения, что по существу сводится к рекомендации использовать средние Джини с различными параметрами. На с. 86–88 рассматриваются критерии, основанные на «перекрёстных» комбинациях моментов с использованием инвариантов Флори–Манделькерна, в результате выписано очень сложное составное среднее, которое является комбинацией двух средних Джини и двух весовых средних в некоторых степенях, зависящих от эмпирических параметров. На с. 104–105 при изучении молекулярного полиморфизма вводятся средние достаточно сложной структуры, выражающиеся через произведения средних Джини и степенных средних для некоторой величины «лямбда», определение которой в данном параграфе не приводится, но указывается, что это «монотонно возрастающая функция осевого отношения». Для неё без строгого обоснования приведены два неравенства, которые следуют «из самых общих принципов усреднения». На самом деле эти неравенства являются следствием классических неравенств Коши–Буняковского, как нетрудно заметить. На их основе на с. 104–105 приводятся ещё несколько неравенств для введённых средних величин с нестрогим обоснованием. Далее, на с. 107 приводятся численные оценки для ещё одного среднего Джини, а также на основании эмпирических фактов вводится весовое интегральное среднее с неожиданным точным порядком 3,4. На с. 229 для минимальной величины эффективного параметра получено выражение через среднее Джини $Gi_{1/3,-1/3}$, а также обсуждается предельное поведение при стремлении параметра к бесконечности для средних Джини–Лемера. Вопросы предельного поведения средних Джини в терминах отношения степенных средних рассматриваются также на с. 252 при изучении возможностей сведения процессов полимеризации к основным статистическим классам распределений.

Таким образом, действительно, различные классы средних значений, включая средние Джини, находят важное применение в химии при рассмотрении многочисленных вопросов теории полимеризации молекул.

Основное неравенство для средних Джини

Основным в теории средних Джини является неравенство о сравнении пары средних с различными параметрами [3]. В работах [11–12] предложено более простое доказательство основного неравенства по сравнению с приведёнными в [3] и других известных монографиях. Смысл основной теоремы заключается в том, что средние Джини увеличиваются, когда один или оба параметра среднего увеличиваются. Сформулируем этот результат.

Основная теорема о средних Джини

Пусть среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть хотя бы два неравных числа. Если выполнены условия:

$p_1 > q_1, p_2 > q_2, p_2 \geq p_1, q_2 \geq q_1,$

и хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то справедливо неравенство между средними Джини:

$Gi_{p_1,q_1}(a) < Gi_{p_2,q_2}(a).$

Из приведённого неравенства, в частности, следуют двусторонние оценки средних Джини через более простые степенные средние. А из указанных неравенств следуют строгие доказательства тех соотношений между средними, которые приведены выше и, как правило, приводятся без обоснования в цитированной химической литературе по теории полимеризации.

Отметим, что неравенства для средних имеют многочисленные применения и в самой математике [4–5], а также приложения к задаче обработки видеонаблюдений [13], оценкам ядер операторов преобразования [14–16], оценкам характеристик в задачах приближения сигналов [17–20].

Список литературы

1. Джини К. Средние величины / К. Джини. – М.: Статистика, 1970. – 448 с.
Jini C. Means / C. Jini. – M.: Statistica, 1970. – 448 p.
2. Харди Г.Г. Неравенства / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. – М., 1948. – 456 с.
Hardy G.H. Inequalities / G.H. Hardy, J.E. Littlwood, G. Polya. – M., 1948. – 456 p.
3. Bullen P.S. Means and Their Inequalities / P.S. Bullen, D.S. Mitrinovic, P.M. Vasić – D.Reidel, 1988. – 459 p.
4. Ситник С.М. Уточнения и обобщения классических неравенств / С.М. Ситник // Итоги науки. Серия "Математический форум". – Т. 3. Исследования по математическому анализу; под ред. Ю.Ф. Коробейника, А.Г. Кусраева. – Владикавказ, 2009. – С. 221-266.
Sitnik S.M. Generalizations of classical inequalities / S.M. Sitnik // Math. Forum, 2009. – V.3. – P. 221–266.
5. Sitnik S.M. Generalized Young and Cauchy-Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey / S.M. Sitnik // arXiv.:1012.3864, 2012. – 51 p.
6. Калинин С.И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана / С.И. Калинин. – Киров, 2002. – 368 с.
Kalinin S.I. Power means / S.I. Kalinin. – Kirov, 2002. – 368 p.
7. Социальная статистика / ред. И.И. Елисеева. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 480 с.
Social statistics / ed. I.I.Eliseeva. – M.: Finansy I statistika, 2003. – 480 p.

8. Берлин А.А. Кинетика полимеризационных процессов / А.А. Берлин, С.А. Вольфсон, Н.С. Ениколопян. – М.: Химия, 1977. – 318 с.

Berlin A.A. Kinetics of polymer processes / A.A. Berlin, S.A. Volfson, N.S. Enikilopyan. – M.: Chemistry, 1977. – 318 p.

9. Волькенштейн М.В. Конфигурационная статистика полимерных цепей. – М.–Л.: АН СССР, 1959. – 467 с.

Volkenstein M.V. Configuration statistic of polymer chains. – M.–L.: AN SSSR, 1959. – 467 p.

10. Френкель С.Я. Введение в статистическую теорию полимеризации / С.Я. Френкель. – М.–Л.: Наука, 1965. – 268 с.

Frenkel S.Ya. Introduction to statistical polymerization / S.Ya. Frenkel. – M.–L.: Nauka, 1965. – 268 p.

11. Певный А.Б. Об одном неравенстве А.С. Гаспаряна / А.Б. Певный, С.М. Ситник // Проблемы математического анализа. – 2014. – Вып. 77. – С. 159–162.

Pevnyi A.B. On an inequality of A.S. Gasparyan / A.B. Pevnyi, S.M. Sitnik // Problems of mathematical analysis. – 2014. – V. 77. – P. 159–162.

12. Pevnyi A.B., Sitnik S.M. On Gasparyan's Inequality / A.B. Pevnyi, S.M. Sitnik // Journal Of Mathematical Sciences. Springer. – 2015. – V. 205. – № 2. – P. 304–307.

13. Недошивина А.И. Приложения геометрических алгоритмов локализации точки на плоскости к моделированию и сжатию информации в задачах видеонаблюдений / А.И. Недошивина, С.М. Ситник // Вестник Воронежского технического университета. – 2013. – Т. 9. – № 4. – С.108–111.

Nedoshivina A.I. Application of geometrical algorithms for point localization to modelling and data compression / A.I. Nedoshivina, S.M. Sitnik //Vestnik of Voronezh Technical University. – 2013. – V. 9. – № 4. – P. 108–111.

14. Ситник С.М. Операторы преобразования и их приложения / С.М. Ситник //Исследования по современному анализу и математическому моделированию; отв. ред. Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев. – Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А, 2008. – С.226– 293.

Sitnik S.M. Transmutations and applications / S.M. Sitnik // Issledovaniya po sovremennomu analizu I matematicheskomu modelirovaniyu; editor-in-chiefs Yu.F. Korobeynik, A.G. Kusrayev. – Vladikavkaz: Vladikavkaz scientific center RAN and RSO-A, 2008. – P. 226–293.

15. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи / С.М. Ситник // Доклады Академии Наук СССР. 1991. – Т. 320. – № 6. – С. 1326–1330.

Sitnik S.M. Factorization and estimates of the norms of Buschman-Erdelyi operators in weighted Lebesgue spaces//Soviet Mathematics Doklades, 1992. – V. 44. – № 2. – P. 641–646.

16. Ситник С.М. Операторы преобразования Бушмана-Эрдейи, их классификация, основные свойства и приложения / С.М. Ситник //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2015. – № 11 (208). Вып. 39. – С. 60–76.

Sitnik S.M. Buschman-Erdelyi transmutations: classification, main properties, applications // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2015. – № 11 (208). – V. 39. – P. 60–76.

17. Zhuravlev M.V. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions / M.V. Zhuravlev, E.A. Kiselev, L.A. Minin, S.M. Sitnik // Journal of Mathematical Sciences, Springer. – 2011. – V.173. – No. 2. – P. 231– 241.

18. Ситник С.М. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции / С.М. Ситник, А.С. Тимашов // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. – 2013. – № 19 (162). Вып. 32. – С. 184–186.

Sitnik S.M. Finite dimensional mathematical model for the problem of quadratic exponential interpolation / S.M. Sitnik, A.S. Timashov // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2013. – № 19 (162). – V. 32. – P. 184–186.

19. Киселев Е.А. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов / Е.А. Киселев, Л.А. Минин, И.Я. Новиков, С.М. Ситник // Математические заметки. – 2014. – Т. 96. Вып. 2. – С. 239–250.

Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I.Ya., Sitnik S.M. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates // Mathematical Notes. Springer. – 2014. – V. 96. Iss. 1-2. – P. 228–238.

20. Ситник С.М. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции / С.М. Ситник, А.С. Тимашов, С.Н. Ушаков //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2015. – № 17 (214). Вып. 40. – С. 130–142.

Sitnik S.M., Timashov A.S. Method of finite dimensional mathematical modelling for the problem of quadratic exponential interpolation / S.M. Sitnik // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2015. – № 17 (214). V. 40. – P. 130–142.