УДК 517.987

ЗАДАЧИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ С ПОМЕЧЕННЫМИ ВЕРШИНАМИ

ENUMERATION PROBLEMS OF GRAPHS WITH LABELED VERTICES

Ю.П. Вирченко, Л.П. Остапенко
Yu.P. Virchenko, L.P. Ostapenko

[2]*Белгородский национальный исследовательский университет, Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85*
Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

E-mail:virch@bsu.edu.ru;

Аннотация. Изучаются комбинаторные задачи, связанные с перечислением графов с помеченными вершинами. Они состоят в вычислении таких функций, как N_n и M_n, $n \in \mathbb{N}$, где N_n - число всех связных графов, а M_n - число всех связных графов без вершин сочленения в зависимости от числа n вершин. На основе специального алгебраического метода дается решение этих задач в терминах производящих функций чисел N_n и M_n.

Resume. Combinatorial problems which concerns the enumeration of graphs with labeled vertices are studied. They are made in the calculation of these functions, as N_n well as M_n, $n \in \mathbb{N}$, where N_n is the number of all connected graphs, and M_n is the number of all connected graphs with no articulation vertices depending on the number of vertices. On the basis of a special algebraic method provides a solution to these problems in terms of generating functions of numbers N_n and M_n.

Ключевые слова: разложения конечного множества, производящая функция, алгебра симметричных функций, связный граф, граф с помеченными вершинами, вершина сочленения.

Key words: partition of finite set, generation function, algebra of symmetric functions, connected graph, graph with labeled vertices, articulation vertex.

Введение

В настоящей работе изучается комбинаторная задача, связанная с перечислением *графов с помеченными вершинами*, в зависимости от числа вершин.Здесь и далее, мы используем этот термин или, эквивалентно, термин «помеченные графы», следуя терминологии монографии [1]. В этой монографии, а также в [2],под задачами перечисления графов понимаются такие, решение которых состоит в описании определенного класса $\mathscr{G}_n$ графов с n вершинами, элементыкоторого объединяются по признаку наличия у них того или иного свойства. В настоящей работе мы занимаемся не самим перечислением графов в указанном смысле, а решением более узкой задачи, которая состоит в определении мощности $|\mathscr{G}_n|$ некоторых из таких классов графов с фиксированным числом вершин n без конкретного описания элементов, их составляющих. Основной целью нашей работы является определение значений $|\mathscr{G}_n|$ как функции от $n \in \mathbb{N}$ в том случае, когда класс $\mathscr{G}_n$ состоит из графов без вершин сочленения (см. [1], [3]). Важность решения такой задачи связана с ее прикладной значимостью, так как связные графы с помеченными вершинами интенсивно используется в равновесной статистической механике, в частности, в статистической механике таких простейших, с физической точки зрения, систем, какими являются разреженные одноатомные газы (см., например, [4], [5]), где графы такого типа называются *графиками Майера*, каждому из которых сопоставляется определенное аналитическое выражение. Далее, все графы, о которых идет речь в настоящей работе, являются графами с помеченными вершинами.

Итак, согласно выше сказанному, в настоящей работе мы занимаемся решением чисто комбинаторной задачи о вычислении арифметической функций $|\mathcal{G}_n|, n \in \mathbb{N}$. Как правило, когда такая функция не «элементарна», то к решению задачи привлекается подход, основанный на применении производящих функций (см., например, [6, 7]). В рамках этого подхода, вместо непосредственного вычисления значений арифметической функции $|\mathcal{G}_n|$, ставится задача о вычислении соответствующей производящей функции $F(z)$, аналитической в некоторой окрестности нуля комплексной плоскости $z \in \mathbb{C}$ и подходящим образом определенной для возможности вычисления на основе ее коэффициентов разложения около нуля значений искомой арифметической функции. При таком подходе, целью решения задачи становится установление явного вида функции $F(z)$, и для поиска этого решения становится возможным применение методов классического математического анализа. При этом если даже возникает затруднение при установлении явного вида функции $F(z)$, но имеется возможность формулировки однозначно разрешимой задачи для ее определения и возникает возможность анализа этого решения в окрестности нуля, то можно говорить о «неявном» решении соответствующей задачи определения арифметической функции. В этом смысле, такую переформулировку исходной комбинаторной задачи в терминах производящей функции $F(z)$ можно рассматривать как ее решение. Именно такие решения мы изучаем в настоящей работе.

Во втором разделе приводятся необходимые сведения из теории графов и ставится задача, которой посвящена работа. В третьем разделе мы вводим специальные производящие функции, зависящие от дополнительного параметра ε, в терминах которых решается поставленная задача. В четвертом разделе мы даем введение в алгебраическую технику, посредством которой далее дается решение основной задачи о вычислении арифметических функций $|\mathcal{G}_n|$, где $\mathcal{G}_n$ - некоторый класс связных помеченных графов с n вершинами. Далее, в пятом разделе мы приводим примеры применения описанной алгебраической техники для решения комбинаторных задач, связанных с решением основной задачи. В шестом подготовительном разделе выводится рекуррентная формула, с помощью которой в седьмом разделе мы решаем ту основную задачу, которой посвящена работа, а именно, мы получаем функциональное уравнение для производящей функции $G(z;\varepsilon)$ числа всех помеченных графов с n вершинами без вершин сочленения.

2. Помеченные графы

Пусть имеется множество V элементов, которые мы будем называть далее *вершинами* и обозначать малыми латинскими буквами. Это предполагает, что вершины, как элементы множества V различимы. Обозначим посредством $V^{(2)}$ множество всех пар $\{x, y\} \subset V$. *Помеченным графом* над множеством V мы называем упорядоченную пару $G = \langle V, \Psi \rangle$, в которой Ψ является подмножеством из $V^{(2)}$, $\Psi \subset V^{(2)}$. Множество Ψ называется *множеством смежности* графа, а его элементы называются *ребрами* графа $\langle V, \Psi \rangle$. С точки зрения топологического подхода к понятию графа, определенная нами конструкция соответствует понятию неориентированного *простого* графа с ребрами одного типа (не содержащего петель и кратных ребер), вершины которого отмечены какими-либо метками (номерами). Наличие меток у вершин графа $\langle V, \Psi \rangle$ приводит к тому, что какая-то из перестановок номеров вершин из V может приводить к другому графу, отличному от G. Указанное обстоятельство связано с тем, что биекция множества V на себя приводит к соответствующим ей одновременным перестановкам строк и столбцов матрицы смежности графа G. Если такие перестановки не изменяют матрицы смежности, то биекция V не изменяет помеченного графа, в противном случае, она приводит к графу, отличному от исходного. Таким образом, помеченные графы различны тогда и только тогда, когда они имеют различные матрицы смежности, в отличие от графов в обычном смысле, у которых вершины не помечены. Для последних их топологическое различие определяется тем, что их матрицы смежности не могут быть получены друг из друга при какой-либо одновременной перестановке строк и столбцов.Далее, мы будем рассматривать только случай, когда множество V конечно.

Данное выше определение помеченного графа предполагает, что два графа $G_1 = \langle V_1, \Psi_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, \Psi_2 \rangle$ совпадают в том и только в том случае, когда $V_1 = V_2$ и $\Psi_1 = \Psi_2$. Отсюда, в частности, следует, что два графа над одним и тем же множеством V различны, если они отличаются своими множествами смежности Ψ_1 и Ψ_2.

Множество смежности $\Psi \subset V^{(2)}$ графа G определяет бинарное симметричное отношение *смежности* на V. Каждое такое бинарное отношение порождает бинарное отношение *связности* на V, которое обладает свойствами симметричности и транзитивности. Оно конструируется на основе понятия *пути* на графе $G = \langle V, \Psi \rangle$. Путем на графе $G = \langle V, \Psi \rangle$ называется каждая последовательность $\langle x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y \rangle$ вершин из V такая, что $\{x_j, x_{j+1}\} \in \Psi$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_0 = x$, $x_n = y$. При этом пара $\{x, y\} \subset V$ является связной на графе G, если существует путь, состоящий из вершин, которые входят в состав V. Получаемое таким образом подмножество пар из $V^{(2)}$ определяет бинарное отношение. Если же это подмножество связных пар $\langle x, y \rangle$ с $x \neq y$ дополнить парами $\langle x, x \rangle$, $x \in V$, то отношение связности становится *рефлексивным*. Тогда такое отношение превращается в отношение *эквивалентности*.

Так как каждое отношение эквивалентности на V разбивает это множество на непересекающиеся подмножества эквивалентных между собой вершин, то отношение связности разбивает множество V на непересекающиеся подмножества (компоненты) связных между собой вершин.

Граф $\langle V, \Psi \rangle$ называется *связным*, если у него, при указанном разбиении, имеется только одно подмножество эквивалентности, то есть он состоит из одной связной компоненты. Если в указанном разбиении имеется более одной компоненты V_1, V_2, ..., V_m так, что имеет место дизъюнктивное разложение $\bigcup_{j=1}^{m} V_j = V$, то такое разбиение индуцирует разбиение на компоненты Ψ_1, Ψ_2, ..., Ψ_m, $m > 1$ множества смежности Ψ так, что

$$\Psi = \bigcup_{j=1}^{m} \Psi_j, \quad \Psi_j \cap \Psi_k = \varnothing \ \textit{при} \ \ j \neq k$$

и $\Psi_j \subset V_j^{(2)}$, $j = 1 \div m$. В этом смысле можно говорить, что граф G состоит из несвязанных между собой графов $G_j = \langle V_j, \Psi_j \rangle$, $j = 1 \div m$, каждый из которых называется *связной компонентой* исходного графа.

Путь $\langle x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y \rangle$ на графе с $n \geq 3$ такой, что $x = y$, называется *циклом*. Если на графе $\langle V, \Psi \rangle$ отсутствуют циклы, то такой граф называется *древесным*.

Граф $G' = \langle V', \Psi' \rangle$, у которого $V' \subset V$, $\Psi' = \Psi \cap V'^{(2)}$ называется подграфом графа G. При этом если граф G - связный, то граф G' не обязательно является связным.

Пусть $G_1 = \langle V_1, \Psi_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, \Psi_2 \rangle$ - связные подграфы связного графа $G = \langle V, \Psi \rangle$, причем

$$V_1 \cap V_2 = \{x\}, \ V = V_1 \cup V_2; \quad \Psi = \Psi_1 \cap \Psi_2 = \varnothing, \ \Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2. \tag{1}$$

Тогда x называется вершиной сочленения графа G, а сам этот граф называется графом скленным по этой вершине. При этом граф G, по определению, является *склейкой* графов G_1 и G_2.

Если вершина x является вершиной сочленения в графе G, и этот граф представляется в виде склейки графов $G_j = \langle V_j, \Psi_j \rangle$, где $j = 1 \div p$,

$$G = \bigvee_{j=1}^{p} G_j \tag{2}$$

таких, что

$$V_j \cap V_k = \{x\}, \ \Psi_j \cap \Psi_k = \varnothing, \quad j \neq k; \ j, k = 1 \div p,$$

то число p называется степенью вершины сочленения x.

Если вершина x не является вершиной сочленения то, по определению, будем считать, что ее степень равна 1.

Если граф не обладает вершинами сочленения, то его, в дальнейшем, будем называть *блоком*. По определению, любой одновершинный граф $\{x\}$ не имеет вершины сочленения.

Если граф G содержит такой подграф $G' = \langle V', \Psi' \rangle$, что в V' существует подмножество вершин $A \subset V'$, являющихся вершинами сочленения в G, и набор непустых связных попарно несвязных друг с другом под графов $G(z) = \langle V(z), \Psi(z) \rangle$, $z \in A$ такой, что возникает биекция между элементами набора и вершинами из A, и при этом граф G представим в виде склейки

$$G = G' \vee \left[\bigvee_{z\in A} G(z)\right], \qquad (3)$$

то подграф G' будем называть блоком в графе G.

Очевидно, что если подграф $G' = \langle V', \Psi' \rangle$ графа $G = \langle V, \Psi \rangle$ является блоком, то вершины множества $V'' = \bar{V} \cap V'$ являются вершинами сочленения в графе G и степень каждой из вершин этого множества не превосходит числа $|V'| - |V''|$.

Вершина сочленения в связном графе G характеризуется следующим свойством.

Теорема 1. *Для того чтобы вершина x связного графа $G = \langle V, \Psi \rangle$ была вершиной сочленения, необходимо и достаточно чтобы существовала такая пара вершин $y_1 \in V$, $y_2 \in V$, $y_j \neq x$, $j = 1, 2$, для которой любой путь $\gamma(y_1, y_2)$ из y_1 в y_2 обязательно содержит вершину x.*

□ Необходимость. Если имеет место разложение (1) графа G на два подграфа $G_1 = \langle V_1, \Psi_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, \Psi_2 \rangle$, то для любых двух вершин $y_1 \in V_1$ и $y_2 \in V_2$, отличных от x, во всяком пути $\langle y_1, ..., y_2 \rangle$ содержится вершина x. В самом деле, рассмотрим произвольный путь $\gamma = \langle y_1, ..., y_2 \rangle$. Найдем в этом пути вершину z, которая является первой из не принадлежащих V_1 вершин, и допустим, что вершина v, предшествующая z в пути γ, не совпадает с x. Тогда, с одной стороны, связь $\{v, z\} \in \Psi$, а, с другой стороны, эта связь не может принадлежать ни одному из множеств Ψ_j, $j = 1, 2$. В самом деле, по построению, $v \notin V_2$ и, следовательно, $\{v, z\} \notin \Psi_2$. Кроме того, $z \notin V_1$ и поэтому $\{v, z\} \notin \Psi_1$. В результате, получаем противоречие с равенством $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2$.

Достаточность. Пусть y_j, $j = 1, 2$ - указанные в условии теоремы вершины графа G. Нужно доказать существование разложения (1). Определим $V_1 = \{u: \exists(\gamma(u, y_1): x \in \{\gamma(y_1, y_2)\})\} \cup \{x\}$ и $V_2 = (V \setminus V_1) \cup \{x\}$ и $\Psi_j = \{\{u, v\} \in \Psi: \{u, v\} \subset V_j\}$, $j = 1, 2$. Тогда, по построению $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \{x\}$, $\Psi_1 \cap \Psi_2 = \varnothing$. Покажем, что $\Psi_1 \cup \Psi_2 = \Psi$. Допустим противное, что существует связь $\{w_1, w_2\} \notin \Psi_j$, $j = 1, 2$ и $\{w_1, w_2\} \in \Psi$. Это возможно только в том случае, когда w_j, содержатся в разных множествах и не совпадают с x. В силу определения V_1, существует путь $\gamma(y_1, w_1)$ на графе G, полностью расположенный в V_1. Если пара $\{w_1, w_2\}$ содержится в Ψ, то существует путь $\gamma(y_1, w_1) \vee \langle w_1, w_2 \rangle$, который не проходит через вершину x, что противоречит тому, что $w_2 \notin V_1$. Определив графы $G_j = \langle V_j, \Psi_j \rangle$, $j = 1, 2$, получим, что $G_1 \vee G_2$ и склейка происходит по вершине x. +

Докажем, что для любого связного графа имеет место разложение (2).

Теорема 2. *Пусть* x *- вершина сочленения связного графа* $G=\langle V,\Psi\rangle$. *Тогда существует число* $s\geq 2$ *и однозначным образом определяемый набор связных графов* $G_j=\langle V_j,\Psi_j\rangle$, $j=1\div s$, *в каждом из которых вершина* x *уже не является вершиной сочленения, и при этом имеют место следующие соотношения*

$$V=V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_s,\quad V_i\cap V_j=\{x\}, i\neq j; i,j=1\div s;$$

$$\Psi=\Psi_1\cup\Psi_2\cup\ldots\cup\Psi_s,\quad \Psi_i\cap\Psi_j=\{x\}, i\neq j; i,j=1\div s.$$

□ Построим указанное в условиях теоремы разложение. Так как x - вершина сочленения графа G, то имеется два графа $G_j^{(1)}=\langle V_j^{(1)},\Psi_j^{(1)}\rangle$, $j=1,2$ таких, что $V_1^{(1)}\cup V_2^{(1)}=V$, $V_1^{(1)}\cap V_2^{(1)}=\{x\}$ и $\Psi_1^{(1)}\cap\Psi_2^{(1)}=\varnothing$, $\Psi_1^{(1)}\cap\Psi_2^{(1)}=\Psi$.

Если в графах $G_j^{(1)}$, $j=1,2$ вершина x не является вершиной сочленения, то построение закончено и, согласно определению, $s=2$. Если же, по крайней мере, в одном из этих графов вершина x является вершиной сочленения, то для каждого такого графа с номером j_1, равным 1 или 2, существует пара графов $G_{j_1,j}^{(2)}=\langle V_{j_1,j}^{(2)},\Psi_{j_1,j}^{(2)}\rangle$, $j=1,2$ таких, что $V_{j_1,1}^{(2)}\cup V_{j_1,2}^{(2)}=V_{j_1}^{(1)}$, $V_{j_1,1}^{(2)}\cap V_{j_1,2}^{(2)}=\{x\}$ и $\Psi_{j_1,1}^{(2)}\cap\Psi_{j_1,2}^{(2)}=\varnothing$, $\Psi_{j_1,1}^{(2)}\cup\Psi_{j_1,2}^{(2)}=\Psi_{j_1}^{(1)}$. Если же у графа $G_{j_1}^{(1)}$ вершина x с номером j_1 не является вершиной сочленения, то графу $G_{j_1}^{(1)}$ сопоставим пару графов $G_{j_1,1}^{(2)}=G_{j_1}^{(1)}$ и $G_{j_1,2}^{(2)}=\langle\{x\},\varnothing\rangle$. Таким образом, для каждого $j_1=1,2$ имеется пара графов $G_{j_1,j_2}^{(2)}$, $j_2=1,2$.

Далее, если у вновь построенных графов Ψ_{j_1,j_2}; $j_1,j_2=1,2$ вершина x не является вершиной сочленения, то построение заканчивается и, по определению, s равно числу тех графов $G_{j_1,j_2}^{(2)}$, у которых множество связности Ψ_{j_1,j_2} не пусто. Если же среди всех вновь построенных графов найдутся такие, у которых вершина x является вершиной сочленения, то построение продолжается.

Каждому графу $G_{j_1,j_2}^{(2)}$, обладающему вершиной сочленения, сопоставим пару графов $G_{j_1,j_2,j}^{(3)}=\langle V_{j_1,j_2,j}^{(3)},\Psi_{j_1,j_2,j}^{(3)}\rangle$, $j=1,2$ таких, что $V_{j_1,j_2,1}^{(3)}\cup V_{j_1,j_2,2}^{(3)}=V_{j_1,j_2}^{(2)}$, $V_{j_1,j_2,1}^{(3)}\cap V_{j_1,j_2,2}^{(3)}=\{x\}$ и $\Psi_{j_1,j_2,1}^{(3)}\cap\Psi_{j_1,j_2,2}^{(3)}=\varnothing$, $\Psi_{j_1,j_2,1}^{(3)}\cup\Psi_{j_1,j_2,2}^{(3)}=\Psi_{j_1,j_2}^{(2)}$. Для тех же графов $G_{j_1,j_2}^{(2)}$, у которых вершина x не является вершиной сочленения, положим $G_{j_1,j_2,1}^{(3)}=G_{j_1,j_2}^{(2)}$ и $G_{j_1,j_2,2}^{(3)}=\langle\{x\},\varnothing\rangle$. Если у всех построенных графов вершина x не является вершиной сочленения, процедура построения новых графов останавливается. Если же это не так, то переходим к новому шагу построения.

Описанный алгоритм построения все более мелких графов, у которых вершина x является вершиной сочленения, должен завершиться на каком - то шаге m, так как множество вершин исходного графа G конечно. При завершении описанного процесса построения набора подграфов исходного графа G, выберем из всех полученных графов $G^{(m)}_{j_1,\dots,j_m} = \langle V^{(m)}_{j_1,\dots,j_m}, \Psi^{(m)}_{j_1,\dots,j_m} \rangle$; $j_k = 1,2$, $k = 1 \div m$ те, у которых $\Psi^{(m)}_{j_1,\dots,j_m} \neq \varnothing$. Пусть число таких графов равно s. В результате, получен набор неодновершинных графов, каждый из которых содержит вершину x, которая у каждого из них не является вершиной сочленения. Обозначим эти графы, занумеровав их произвольным образом, посредством $G^{(1)} = \langle V^{(1)}, \Psi^{(1)} \rangle$, ..., $G^{(s)} = \langle V^{(s)}, \Psi^{(s)} \rangle$. Для этого набора графов, по построению, выполняется

$$V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup \ldots \cup V^{(s)} = V, \quad \Psi^{(1)} \cup \Psi^{(2)} \cup \ldots \cup \Psi^{(s)} = \Psi; \tag{4}$$

$$V^{(j)} \cap V^{(k)} = \{x\}, \qquad \Psi^{(j)} \cap \Psi^{(k)} = \varnothing \ \text{при} \ j \neq k; j,k = 1 \div s. \tag{5}$$

Покажем, что набор графов $G^{(1)}$, ..., $G^{(s)}$ выбирается однозначным образом. Допустим противное, что имеется два разных набора графов, удовлетворяющих (4) и (5): уже указанный набор $G^{(j)} = \langle V^{(j)}, \Psi^{(j)} \rangle$, $j = 1,\dots,s$ и набор графов $G^{(j)'} = \langle V^{(j)'}, \Psi^{(j)'} \rangle$, $j = 1,\dots,s'$, удовлетворяющий аналогичным условиям, а именно

$$V^{(1)'} \cup V^{(2)'} \cup \ldots \cup V^{(s')'} = V, \quad \Psi^{(1)'} \cup \Psi^{(2)'} \cup \ldots \cup \Psi^{(s')'} = \Psi; \tag{4'}$$

$$V^{(j)'} \cap V^{(k)'} = \{x\}, \qquad \Psi^{(j)'} \cap \Psi^{(k)'} = \varnothing \ \text{при} \ j \neq k; j,k = 1 \div s'. \tag{5'}$$

Не ограничивая общности будем считать, что $s \leq s'$. В противном случае, поменяем штрихованный и нештрихованный наборы графов ролями в нижеследующих рассуждениях.

Возьмем любую вершину y_1 из $V^{(1)}$, отличную от x, и найдем номер того графа среди $G^{(j)'}$, $j = 1 \div s'$, в котором она содержится. Не ограничивая общности, можно считать, что таковым является граф $G^{(1)'}$. Тогда $V^{(1)} \cap V^{(1)'} \supset \{x, y_1\}$. Допустим, что $V^{(1)} \neq V^{(1)'}$. Следовательно, $(V^{(1)}, \ V^{(1)'}) \cup (V^{(1)'}, \ V^{(1)}) \neq \varnothing$. Положим для определенности, что не пуста первая компонента объединения и $z_1 \in V^{(1)}, \ V^{(1)'}$. Тогда, так как объединение всех множеств $V^{(j)}$, $j = 1 \div s$ совпадает с объединением всех множеств $V^{(j)'}$, $j = 1 \div s'$, то найдетсятакой номер $k_1 \neq 1$, для которого $z_1 \in V^{(k_1)'}$. Так как z_1 и y_1 принадлежат одному и тому же множеству $V^{(1)}$, то существует путь $\gamma(y_1, z_1)$, расположенный в V и не проходящий через вершину x. Но это противоречит тому, что y_1 и z_1 содержатся в различных множествах $V^{(1)'}$ и $V^{(k_1)'}$, склеенных в вершине x. Это противоречие указывает на то, что $V^{(1)} = V^{(1)'}$. Удалив эти блоки $V^{(1)}$ и $V^{(1)'}$, каждый из своего набора, применим всю описанную для блока $V^{(1)}$ процедуру к блоку $V^{(2)}$, то есть найдем вершину $y_2 \neq x$, $y_2 \in V_2$; найдем по этой вершине соответствующий граф в наборе штрихованных графов и обозначим его посредством $G^{(2)'}$. В результате аналогичных рассуждений покажем, что $V^{(2)} = V^{(2)'}$. Продолжим описанную процедуру вплоть до исчерпания всего набора графов $G^{(j)}$, $j = 1 \div s$. Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы установили, что каждый из графов $G^{(j)}$, $j=1\div s$ совпадает с соответствующим графом $G^{(j)'}$. Так как при этом исчерпается весь запас вершин из множества V, то $s=s'$ и оба набора графов совпадают.

Теорема 3. *Пусть x- вершина графа $G=\langle V,\Psi\rangle$, не являющаяся вершиной сочленения.Тогда в графе G найдется единственный блок $G'=\langle V',\Psi'\rangle$, в котором она содержится.*

 Пусть $\bar{V}$ - множество вершин сочленения графа G и $x\notin\bar{V}$ - вершина, о которой идет речь в формулировке теоремы. Если $\bar{V}=\varnothing$, то G - блок и в этом случае теорема доказана. Если $\bar{V}\neq\varnothing$, то выделим тот блок, о котором идет речь в формулировке теоремы, посредством алгоритма *дробления* графа G. Опишем первый шаг этого алгоритма. Возьмем первую из вершин y_1 со степенью s_1, принадлежащих $\bar{V}$. Тогда представим граф G в виде склейки $G=G_1^{(1)}\vee G_2^{(1)}$ двух графов $G_1^{(1)}=\langle V_1,\Psi_1\rangle$ и $G_2^{(1)}=\langle V_2,\Psi_2\rangle$ так, что $V_1\cap V_2=\{y_1\}$, $V=V_1\cup V_2$. Выберем из этих двух графов тот, в котором содержится вершина x. Так как x не является вершиной сочленения, то только один граф из представленных двух графов обладает таким свойством. Положим, что этим свойством обладает граф $G_1^{(1)}$.При этом множество $\bar{V}_1$ является собственным подмножеством $\bar{V}$. При этом вершина сочленения y_1 в графе $G_1^{(1)}$ обладает меньшей степенью чем s_1. Мы описали первый шаг алгоритма дробления. Если граф $G_1^{(1)}$ является блоком, то есть не имеет вершин сочленения, то теорема доказана. Если же он не является блоком, то перейдем к следующему шагу дробления.

Применим описанный алгоритм к графу $G^{(1)}$. При этом мы будем использовать вершину сочленения y_1, если она осталасьтаковой в графе $G^{(1)}$, либо возьмем новую вершину сочленения y_2 со степенью s_2, которая содержится в графе$G_1^{(1)}$ В результате применения алгоритма дробления, получим новый граф $G_1^{(2)}$, в котором содержится вершина x и в котороммножество его вершин сочленения $\bar{V}_2$ является собственным подмножестсвом множества $\bar{V}_1$ и степень вершины сочленения y_2 в нем меньше s_2, причем граф $G_1^{(1)}$ представим в виде склейки $G_1^{(1)}=G_1^{(2)}\vee G_2^{(2)}$ со связным графом $G_2^{(2)}$.Таким образом, исходный граф G представим в виде склейки $G=G^{(1)}\vee G_2^{(2)}\vee G_2^{(1)}$.

Продолжим применение алгоритма дробления до тех пор пока на каком-то шаге вновь полученный граф $G_1^{(m)}$ не имеетвершин сочленения, однако при этом он содержит вершину x. Кроме того, так как имеет место$G=G_1^{(m)}\vee(G_2^{(m-1)}\vee\ldots\vee G_2^{(1)})$.+

3. Алгебра A коэффициентов производящих функций

Настоящая работа посвящена решению комбинаторной задачи о вычислении функции M_n, значением которой при каждом $n \in \mathbb{N}$ является число всех помеченных графов без вершин сочленения с числом вершин $n \in \mathbb{N}$, а также связанной с ней задачей вычисления чисел N_n, $n \in \mathbb{N}$, равных при каждом $n \in \mathbb{N}$ числу всех связных помеченных графов с числом вершин n.

При решении комбинаторной задачи очень редко удается найти явный вид функции натурального(ых) аргумента(ов), представляющие такие решения. Чаще представляется возможность найти рекуррентную(ые) формулу(ы), определяющую(ие) значения этой функции последовательно. Именно такая ситуация реализуется при вычислении функции N_n, $n \in \mathbb{N}$.

В более сложных ситуация, когда невозможно найти явные рекуррентные формулы, имеется возможность найти решение задачи в виде явного выражения для подходящим образом определенной *производящей функции* (см., например, [8-10]), которая(ые) является(ются) аналитическими от комплексного(ых)переменного(ых) z в окрестности нуля комплексной плоскости их изменения и при этом решение исходной комбинаторной задачи выражается через коэффициенты их степенных рядов. Наконец, в еще более сложной ситуации, явные формулы для производящих функций не удается найти на основе элементарных аналитических функций, а возможно только лишь найти уравнение, которому они подчиняются и являются при подходящих условиях его единственным решением. Тогда найденное уравнение можно рассматривать в качестве искомого решения комбинаторной задачи. Именно такая ситуация реализуется для комбинаторной функции M_n, $n \in \mathbb{N}$.

Далее, мы будем рассматривать производящие функции вида

$$F_{\mathcal{G}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} |\mathcal{G}_n|$$

чисел $|\mathcal{G}_n|$ элементов в классах $\mathcal{G}_n$.Для вычисления таких производящих функций, а также для установления уравнений связывающих производящие функции, которые соответствуют связанным друг с другом комбинаторным функциям, мы применим специальный алгебраический метод. Этот метод основан на применениибесконечномерной, коммутативной алгебре с единицей для последовательностей коэффициентов функций $F_{\mathcal{G}}(z)$.

Обозначим посредством $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ - стандартное n-элементное множество, $n \in \mathbb{N}$. Пусть L линейное пространство бесконечных последовательностей $\mathbf{a} = \langle a_m; m \in \mathbb{N}_+ \rangle$, в которых каждая компонента a_m при любом $m \in \mathbb{N}_+$ является симметричной измеримой функцией a_m на $[0,1]^m$ со значениями в $\mathbb{R}$, $a_m(X_m) \equiv a_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $X_m = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle \in [0,1]^m$. Для значения $m = 0$ такие функции $a_0 \in [0,1]$, полагаются константами. Линейное пространство L превращается в коммутативную алгебру A при определении на нем следующей бинарной операции $*$, которую будем называть*умножением*. Каждой паре $\mathsf{a} = \langle a_m; m \in \square_+ \rangle$ и $\mathsf{b} = \langle b_m; m \in \square_+ \rangle$ последовательностейиз A сопоставим последовательность $\mathsf{a} * \mathsf{b}$ - результат умножения последовательностей a и b, компоненты которой определяются формулой

$$(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n (X(I_n)) = \sum_{A \subset I_n} a_{|A|}(X(A)) b_{|I_n \setminus A|}(X(I_n \setminus A)), \tag{6}$$

в которой использованы следующие обозначения:

$X(A) = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s} \rangle$ для каждого $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset I_n$, где $|A| = s$ - число элементов в A так, что $X_n = X(I_n)$. Очевидно, что функции $(\mathsf{a} * \mathsf{b})_n (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметричны при любом $n \in \square$ и результатом применения операции $*$ к двум последовательностям a и b снова является последовательность симметричных функций. Точно также, очевидным образом, операция $*$, действительно, является умножением, так как она обладает всеми свойствами, которые предъявляются к операции умножения в общеалгебраическом смысле (см, например, [11]), так как она согласована с операциями линейного пространства. Введенная операция умножения ассоциативна и коммутативна.

Таким образом, линейное пространство A, снабженное операцией $*$ является бесконечномерной коммутативной алгеброй. В этой алгебре имеется единица, которая представляет последовательность $\mathsf{e} = \langle 1, 0, 0, \ldots \rangle$.

Рассмотрим в алгебре A линейное подпространство A_0, которое состоит из таких последовательностей $\mathsf{a} = \langle a_m(X_m); m \in \square_+ \rangle$, у которых $a_0 = 0$. Это линейное пространство представляет собой максимальный идеал алгебры A, то есть оно замкнуто относительно умножения и не содержится ни в каком другом множестве, обладающем таким свойством.

Напомним, что разложением стандартного множества I_n называется неупорядоченный набор A непустых множеств A_j, $j = 1 \div s$, которые составляют дизъюнктивное разложение множества I_n:

$$\bigcup_{l=1}^{s} A_l = I_n, \quad A_j \cap A_k \neq \varnothing, \;\; j \neq k; \;\; j, k = 1 \div s,$$

где s - число элементов разложения (мощность). Класс всех разложений множества I_n обозначим посредством $\mathcal{S}_n$.

Точно также обоначим класс всех разложений A, каждое из которых содержит m подмножеств множества I_n, обозначим посредством$\mathcal{S}_n^{(m)}$. Для каждого $\mathsf{a} \in \mathrm{A}_0$ рассмотрим степень a_*^m с любым $m \in \square$. При этом, по определению, положим $\mathsf{a}_*^0 = \mathsf{e}$. Тогда компоненты $(\mathsf{a}_*^m)_n$ последовательностиa_*^m равны нулю при $n > m$. Если же $n \leq m$., то эти компоненты даются формулой

$$\left(\mathsf{a}_*^m\right)_n(X(I_n)) = m! \sum_{\mathrm{A}\in S_n^{(m)}} \prod_{A\in\mathrm{A}} a_{|A|}(X(A)).$$

Определим, теперь, на алгебре A экспоненциальную функцию:

$$\exp_* \mathsf{a} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathsf{a}_*^m .$$

Принимая во внимание замечание относительно степеней элементов из A_0, находим, что для $\mathsf{a} \in \mathrm{A}_0$ имеет место формула

$$\left[\exp_* \mathsf{a}\right]_n(X(I_n)) = \Big[\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \mathsf{a}_*^m\Big](X(I_n)) = \sum_{\mathrm{A}\in S_n} \prod_{A\in\mathrm{A}} a_{|A|}(X(A)), \tag{7}$$

где суммирование производится по всем разложениям множества I_n с любым допустимым числом $s = 1,\dots,n$ компонент.

Определим, теперь, на алгебре A линейный функционал $L(z;\cdot)$, зависящий от параметра $z \in \square$. Для каждого элемента $\mathsf{a} = \langle a_m; m \in \square \rangle \in \mathrm{A}$ значение $L(z;\mathsf{a})$ этого функционала определяется формулой

$$L(z;\mathsf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[0,1]^n} a_n(X_n) dX_n, \tag{8}$$

где $dX_n = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ - мера Лебега на $[0,1]^n$. Область определения функционала $L(\cdot;\cdot)$ содержит все последовательности a, в которых все функции равномерно ограничены и при этом его значения конечны при всех $z \in \square$.

Теорема 4. *Функционал L мультипликативен, то есть для каждой пары таких последовательностей* $\mathsf{a} = \langle a_m; m \in \square \rangle$ и $\mathsf{b} = \langle b_m; m \in \square \rangle$ из A , у которых $|L(z;\mathsf{a})| < \infty$, $|L(z;\mathsf{b})| < \infty$, *имеет место равенство*

$$L(z;\mathsf{a}*\mathsf{b}) = L(z;\mathsf{a})L(z;\mathsf{b}). \tag{9}$$

$\square$ Доказательство проводится приводимым ниже прямым вычислением. Согласно определению (8),

$$L(z;\mathsf{a}*\mathsf{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[0,1]^n} (\mathsf{a}*\mathsf{b})_n(X(I_n)) dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[0,1]^n} \sum_{\omega\subset I_n} a_{|A|}(X(A)) b_{|I_n \setminus A|}(X(I_n \setminus A)) dX_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{A\subset I_n} \int_{[0,1]^n} a_{|A|}(X(A)) b_{|I_n \setminus A|}(X(I_n \setminus A)) dX_n .$$

После замены переменных интегрирования $X(A)$, $|A| = m$ на $X(I_m)$ и $X(I_n \setminus A)$ на $X(I_n \setminus I_m)$ в каждом из слагаемых и используя правило перестройки суммирований

$$\sum_{A\subset I_n}\ldots=\sum_{m=0}^{n}\sum_{A\subset I_n:|A|=m}\ldots\,,\qquad \sum_{A\subset I_n:|A|=m}1=\binom{n}{m},$$

получаем

$$L(z;\mathsf{a}*\mathsf{b})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{A\subset I_n}\int_{[0,1]^n}a_m(X_m)b_{n-m}(X(I_n\ ,\ I_m))dX_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int_{[0,1]^n}a_m(X_m)b_{n-m}(X(I_n\ ,\ I_m))dX_n=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\int_{[0,1]^m}a_m(X_m)dX(I_m)\int_{[0,1]^{n-m}}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{z^{n-m}}{(n-m)!}b_{n-m}(X(I_n\ ,\ I_m))dX(I_{n-m})=$$

$$=\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\int_{[0,1]^m}a_m(X_m)dX(I_m)\Big)\cdot\Big(\int_{[0,1]^n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}b_n(X(I_n))dX(I_n)\Big)=L(z;\mathsf{a})L(z;\mathsf{b}).$$

Перестановки порядка суммирований обосновывается абсолютной сходимостью рядов для значений $L(z;\mathsf{a})$, $L(z;\mathsf{b})$ функционала в некотором круге ненулевого радиуса в комплекскной плоскости z .+

Следствие. *Если последовательность* $\mathsf{a}=\langle a_m;m\in\mathbb{N}\rangle\in\mathrm{A}_0$ *и состоит из равномерно ограниченных в совокупности функций, то*

$$L\big(z;\exp_*\mathsf{a}\big)=\exp\big(L(z;\mathsf{a})\big),\tag{10}$$

где функция комплексного переменного z в правой части является аналитической в окрестности нуля.

□ Формула (10) является следствием линейности и мультипликативности функционала $L(z;\cdot)$ +

Продемонстрируем эффективность использования алгебры A и с вязанных с ней понятий на примере решения комбинаторной задачи о числе C_n всех разложений множества I_n с фиксированным значением $n\in\mathbb{N}$. При малых значениях $n=1,2,3$ соответствующее число C_n легко устанавливается перебором всех разложений:

1. При $n=1$, $I_1=\{1\}$ имеется только одно разложение с $s=1$, $A_1=I_1=\{1\}$. $C_1=1$.

2. При $n=2$, $I_2=\{1,2\}$ имеется два разложения с $s=1$, $A_1=I_2$ и с $s=2$, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$. $C_2=2$.

3. При $n=3$, $I_3=\{1,2,3\}$ имеется пять разложений с $s=1$, $A_1=I_3$ и с $s=2$: $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3\}$;
$A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$; $A_1=\{1,3\}$, $A_2=\{2\}$; с $s=3$, $A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$, $A_3=\{3\}$. $C_3=5$.

Для вычисления числа C_n для любого значения $n\in\mathbb{N}$ заметим, что

$$C_n = \sum_{A \in S_n} 1.$$

Поэтому, полагая в (7) $a_n(X(I_n)) \equiv 1$, получим, что

$$C_n = (\exp_* \mathsf{a})_n (X(I_n)), \qquad \mathsf{a} = \langle 0,1,1,\ldots \rangle,\ n \in \mathbb{N}_+ \tag{11}$$

для любой точки $X_n \in [0,1]^n$, где последовательность a является элементом идеала A_0. Эта формула является основой для вычисления производящей функции $D(z)$ чисел C_n

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} C_n, \tag{12}$$

в которой полается, по определению, $C_0 = 0$. На основании Следствия Теоремы 4, находим, что справедлива

Теорема 5. *Производящая функция (12) является аналитической функцией, определяемой в достаточно малой окрестности нуля на вещественной оси z, радиус которой определяется наименьшим решением уравнения*

$$D(z) = \exp(z-1). \tag{13}$$

□ Так как последовательность $\mathsf{a} = \langle a_n(X(I_n)); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, где $a_n(X(I_n)) \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$, находится в A_0, то

$$D(z) = L(z;\mathsf{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$$

и, согласно формулам (10) и (11),

$$L(z; \exp_* \mathsf{a}) = \exp\left(L(z;\mathsf{a})\right) = \exp\left(e^z - 1\right). \quad +$$

Произведем расчет первых пяти значений C_n на основе формулы (13), где $C_n = D^{(n)}(0)$. Заметим, что $D^{(n)}(z) = D(z)P_n(e^z)$, где $P_n(x)$ - полином n-й степени, где $P_1(x) = x$. При этом полиномы P_n, $n \in \mathbb{N}$ вычисляются рекуррентно по формуле

$$P_{n+1}(x) = x\left(P_n'(x) + P_n(x)\right),$$

что проверяется непосредственным дифференцированием

$$D^{(n+1)} = D'(z)P_n(e^z) + D(z)P_{n'}(e^z)e^z = D(z)\left(P_n(e^z) + P_{n'}(e^z)\right)e^z.$$

Так как $D(0) = 1$ и $C_n = D^{(n)}(0) = D(0)P_n(1)$, $P_{n+1}(1) = P_n(1) + P_n'(1)$, то

$$P_1(x) = x \qquad C_1 = 1;$$
$$P_2(x) = x + x^2 \qquad C_2 = 2;$$
$$P_3(x) = x + 3x^2 + x^3 \qquad C_3 = 5;$$
$$P_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4, \qquad C_4 = 15;$$
$$P_5(x) = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5, \qquad C_5 = 52;$$

то есть эти значения совпадают со значениями C_1, C_2, C_3, вычисленными выше перебором имеющихся вариантов.

4. Применение алгебраического метода

В этом пункте мы продемонстрируем применение алгебраической техники, описанной в предыдущем пункте, на примере вычисления производящей функции для числа L_n всех связных древесных графов с n помеченными вершинами(см.[9]). в простейших случаях при $n = 1, 2, 3, 4$ числа L_n даются следующими значениями.

1. При $n = 1$, $V = \{1\}$ имеется только один граф $\langle\{1\}, \varnothing\rangle$, состоящий из единственной вершины 1. Он, по определению, является связным и древесным, то есть $L_1 = 1$.

2. При $n = 2$, $V = \{1, 2\}$ имеется только один связный граф $\langle\{1,2\}, \Psi = \{1,2\}\varnothing\rangle$, который, из-за наличия только двух вершин, не содержит циклов. Следовательно, он является древесным, то есть $L_2 = 1$.

3. При $n = 3$, $V = \{1, 2, 3\}$ имеется три связных графа без циклов, соответственно, со следующими множествами смежности: $\Psi = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$, $\Psi = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$, $\Psi = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$. Все они различны как графы с помеченными вершинами. Следовательно, $L_3 = 3$.

4. При $n = 4$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ имеется 16 различных древесных графов. Соответствующие им множества смежности которых мы распределим на две группы топологически совпадающих друг с другом графов в каждой из них:

4 графа вида $\Psi = \{\{i, j\}; j = 1 \div 4, j \neq i\}$, где $i = 1 \div 4$;

12 графов вида $\Psi = \{\{i,k\},\{j,l\},\{k,l\}\}$, где $\{i, j\} \subset \{1,2,3,4\}$, $\{k,l\} \subset \{1,2,3,4\}$, $\{i, j\} \cap \{k,l\} = \varnothing$;

Следовательно, $L_4 = 16$.

Теорема 6. Для функции L_n, $n \in \mathbb{N}$ имеет место следующая рекуррентная формула

$$L_{n+1} = \sum_{\mathrm{A} \in S_n} \prod_{A \in \mathrm{A}} |A| L_{|A|}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

□ Для каждого древесного графа $G = \langle V, \Psi\rangle$ над множеством вершин $V = I_{n+1}$ выполним следующее построение. Сопоставим графу G совокупность древесных графов G_j, $j = 1, \dots, s$, получающихся удалением из него вершины $(n+1)$ вместе со всеми ребрами, инцидентными этой вершине, то есть сопоставляется, вообще говоря, несвязный граф $\langle V, \{n+1\}, \Psi, \{x \in V, \{n+1\}: \{x, n+1\} \in \Psi\}\rangle$.Связные компоненты этого графа представляют совокупность графов G_j, $j = 1,\dots,s$. Каждая из этих связных компонент является древесным графом, так как если бы в какой-то из них имелся цикл, то он должен присутствовать в исходном графе. Каждая из связных компонент образована некоторым подмножеством вершин $A_j \subset I_n$ и множеством ребер Ψ_j.

Отметим вершины $x_j \in A_j$, $j = 1 \div s$ такие, что ребро $\{x_j, n+1\}$ содержится в Ψ, которое удаляется вместе с удалением вершины $(n+1)$.

Для всей совокупности множеств $\{A_j; j = 1 \div s\}$ и связанных с ними ребер $\{\Psi_j; j = 1 \div s\}$ выполняется

$$\bigcup_{j=1}^{s} A_j = I_n,\ A_k \cap A_l = \varnothing;\quad \bigcup_{j=1}^{s} \Psi_j = \Psi,\quad \{\{x_j, n+1\}; j = 1 \div s\},\ \Psi_k \cap \Phi_l = \varnothing$$

При $k \neq l; k, l = 1 \div s$.

Таким образом, каждомуграфу G, на основе описанной конструкции, сопоставляется, сначала, разложение $\mathrm{A} \in S_n$, а затем, на основе этого разложения, - множество отмеченных вершин $\{x_j \in A_j : A_j \in \mathrm{A}, j = 1 \div s\}$. и набор древесных графов $G_j = \langle A_j, \Phi_j \rangle$, $j = 1 \div s$. Они характеризуют граф G, то есть, при фиксации указанных математических объектов, граф G однозначно восстанавливается, что достигается присоединением к вершинам I_n вершины $(n+1)$ и ребер $\{x_j, n+1\}$, $j = 1 \div s$ - к совокупности ребер $\bigcup_{j=1}^{s} \Phi_j$.

В связи с доказанной характеризацией каждого из деревьев на множестве вершин $V = I_{n+1}$, распределим все деревья над V по классам эквивалентности$S(\mathrm{A})$, занумерованным разложениями $\mathrm{A} \in S_n$ так, что каждому древесному графу из фиксированного класса $S(\mathrm{A})$ соответствует одно и то же разложение $\mathrm{A} \in S_n$. Тогда

$$L_{n+1} = \sum_{A \in S_n} |S(A)|. \tag{15}$$

Найдем число элементов в каждом классе $S(A)$, $\mathrm{A} \in S_n$. Для этого заметим, что, для фиксированного$\mathrm{A} = \{A_j; j = 1 \div s\}$, каждая из вершин x_j и каждый древесный граф S_j над множеством вершин A_j, $j = 1 \div s$ могут быть выбраны независимо от всех остальных вершин $x_k \in A_k$ и всех графов S_k над этими множествами, $k \in I_s$, $\{j\}$. Следовательно, в силу*принципа* *умножения* (см., например, [7]), $|S\ (A)| = \prod_{A \in \mathrm{A}} s(A)$, где $s(A)$ - число способов выбора отмеченной вершины x в A и, одновременно, выбора древесного графа над множеством вершин A. Так как каждый из этих объектов может быть выбран независимо от другого, то, в силу принципа умножения, $s(A)$ равно произведению числа вершин в A на число древесных графов, которые можно построить на множестве A, $s(A) = |A| L_{|A|}$. Тогда из (15) следует, что $|S\ (A)| = \prod_{A \in \mathrm{A}} |A| L_{|A|}$. +

Полученная рекуррентная формула (14), в принципе, позволяет последовательно вычислять все числа L_n, $n \in \mathbb{N}$ на основе начального значения $L_1 = 1$, выполняя многократные суммирования в этой формуле. Но мы, здесь, с методической целью, вычислим производящую функцию

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} L_{n+1}, \tag{16}$$

в которой положено $L_0 \equiv 0$, для ‘этого бесконечного набора чисел, точно также как и для набора чисел C_n, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 7. *Производящая функция $H(z)$ является аналитической функцией в достаточно малой окрестности нуля на вещественной оси z и определяется как наименьшее решение уравнения*

$$H(z) = \exp\big(zH(z)\big). \tag{17}$$

□ Определим последовательность функций $\mathsf{a} = \langle a(X_n); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, где $a(X_n) \equiv nL_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $a(\varnothing) = 0$, $\mathsf{a} \in \mathrm{A}_0$, то есть все функции этой последовательности являются постоянными. Согласно формуле (14),

$$L_{n+1} = \int_{[0,1]^n} \big(\exp_* \mathsf{a}\big)_n (X_n) dX_n.$$

Тогда определение (16) производящей функции $H(z)$ может быть представлено в виде

$$H(z) = \mathsf{L}\big(z; \exp_* \mathsf{a}\big).$$

Воспользовавшись формулой (10), запишем это равенство в виде

$$H(z) = \exp \mathsf{L}\big(z; \mathsf{a}\big).$$

Наконец, преобразуем форму, стоящую в экспоненте,

$$\mathsf{L}\big(z; \mathsf{a}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{[0,1]^n} a_n(X_n) dX_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} L_n = zH(z). \ +$$

Пример: Правильность полученного уравнения для производящей функции легко проверяется вычислением на его основе значений L_n при $n = 1, 2, 3, 4$.

Положим $H(z) = \exp R(z)$, $R(z) = zH(z)$. Тогда при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$R^{(n)} = zH^{(n)} + nH^{(n-1)}. \tag{18}$$

Определим функции $S_n(z)$ равенством $H^{(n)}(z)=e^{R(z)}S_n(z)$. Из этого определения следует рекуррентное соотношение

$$S_{n+1}(z)=S_n(z)R'(z)+S_n'(z), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{19}$$

причем $S_1(z)=zH'(z)+H(z)$. Равенство (18) при $n=2,3,\ldots$ запишем в виде

$$R^{(n)}(z)=zS_n(z)+nS_{n-1}(z). \tag{20}$$

Вычислим теперь L_n при $n=1,2,3,4$, исходя из неявно заданной уравнением (17) производящей функции, $L_n=H^{(n-1)}(0)$. Из (18) следует, что $R'(0)=1$, а из (20) - $R^{(n)}(0)=S_{n-1}(0)$. Тогда $L_1=H(0)=1$, $L_2=H'(0)=R'(0)=1$.

Для вычисления значений L_3, L_4 нужно найти $S_2(0)$, $S_3(0)$ на основе рекурренции (19). Для этого нужно вычислить значения производных $S_1'(0)$, $S_2'(0)$. Они получаются из рекуррентного соотношения

$$S_{n+1}'(z)=S_n''(z)+S_n'(z)R'(z)+S_n(z)R''(z), \quad n\in\mathbb{N} \tag{21}$$

и отдельно

$$S_1'(z)=zH''(z)+2H'(z).$$

Отсюда следует при $n=1$, что $S_2'(0)=S_1''(0)+S_1'(0)R'(0)+S_1(0)R''(0)$. Так как $S_1'(0)=2H'(0)=2$ и из (20) следует $R''(0)=2S_1(0)=2H(0)=2$, то $S_2(0)=S_1(0)+S_1'(0)=3$ и, следовательно, $L_3=3$.

Далее, из вычисленных значений также следует, что $S_2'(0)=S_1''(0)+4$, и так как $S_1''(z)=zH'''(z)+3H''(z)$, то $S_1''(0)=3H''(0)=3S_2(0)=9$. Поэтому $S_2'(0)=13$ и, следовательно, из (20) следует $L_4=S_3(0)=S_2(0)+S_2'(0)=16$. Полученные значения совпадают со значениями, вычисленными в начале раздела.

Уравнение (14) определяет аналитическую функцию в круге с радиусом e^{-1}.В самом деле, особенность неявно заданной уравнением (14) функции $H(z)$ находится на вещественной оси. Это следует из (14), так как $H'(z)=H^2(z)(1-zH(z))$ и особенности функции лежат там, где $zH(z)=1$. Тогда, ввиду вещественности $zH(z)$ в этих точках, из (14) следует, что $H(z)$ и, следовательно, z также вещественны. Далее, на вещественной оси, ввиду выпуклости функции вещественной переменной e^{xH} относительно H, ее график имеет два пересечения с графиком линейной функцией от H, если $x>0$ и достаточно мало. График имеет одно пересечение при $x<0$. Следовательно, уравнение (14) относительно H имеет два решения при вещественных положительных и достаточно близких к нулю x. В этом случае мы выбираем, в качестве значения неявно заданной функции $H(x)$, наименьший корень уравнения. Именно он, по непрерывности, переходит в единственный корень уравнения (14) при $x < 0$. Исчезновение же корней уравнения (14) при $x > 0$ происходит в точке бифуркации x_*, в которой исчезает пересечение линейной по H функции с функцией e^{xH}. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в этой точке, кроме равенства $H = e^{x_* H}$, имело место равенство производных по H, $x_* e^{x_* H} = 1$. Из полученной системы двух уравнений находим $x_* H = 1$, то есть бифуркация реализуется в точке, где $H = e$ при $x_* = e^{-1}$ и поэтому радиус сходимости степенного по x ряда для функции $H(x)$ равен e^{-1}.

5. Уравнение для производящей функции $F(z;\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь комбинаторную задачу об определении числа N_n всех связных графов с помеченными n вершинами, в смысле определения этого понятия, данного в разд.~2 (см.~[10]). Легко понять, что при $n = 1,2,3$ функция N_n принимает значения $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, $N_3 = 4$. Непосредственное вычисление ее значений, посредством перечисления возможных графов,при $n > 3$, например, $N_4 = 38$, $N_5 = 728$ уже становится довольно рутинным.В этом разделе мы вычислим функцию N_n. Решение такой задачи будем понимать как получение рекуррентной формулы, связывающей число N_{n+1} со всемичислами N_j, $j = 1 \div n$ при $n \geq 1$. Эта формула позволяет последовательно определять значений N_n. Ее вывод основан на вычисленииипроизводящей функции.

Пример:В качестве примера найдем несколько первых значений числа N_n непосредственным перебором имеющихся возможностей. Такой перебор, однако, начиная с $n = 4$ перебор всех возможных связных деревьев становится довольно рутинным.

1. При $n = 1$, $V = \{1\}$ имеется только один граф $\langle \{1\}, \varnothing \rangle$, состоящий из единственной вершины 1. Он же, по определению, является связным.

2. При $n = 2$, $V = \{1,2\}$ имеется два графа и один из них связный $\langle V = \{1,2\}, \Psi = \{\{1,2\}\} \rangle$. Следовательно, $N_2 = 1$.

3. При $n = 3$, $V = \{1,2,3\}$ имеется четыре связных графа, соответственно, со следующими множествами смежности: $\Psi = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$, $\Psi = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$, $\Psi = \{\{1,3\},\{2,3\}\}$, $\Psi = \{\{1,3\},\{2,3\},\{1,2\}\}$. Все они различны в смысле данного выше определения. Следовательно, $N_3 = 4$.

4. При $n = 4$, $V = \{1,2,3,4\}$.

Среди связных графов с четырьмя вершинами имеется 16 различных древесных графов (см. [2]) и связные графы, содержащие, по крайней мере, один цикл. Эти недревесные графы разобъем на группы согласно различному топологическому типу, не учитывая наличия нумерации вершин. Таких групп четыре. Каждую из них опишем множеством смежности, из которого все остальные множества смежности рассматриваемой группы графов получаются подходящей перестановкой вершин. Затем для каждой группы укажем число графов, имеющихся в ней, которое легко устанавливается на основе непосредственного перебора.

Первую группу представляет множество смежности $\Psi = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$. В этой группе имеется 12 графов. Вторую группу представляет множество смежности $\Psi = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\}\}$ и в этой группе имеется 3 графа. Далее, третью группу представляет множество смежности $\Psi = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{2,3\}\}$, в которой имеется 6 графов. Наконец, последняя группа содержит один граф с множеством смежности $\Psi = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$. На основе такого перечисления заключаем, что имеется 22 связных недревесных графа с помеченными четырьмя вершинами. Следовательно, вместе с древесными графами, получаем, что $N_4 = 38$.

Перейдем к общему решению задачи на основе разработанной в разд. 4 техники. Начнем с того, что введем в рассмотрение последовательность целых функций $K_n(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^{n(n-1)/2}$, $n \in \mathbb{N}$ от комплексного переменного $\varepsilon \in \mathbb{C}$.Для них в области комплексного ε, где выполняется $|1+\varepsilon| < 1$, абсолютно сходится степенной ряд

$$E(z,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} K_n(\varepsilon). \tag{22}$$

Заметим, теперь, что любой граф (не обязательно связный) с помеченными вершинами из $V = I_n$, однозначным образом, описывается посредством матрицы смежности $\psi_{j,k}$, $j,k = 1 \div n$, равной 1, если в этом графе имеется ребро, соединяющее вершины с номерами j и k и равной 0, в противном случае. Введем переменные $\varepsilon_{i,j} \in \mathbb{C}$ и определим в алгебре A элементы $\mathsf{b}(\varepsilon_{i,j}) = \langle b_n(X_n;\varepsilon_{i,j}); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$, $b_0(\varepsilon_{i,j}) = 1$ с компонентами

$$b_n(X_n;\varepsilon_{i,j}) = \prod_{\{i,j\}\in I^{(2)}} (1+\varepsilon_{i,j}), \quad n \in \mathbb{N} \tag{23}$$

такие, что их компоненты, функции $b_n(X_n;\varepsilon_{i,j})$ не зависят от точки $X_n \in [0,1]^n$.Тогда при $\varepsilon_{i,j} = \varepsilon$ значения этих функций совпадает с $K_n(\varepsilon) = b_n(X_n;\varepsilon)$. Следовательно,

$$E(z,\varepsilon) = L(z;\mathsf{b}(\varepsilon)). \tag{24}$$

В силу своего определения, значения каждой из введенных функций совпадает при $\varepsilon = 1$ с числом $K_n = 2^{n(n-1)/2}$ всех графов с помеченными n вершинами, $n \in \mathbb{N}$.Последнее связано с тем, что K_n равно мощности множества всех слов длины $n(n-1)/2$ в алфавите из двух букв.

Производя перемножение всех скобок в определении (23), получим (см., например, [4, 5]), что

$$b_n(X_n;\varepsilon_{i,j}) = \sum_{\mathrm{A}\subseteq S_n} \prod_{A\in\mathrm{A}} a_{|A|}(X(A);\varepsilon_{ij}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

$$a_n(X_n;\varepsilon_{ij}) = \sum_{\Psi_n} \prod_{\{i,j\}\in\Psi_n} \varepsilon_{ij}, \tag{26}$$

где суммирование производится по всем связным графам $\langle I_n, \Psi_n \rangle$ над I_n с отношением связности Ψ_n. Отсюда следует, что

$$\mathsf{b}(\varepsilon_{ij}) = (\exp_* \mathsf{a})(\varepsilon_{i,j}), \tag{27}$$

если считать, что $\mathsf{a}(\varepsilon_{i,j}) = \langle a_n(X_n;\varepsilon_{i,j}); n\in\mathbb{N}_+\rangle \in \mathrm{A}_0$.

Полагая в формуле (24) $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$, мы определим функцию $N_n(\varepsilon) = a_n(X_n;\varepsilon)$, а именно,

$$N_n(\varepsilon) = \sum_{\Psi_n} \varepsilon^{l(\Psi_n)}, \tag{28}$$

где $l(\Psi_n)$ - число ребер в графе $\langle I_n, \Psi_n \rangle$. В частности, при $\varepsilon = 1$ имеем $N_n(1) = |\{\Psi_n : \langle I_n, \Psi_n \rangle\}|$ - число всех связных графов с помеченными вершинами над множеством вершин I_n.

Заметим, что функции $K_n(\varepsilon)$ и $N_n(\varepsilon)$ являются целыми функциями параметра ε .Введем, теперь, производящую функцию

$$F(z;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_n(\varepsilon), \quad N_n(\varepsilon) = \Big(\frac{d^n F(z;\varepsilon)}{dz^n}\Big)_{z=0}. \tag{29}$$

Полагая в (10) $\mathsf{a} = \mathsf{a}(\varepsilon_{ij})$, находим формулу, связывающую производящие функции последовательностей $\langle K_n(\varepsilon); n\in\mathbb{N}\rangle$ и $\langle N_n(\varepsilon); n\in\mathbb{N}\rangle$,

$$E(z,\varepsilon) = \big[L(z;\mathsf{b}(\varepsilon_{ij}))\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon} = \big[L\big(z;\exp_* \mathsf{a}(\varepsilon_{ij})\big)\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon} = \exp\Big(\big[L(z;\mathsf{a}(\varepsilon_{ij}))\big]_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon}\Big) =$$

$$= \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N_n(\varepsilon) = \exp F(z,\varepsilon). \tag{30}$$

Так как при $|1+\varepsilon| < 1$ ряд (22) представляет целую функцию от $z\in\mathbb{C}$, то, в тех же условиях, степенной ряд, представляющий функцию

$$F(z;\varepsilon) = \ln E(z;\varepsilon),$$

сходится в достаточно малой окрестности нуля, так как любая целая функция имеет на каждом компакте не более чем конечное множество нулей. Следовательно, при указанном ограничении на ε, справедлива формула

$$N_n(\varepsilon) = \left(\frac{d^n}{dz^n} \ln \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} K_m(\varepsilon) \right)_{z=0}. \tag{31}$$

При вычислении каждой n-й производной, согласно этой формуле, функция $N_n(\varepsilon)$ представляется полиномом от переменных $K_m(\varepsilon)$, $m \le n$.В самом деле, положив $E(z;\varepsilon) = 1 + \bar{E}(z;\varepsilon)$ так, что

$$\left(\frac{d^s}{dz^s}\bar{E}(z;\varepsilon)\right)_{z=0} = K_s(\varepsilon),\ s \in \mathbb{N}\,, \tag{32}$$

из (31) следует

$$N_n(\varepsilon) = \frac{d^n}{dz^n}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\bar{E}^l(z;\varepsilon)\Big|_{z=0}.$$

Почленное дифференцирование согласно правилу

$$\frac{d^n}{dz^n}U_1(z)...U_l(z) = \sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle,\, s_j\in\mathbb{Z}_+:\\ s_1+...+s_l=n}} \frac{n!}{s_1!...s_l!}U_1^{(s_1)}(z)...U_l^{(s_l)}(z),$$

приводит при $U_1(z) = ... = U_l(z) = \bar{E}(z;\varepsilon)$, принимая во внимание (31), находим

$$N_n(\varepsilon) = n!\sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle,\, s_j\in\mathbb{Z}_+:\\ s_1+...+s_l=n}}\prod_{j=1}^{l}\frac{\bar{K}_{s_j}(\varepsilon)}{s_j!}, \tag{33}$$

$\bar{K}_s(\varepsilon) = K_s(\varepsilon)$ при $s \in \mathbb{N}$ и $\bar{K}_0(\varepsilon) = 0$. Здесь мы использовали, что разложение $\bar{E}(z;\varepsilon)$ начинается с первой степени z и, следовательно, ряд по m в правой части обрывается при $m = n$. Сформулированное утверждение следует из полученной формулы.

Так как каждый из коэффициентов $K_s(\varepsilon)$, $s \in \mathbb{N}$ является полиномом относительно ε, то $N_n(\varepsilon)$, определяемая (31), также является полиномом от ε.Следовательно, формула (31), полученная нами при $\varepsilon \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|1+\varepsilon| < 1$, может быть однозначно аналитически продолжена на всю комплексную плоскость.В частности, эта формула справедлива при $\varepsilon = 1$.

Так как $K_s(1) = 2^s$, то, вместе с $\bar{K}_0(\varepsilon) = 0$, при $\varepsilon = 1$ из (33) приходим к заключению о справедливостиследующего утверждения.

Теорема 8. *Число N_n всех связанных помеченных графов над множеством вершин I_n определяется формулой*

$$N_n = n!\sum_{l=1}^{n}\frac{(-1)^{l-1}}{l}\sum_{\substack{\langle s_1,...,s_l\rangle,\, s_j\in\mathbb{N}:\\ s_1+...+s_l=n}}\prod_{j=1}^{l}\frac{2^{s_j(s_j-1)/2}}{s_j!}. \tag{34}$$

Расчет чисел N_n для любого $n \in \mathbb{N}$ на основе формулы (33) позволяет избежать рутинного перебора всех возможных связных графов с фиксированным числом помеченных вершин. Применение этой формулы легко приводит к значениям N_n при $n = 1,2,3,4,5$, приведенных в начале этого раздела.

Заметим, что если бы мы использовали для доказательства теоремы производящую функцию, определяемую непосредственно на основе чисел N_n, $n \in \mathbb{N}$, то так как связь между этой функцией ипроизводящей функцией для чисел K_n, $n \in \mathbb{N}$, которые получаются из (30) при

$\varepsilon = 1$, теряет смысл, ряд (22) при этом значении ε расходитсяво всех точках $z \neq 0$ комплексной плоскости. Поэтому возникает необходимость в обосновании получаемых решений, так как в процессе его нахождения приходится производить операции с расходящимися рядами,которые эквивалентны перестановкам бесконечного множества членов этих рядов.

6. Рекуррентная формула связи чисел N_n и M_n.

Приступим, теперь, к решению основной задачи вычисления числа M_n всех связанных графов с помеченными n вершинами без вершин сочленения. По определению, положим, что $M_1 = 1$, $M_2 = 1$, то есть уединенная вершина и единственный связный двухвершинный граф рассматриваются как графы без вершин сочленения. Очевидно, что $M_3 = 1$ и непосредственным перебором имеющихся возможностей несложно устанавливается, что $M_4 = 10$. Однако уже вычисление следующего значения $M_5 = 238$ уже требует определенных усилий. В этом разделе мы получим формулу, связывающую последовательности чисел $\langle N_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle M_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ в виде рекуррентной формулы. Эта формула связывает число N_{n+1}, $n \geq 1$ с числами N_j и M_j, $j = 1 \div n$.

Она аналогична, по своему смыслу, формуле, которая связывает последовательности $\langle K_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle N_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, однако, по сравнению с ней, нуждается в более сложном обосновании. Используя ее, можно вычислять числа M_n, $n > 1$ последовательно друг за другом, начиная со значения $M_1 = 1$.

Теорема 9. *Числа* N_n, $n = 2, 3, \ldots$ *и* $M_n = 1, 2, \ldots$ *связаны следующим рекуррентным соотношением*

$$N_{|I_n|+1} = \sum_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n} \prod_{A \in \mathrm{A}} \Big(\sum_{B : B \subset A} M_{|B|+1} \sum_{\langle V(z); z \in B \rangle \in \mathcal{S}^{|B|,+}_{A \setminus B}} \prod_{z \in B} N_{|V(z)|+1} \Big), \tag{35}$$

начиная с $n = 1$.

□ Доказательство состоит из следующих пунктов.

1. Обозначим посредством $\mathcal{F}(A \cup \{x\})$ - класс всех связных графов над множеством вершин $A \cup \{x\}$, в котором имеется одна отмеченная вершина x. Положим $A = I_n$, $|I_n| = n$ и вершина x является вершиной сочленения степени $s \in \{1, \ldots, n\}$ в связном графе $\mathcal{G} = \langle I_n \cup \{x\}, \Psi \rangle$ из этого класса. При этом если $s = 1$, то вершина x, фактически, не является вершиной сочленения. Однако, чтобы не рассматривать этот случай отдельно, мы включаем ее в рассмотрение как вершину сочленения со степенью 1.

Рассмотрим графы, у которых $s = 1$ положим $\mathrm{A} = \{A_1 \equiv I_n\}$, $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n$ и обозначим $\Psi_1 = \Psi$ и $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$. Если $s \neq 1$, то, согласно утверждению Теоремы 2, для выделенной вершины x имеется однозначным образом определяемый набор связных графов $G_j = \langle A_j \cup \{x\}, \Psi_j \rangle$, $j = 1 \div s$, в каждом из которых вершина x уже не является вершиной сочленения, и при этом имеютместо следующие соотношения:

$I_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$, $A_i \cap A_j = \varnothing$; $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2 \cup \ldots \cup \Psi_s$, $\Psi_i \cap \Psi_j = \varnothing$, $i \neq j; i, j = 1 \div s$.

Тогда набор $\{A_1, \ldots, A_s\}$ образует разложение $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n$ множества I_n так, что каждый из графов G_j, $j = 1 \div s$ построен над множеством вершин $A_j \cup \{x\}$ и в каждом из них вершина x уже не является вершиной сочленения. При этом граф G представим в виде склейки графов G_j, $j = 1 \div s$:

$$G = \bigvee_{j=1}^{s} G_j. \tag{36}$$

Введем для каждого разложения $\mathrm{A} = \{A_1, \ldots, A_s\} \in \mathcal{S}_n$, состоящего из непустых множеств A_j, $j = 1, \ldots, s$ класс $\mathcal{F}[\mathrm{A}] \equiv \mathcal{F}(A_1, \ldots, A_s)$ связных графов G, которые определяются на основе формулы (36) из связных графов G_j, $j = 1 \div s$, каждый из которых является графом с помеченными вершинами над соответствующим ему множеством $A_j \cup \{x\}$, $j = 1, \ldots, s$ и в каждом из них отмеченная вершина x не является вершиной сочленения. Заметим, что для двух несовпадающих разложений A_1 и A_2 из $\mathcal{S}_n$ классы $\mathcal{F}[\mathrm{A}_1]$ и $\mathcal{F}[\mathrm{A}_2]$ не пересекаются.

Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что класс $\mathcal{F}(I_n \cup \{x\})$ связных графов с помеченными вершинами представим в виде дизъюнктивного разложения

$$\mathcal{F}(I_n \cup \{x\}) = \bigcup_{s=1}^{n} \bigcup_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{(s)}} \mathcal{F}(A_1, \ldots, A_s) = \bigcup_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n} \mathcal{F}[\mathrm{A}]. \tag{37}$$

Ввиду дизъюнктивности разложения (37), имеет место

$$N_{n+1} = |\mathcal{F}(I_n \cup \{x\})| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{(s)}} |\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_s)| = \sum_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n} |\mathcal{F}[\mathrm{A}]|. \tag{38}$$

2.Обозначим посредством $\mathcal{F}'(A \cup \{x\}) = \mathcal{F}[\mathrm{A}]$, $\mathrm{A} = \{A\}$ множество всех связанных графов с помеченными вершинами над множеством $A \cup \{x\}$ с одной выделенной вершиной $\{x\}$, которая не является в каждом из этих графов вершиной сочленения и $N_{|A|+1} = |\mathcal{F}'(A \cup \{x\})|$.

Заметим, что, ввиду справедливости формулы (36), для каждого набора $\{A_1, \ldots, A_s\}$, образующего разложение $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n$ множества I_n с непустыми составляющими, имеет место

$\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_s) = \bigotimes_{j=1}^{s} \mathcal{F}'(A_j \cup \{x\})$, то есть

$$\mathcal{F}[\mathrm{A}] = \bigotimes_{A \in \mathrm{A}}^{|\mathrm{A}|} \mathcal{F}'(A \cup \{x\}). \tag{39}$$

Тогда, применяя комбинаторный *принцип умножения*, получаем

$$|\mathcal{F}[\mathrm{A}]|=\prod_{A\in\mathrm{A}}^{|\mathrm{A}|}N'_{|A|+1},$$

$$N_{n+1}=\sum_{\mathrm{A}\in S_n}\prod_{A\in\mathrm{A}}N'_{|A|+1}. \tag{40}$$

3. Рассмотрим теперь графы каждого из классов $\mathcal{F}'(A\cup\{x\})$, $A\neq\varnothing$, $A\in\mathrm{A}$. Пусть $G'=\langle A\cup\{x\},\Psi\rangle$ - произвольный граф из этого класса. Согласно Теореме 3, каждому такому графу взаимно-однозначным образом, сопоставляется подграф $G_B=\langle B\cup\{x\},\Psi_B\rangle$ графа ,G', $B\neq\varnothing$ которыйявляется в нем блоком. Тогда класс $\mathcal{F}'(A\cup\{x\})$ представляется в виде дизъюнктивного объединения

$$\mathcal{F}'(A\cup\{x\})=\bigcup_{B:\varnothing\neq B\subset A}\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\}),$$

где $\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\})$ - класс связных графов с помеченными вершинами, являющийся подклассом класса $\mathcal{F}'(A\cup\{x\})$ таких графов, у которых вершина x содержится в блоке над множеством $B\cup\{x\}$. Тогда

$$|\mathcal{F}'(A\cup\{x\})|=\sum_{B:\varnothing\neq B\subset A}|\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\})|. \tag{41}$$

4. Вершины множества B не являются вершинами сочленения в графе G_B, но они могут быть вершинами сочленения в графе G'. Сопоставим каждой вершине $z\in B$ блока G_B число $p(z)$, равное степени сочленения этой вершины в графе G'. Если z не является вершиной сочленения, то, как и ранее, полагаем $p(z)=1$. Тогда каждой вершине $z\in B$, согласно Теореме 2, однозначным образом, сопоставляется набор связных графов $G_j(z)=\langle V_j(z)\cup\{z\},\Psi_j(z)\rangle$, $j=1\div p(z)$, $p(z)$ - степень вершины сочленения вершины z, $p(z)\lhd|A|$. Среди всех таких графов содержится блок $G_B=\langle B\cup\{x\},\Psi_B\rangle$. Не ограничивая общности, можно считать, что блок G_B имеет номер $p(z)$ в указанном наборе связных графов.

Для каждой вершины $z\in B$ и для каждой пары связных графов $G_j(z)$ и $G_k(z)$ из указанного набора имеет место $V_j(z)\cap V_k(z)=\varnothing,\Psi_j(z)\cap\Psi_k(z)=\varnothing$ $j\neq k$, где $j,k=1\div p(z)-1$. Кроме того, для любых двух различных вершин z_1 и z_2 из B все графы $G_{j_1}(z_1)$, $j_1=1\div p(z_1)-1$ и $G_{j_2}(z_2)$, $j=1\div p(z_2)-1$ являются несвязанными друг с другом и при этом

$$V_{j_1}(z_1)\cap V_{j_2}(z_2)=\varnothing,\ \Psi_{j_1}(z_1)\cap\Psi_{j_2}(z_2)=\varnothing,\quad j_1=1\div p(z_1)-1,\ j_2=1\div p(z_2)-1.$$

Тогда, согласно формуле (3), все графы G' класса $\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\})$ представимы в виде склейки

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}_B \vee \Big(\bigvee_{z\in B} \bigvee_{j=1}^{p(z)-1} \mathcal{G}_j(z) \Big).$$

Определим теперь для каждого $z \in B$ связные графы

$$\mathcal{G}(z) = \bigvee_{j=1}^{p(z)-1} \mathcal{G}_j(z) \tag{42}$$

такие, что $\mathcal{G}(z) = \langle V(z) \cup \{z\}, \Psi(z) \rangle$, где

$$V(z) = \bigcup_{j=1}^{p(z)-1} V_j(z), \qquad \Psi(z) = \bigcup_{j=1}^{p(z)-1} \Psi_j(z),$$

где, согласно Теореме 2,

$$q(z) = | V(z) | = \sum_{j=1}^{p(z)-1} | V_j(z) |, \quad \sum_{z\in B} q(z) = | A ,\ \ B |, \tag{43}$$

где каждый из этих графов имеет выделенную вершину z. Заметим, что множества $V(z)$ могут быть пустыми. Такая ситуация реализуется при $p(z) = 1$.

Следовательно, каждому графу $\mathcal{G}' \in \mathcal{F}''(A, B \cup \{x\})$, однозначным образом, сопоставлены: упорядоченный набор $\langle V(z); z \in B \rangle$ (согласно порядка вершин z в множестве B) множества $A ,\ \ B$ с числом компонент $|B|$ такой, что $\bigcup_{z\in B} V(z) = A ,\ \ B$,и соответствующий ему набор графов $\mathcal{G}(z) = \langle V(z) \cup \{z\}, \Psi(z) \rangle$, $z \in B$ такие, что имеет место формула склейки

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}_B \vee \Big(\bigvee_{z\in B} \mathcal{G}(z) \Big). \tag{44}$$

(Заметим, что здесь используются именно упорядоченные наборы $\langle V(z); z \in B \rangle$, а не разложения множества $A ,\ \ B$. В частности, некоторые компоненты $V(z)$ в этих наборах могут быть пустыми и, тем самым, они могут быть повторяющимися.)

Обратно, каждому упорядоченному набору $\langle V(z); z \in B \rangle$, являющемуся разбиением единицы для множества $A ,\ \ B$, и набору графов $\mathcal{G}(z) = \langle V(z) \cup \{z\}, \Psi(z) \rangle$ с отмеченными вершинами $z \in B$, однозначным образом, по формуле (44) сопоставляется граф $\mathcal{G}'$ из класса $\mathcal{F}''(A, B \cup \{x\})$. Ввиду описанного взаимно однозначного соответствия, вводя обозначение $S_A^{(s),+}$ для класса таких разложений множества A с числом компонент s, у которых допустимы пустые компоненты, имеет место дизъюнктивное объединение

$$\mathcal{F}''(A, B \cup \{x\}) = \bigcup_{\substack{\langle V(z): z\in B \rangle: \\ \bigcup_{z\in B} V(z) = A ,\ B}} \mathcal{F}''(A, B \cup \{x\}; V(z), z \in B),$$

где $\mathcal{F}''(A, B \cup \{x\}; V(z), z \in B)$ - класс графов, содержащийся в $\mathcal{F}''(A, B \cup \{x\})$, у которых зафиксирован упорядоченный набор $\langle V(z); z \in B \rangle$, определяющий разбиение единицы множества

A, B, на каждой компоненте которого строится связный граф $\langle V(z)\cup\{z\};\Psi(z)\rangle$ с выделенной вершиной z, которая приклеивается к блоку B при построении графа из класса $\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\})$. Из дизъюнктивности объединения следует формула

$$|\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\})|=\sum_{\substack{\langle V(z):z\in B\rangle:\\ \bigcup_{z\in B}V(z)=A,\ B}}|\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\};V(z),z\in B)|. \tag{45}$$

В свою очередь, из формулы (44) следует, что класс $\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\};V(z),z\in B)$ представляется в виде прямого произведения

$$\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\};V(z),z\in B)=\mathcal{G}(B\cup\{x\})\otimes\Big(\bigotimes_{z\in B}\mathcal{F}(V(z)\cup\{z\})\Big), \tag{46}$$

где $\mathcal{G}(B\cup\{x\})$ - класс всех связных графов с помеченными вершинами над множеством вершин $B\cup\{x\}$, не имеющих вершин сочленения.

Из формулы (45) следует

$$|\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\};V(z),z\in B)|=|\mathcal{G}(B\cup\{x\})|\cdot\prod_{z\in B}|\mathcal{F}(V(z)\cup\{z\})|. \tag{47}$$

Учитывая формулу (45), находим

$$|\mathcal{F}''(A,B\cup\{x\})|=|\mathcal{G}(B\cup\{x\})|\sum_{\substack{\langle V(z):z\in B\rangle:\\ \bigcup_{z\in B}V(z)=A,\ B}}\prod_{z\in B}|\mathcal{F}(V(z)\cup\{z\})|. \tag{48}$$

5. Из формул (41), (48) следует

$$|\mathcal{F}'(A\cup\{x\})|=\sum_{B:\varnothing\neq B\subset A}|\mathcal{G}(B\cup\{x\})|\sum_{\substack{\langle V(z):z\in B\rangle:\\ \bigcup_{z\in B}V(z)=A,\ B}}\prod_{z\in B}|\mathcal{F}(V(z)\cup\{z\})|$$

или, вводя обозначение $|\mathcal{G}(B\cup\{x\})|=M_{|B|+1}$,

$$N'_{|A|+1}=\sum_{B:\varnothing\neq B\subset A}M_{|B|+1}\sum_{\substack{\langle V(z):z\in B\rangle:\\ \bigcup_{z\in B}V(z)=A,\ B}}\prod_{z\in B}N_{|V(z)|+1}. \tag{49}$$

Подстановка этой формулы в (40)приводит к формуле (35) +

Утверждение теоремы переформулируется следующим образом.

Следствие. *Числа* N_n *и* M_n *при* $n\in\mathbb{N}$ *подчинены следующему уравнению*

$$N_{n+1}=n!\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s!}\sum_{\substack{\langle k_1,\dots,k_s\rangle,k_j\in\mathbb{N}:\\ k_1+\dots+k_s=n}}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{k_j}\frac{1}{m!}M_{m+1}\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,l_i\in\mathbb{Z}_+:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{l_i!}N_{l_i+1}\right), \tag{50}$$

□ Положим, что элемент $\mathsf{a} = \langle 0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ из максимального идеала A_0 алгебры A определяется компонентами $a_n(X_n) = N'_{|I_n|+1}$ $n \in \mathbb{N}$, где $N'_{|I_n|+1}$ определяется формулой (49). Из (35) следует, что $N_{n+1} = \left[\exp_* \mathsf{a}\right](X_n)$. Тогда, согласно (7), имеем

$$\left[\exp_* \mathsf{a}\right]_n (X(I_n)) = \sum_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n} \prod_{A \in \mathrm{A}} a_{|A|}(X(A)) = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{(s)}} \prod_{A \in \mathrm{A}} a_{|A|}(X(A)) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{\langle k_1, \ldots, k_s \rangle, k_j \in \mathbb{N}: \\ k_1 + \ldots + k_s = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!} \prod_{j=1}^{s} a_{k_j}, \tag{51}$$

так как компоненты $a_n(X_n)$ зависят только от n.

Преобразуем теперь выражение (49) для $a_n = N'_{|I_n|+1}$. Определим для каждого $m = 1 \div n$ элемент $\mathsf{c}^{(m)} = \langle c_k(X_k); k \in \mathbb{N}_+ \rangle \in \mathrm{A}$, компоненты которого равны

$$c_k^{(m)}(X_k) = \sum_{\substack{\langle V(z): z \in B \rangle: \\ \bigcup_{z \in B} V(z) = I_k}} \prod_{z \in B} N_{|V(z)|+1}, \qquad m = |B|. \tag{52}$$

При этом $c_0^{(m)} \neq 0$. Тогда, на основании (35), для каждого множества A с числом элементов $k_j = |A|$, которое входит в состав разложения $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n$, получаем

$$N'_{|A|+1} = \sum_{B: \varnothing \neq B \subset A} M_{|B|+1} c^{(|B|)}_{|A, B|}(X(A, B)) = \sum_{m=1}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} M_{m+1} c^{(m)}_{k-m},$$

так как компоненты $c_k^{(m)}(X_k)$, $k \in \mathbb{N}$ зависят только от k. Таким образом, из (49) и (51) следует

$$N_{n+1} = n! \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \sum_{\substack{\langle k_1, \ldots, k_s \rangle, k_j \in \mathbb{N}: \\ k_1 + \ldots + k_s = n}} \prod_{j=1}^{s} \left(\sum_{m=1}^{k_j} \frac{1}{m!} M_{m+1} \frac{c^{(m)}_{k_j - m}}{(k_j - m)!} \right), \tag{53}$$

где в произведении, для каждого сомножителя $j = 1 \div m$, произведена замена $k \Rightarrow k_j - m$. Из определяющей формулы (52) следует, что

$$\frac{c_k^{(m)}}{k!} = \sum_{\substack{\langle l_1, \ldots, l_m \rangle, l_i \in \mathbb{N}_+: \\ l_1 + \ldots + l_m = k}} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{l_i!} N_{l_i + 1}, \qquad l_i = |V(z)|, z \in B.$$

Как и выше, заменив $k \Rightarrow k_j - m$ в каждом сомножителе с $j = 1 \div m$ и подставив полученные выражения для этих сомножителей в (53), получим формулу (50). +

На основе формулы (50) имеется возможность вычислять числа M_n, $n \in \mathbb{N}$, рассматривая ее как систему уравнений для этого числового набора. Однако такой метод определения этих чисел оказывается очень трудоемким. В связи с чем, в следующем разделе, вводится специальная производящая функция, коэффициенты которой $M_n(\varepsilon)$ непосредственно связаны с M_n, и устанавливается вид функционального уравнения, которому она удовлетворяет и посредством которого она однозначно определяется.

7. Уравнение для производящей функции $G(z;\varepsilon)$

Так как числа M_n определяются рекуррентным образом на основе чисел N_n, и так как для последних невозможно непосредственное введение производящей функции, то таким неприятным свойством обладает и набор M_n, $n \in \square$. По этой причине, мы введем для каждого

$\varepsilon \in \square$, $|1+\varepsilon|<1$ производящую функцию

$$G(z;\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}M_{n+1}(\varepsilon), \qquad M_n(\varepsilon)=\Big(\frac{d^nG(z;\varepsilon)}{dz^n}\Big)_{z=0} \tag{54}$$

где коэффициенты $M_n(\varepsilon)$, $n \in \square$ определяются однозначно из следующей системы уравнений

$$N_{n+1}(\varepsilon)=n!\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s!}\sum_{\substack{\langle k_1,\dots,k_s\rangle,\\ k_j\in\square,\, j=1\div s:\\ k_1+\dots+k_s=n}}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{k_j}\frac{1}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\square_+,\, i=1\div m:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right). \tag{55}$$

При этом, ввиду $N_n(1)=N_n$, выполняется также равенство $M_n(1)=M_n$ при всех $n\in\square_+$. Так как $N_n(\varepsilon)$ зависят от ε полиномиально, то в силу рекуррентной формулы (55), коэффициенты $M_n(\varepsilon)$ зависят от ε также полиномиально.

Следующее утверждение дает нам функциональное уравнение, связывающее функцию $G(z,\varepsilon)$ с производящей функцией $F(z,\varepsilon)$, и которое определяет ее однозначно при условии $G(0,\varepsilon)=1$.

Теорема 10. *Производящие функции* $F(z;\varepsilon)$ *и* $G(z;\varepsilon)$ *связаны следующим функциональным уравнениемпри изменении параметра* ε *в области комплексной плоскости, где выполняется неравенство* $|1+\varepsilon|<1$:

$$F'(z;\varepsilon)=\exp\big[G(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)-1\big]. \tag{56}$$

$\square$ Запишем ряд для производной производящей функции $F(z;\varepsilon)$ в виде

$$F'(z;\varepsilon)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}N_{n+1}(\varepsilon)$$

В силу выполнимости рекуррентной формулы (55) при $n\in\square$ заменим N_{n+1} согласно этой формуле

$$F(z;\varepsilon)=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^n\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s!}\sum_{\substack{\langle k_1,\dots,k_s\rangle,\\ k_j\in\square,\, j=1\div s:\\ k_1+\dots+k_s=n}}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{k_j}\frac{1}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\square_+,\, i=1\div m:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right).$$

Переставляя соответствующим образом суммирования, произведем преобразования рядов. Перестановка суммирований обоснована тем, что в области изменения параметра ε функция $F(z;\varepsilon)$ является целой, и поэтому все ряды, с которыми производятся преобразования, также являются целыми функциями. Справедливо следующее:

$$F(z;\varepsilon)=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}\sum_{\substack{\langle k_1,\dots,k_s\rangle,\\ k_j\in\mathbb{N},\, j=1\div s:\\ k_1+\dots+k_s=n}}\prod_{j=1}^{s}z^{k_j}\left(\sum_{m=1}^{k_j}\frac{1}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\mathbb{N}_+,\, i=1\div m:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right)=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{\substack{\langle k_1,\dots,k_s\rangle,\\ k_j\in\mathbb{N},\, j=1\div s:\\ k_1+\dots+k_s=n}}\prod_{j=1}^{s}z^{k_j}\left(\sum_{m=1}^{k_j}\frac{1}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\mathbb{N}_+,\, i=1\div m:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right)=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\prod_{j=1}^{s}\sum_{k_j=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{k_j}\frac{z^m}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\mathbb{N}_+,\, i=1\div m:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{z^{l_i}}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right)=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{k_j=m}^{\infty}\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\mathbb{N}_+,\, i=1\div m:\\ l_1+\dots+l_m=k_j-m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{z^{l_i}}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right)=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\sum_{\substack{\langle l_1,\dots,l_m\rangle,\\ l_i\in\mathbb{N}_+,\, i=1\div m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{z^{l_i}}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right)=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)\prod_{i=1}^{m}\sum_{l_i=0}^{\infty}\frac{z^{l_i}}{l_i!}N_{l_i+1}(\varepsilon)\right)=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}M_{m+1}(\varepsilon)[F'(z;\varepsilon)]^m\right)=$$

$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\prod_{j=1}^{s}\big[G(zF'(z;\varepsilon))-1\big]=\exp\big[G(zF(z;\varepsilon)))-1\big].\ +$$

Полученное нами функциональное соотношение (56) можно рассматривать как уравнение, определяющее однозначно неявную функцию $G(z;\varepsilon)$ при дополнительном условии $G(0;\varepsilon)=M_1=1$. Она определена в области комплексной плоскости изменения ε, где имеет место $|1+\varepsilon|<1$. Вычисленные на основе этой функции коэффициенты $M_n(\varepsilon)$ допускают аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость ε, ввиду их полиномиальной зависимости от этого параметра. В частности, полученные таким образом формулы дают возможность вычислить $M_n(1)$.

8. Заключение

Доказанная Теорема 8 позволяет дифференцированием последовательно находить числа M_{n+1} по известным числам $N_j=1\div(n+1)$ и по предварительно вычисленным числам M_j,

$j = 1 \div n$. При этом нам не приходится решать алгебраическую систему уравнений, которой подчинены числа M_j, $j = 1 \div n+1$ согласно формуле (50).

Произведем, на основе полученного уравнения (56), вычисления нескольких первых членов последовательности $\langle M_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ с целью сравнения с приведенными ранее результатами их непосредственного вычисления посредством перебора. Для этого представим (56) в виде $1 + \ln F'(z;\varepsilon) = G(zF'(z;\varepsilon))$. Последовательно дифференцируя обе части этого равенства, находим

$$G'(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big((zF''(z;\varepsilon)) + F'(z;\varepsilon)\big) = \frac{F''(z;\varepsilon)}{F'(z;\varepsilon)},$$

$$G''(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big((zF''(z;\varepsilon)) + F'(z;\varepsilon)\big)^2 + G'(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big((zF'''(z;\varepsilon)) + 2F''(z;\varepsilon)\big) =$$

$$= \frac{F'''(z;\varepsilon)}{F'(z;\varepsilon)} - \frac{F''^2(z;\varepsilon)}{F'^2(z;\varepsilon)},$$

$$G'''(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big((zF''(z;\varepsilon)) + F'(z;\varepsilon)\big)^3 +$$

$$+3G''(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big((zF'''(z;\varepsilon)) + 2F''(z;\varepsilon)\big)\big((zF''(z;\varepsilon)) + F'(z;\varepsilon)\big) +$$

$$+G'(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big((zF^{IV}(z;\varepsilon)) + 3F'''(z;\varepsilon)\big) = \frac{F^{IV}(z;\varepsilon)}{F'(z;\varepsilon)} - 3\frac{F'''(z;\varepsilon)F''(z;\varepsilon)}{F'^2(z;\varepsilon)} + 2\frac{F''^3(z;\varepsilon)}{F'^3(z;\varepsilon)}.$$

Эти формулы позволяют подстановкой значений производных $F(0;1) = 1$, $F'(0;1) = 1$, $F''(0;1) = N_3 = 4$, $F'''(0;1) = N_4 = 38$, которые нами взяты из работы [10], найти значения для $G''(0;1) = M_3 = 1$, $G'''(0;1) = M_4 = 10$.

Вычисление значения производной $G^{IV}(z;\varepsilon)$, на основе дифференцирования последнего из вышеприведенных соотношений, приводит к формуле

$$G^{IV}(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big(zF''(z;\varepsilon) + F'(z;\varepsilon)\big)^4 +$$

$$+6G'''(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big(zF''(z;\varepsilon) + F'(z;\varepsilon)\big)^2(zF'''(z;\varepsilon) + 2F''(z;\varepsilon)\big) +$$

$$+3G''(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big(zF'''(z;\varepsilon) + 2F''(z;\varepsilon)\big)^2 +$$

$$+4G''(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big(zF''(z;\varepsilon) + F'(z;\varepsilon)\big)(zF^{IV}(z;\varepsilon) + 3F'''(z;\varepsilon)\big) +$$

$$+G'(zF'(z;\varepsilon);\varepsilon)\big(zF^{V}(z;\varepsilon) + 4F^{IV}(z;\varepsilon)\big) =$$

$$= \frac{F^{V}(z;\varepsilon)}{F'(z;\varepsilon)} - 4\frac{F^{IV}(z;\varepsilon)F''(z;\varepsilon)}{F'^2(z;\varepsilon)} - 3\frac{F'''^2(z;\varepsilon)}{F'^2(z;\varepsilon)} + 12\frac{F'''(z;\varepsilon)F''^2(z;\varepsilon)}{F'^3(z;\varepsilon)} - 6\frac{F''^4(z;\varepsilon)}{F'^4(z;\varepsilon)},$$

которая позволяет вычислить число $G^{IV}(0;1) = M_5$ нам основе известного уже известного числа $N_5 = 728$ связных графов с пятью помеченными вершинами. В результате, получаем $M_5 = 238$.

Несмотря на то, что предложенный алгоритм последовательного вычисления чисел M_n предполагает рутинное, довольно громоздкое вычисление рекуррентных соотношений для производных ряда $G(z;\varepsilon)$, его достоинством является то, что он позволяет автоматизировать процесс вычисления чисел M_n, не прибегая к перечислению топологически неэквивалентных графов с числом вершин n, а затем выявления всех тех перестановок меток вершин, которые не переводят графы каждого топологически фиксированного типа друг в друга.

Список литературы

1. Харари Ф. 2006. Теория графов. М.: КомКнига, 296. Harary F. 1996. Gbaph theory. London: Addison-Wesley Publishing Company.

2. Харари Ф., Палмер Э. 1997. Перечисление графов. М.: Мир.
Harary F., Palmer E.M. 1972. Graphical Enumeration. New-York: Academic Press.

3. Оре О. Теория графов 1980. М.: Наука,336.
Ore Oystein, 1962. Theory of graphs American Mathematical Society. Colloquium Publications V. XXXVIII.

4. Майер Дж., Гепперт-Майер М. 1980. Статистическая механика. М.: Мир,546.
Mayer J.E., Goeppert-Mayer M. 1977. Statistical mechanics . New York: John Wiley & Sons, Inc.

5. Рюэль Д.1971. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 368.
Ruelle D. 1969. Statistical mechanics, Rigorous Results. New York, Amsterdam: W.A. Benjamin, Inc.

6. Риордан Дж. 1963. Введение в комбинаторный анализ. М.: Мир.
Riordan J. 1958. An introduction to combinatorial analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Limited.

7. Холл М. 1963. Комбинаторный анализ. М.: Изд. Иностр. лит., 100с.
Holl M., jr. 1958. A survey of combinatorial analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc.

8. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. 2015. Определение числа разложений конечного множества. Белгородский государственный университет Научные ведомости. Математика и Физика. 5(202); 38 : 96-100. Virchenko Yu.P., Ostapenko L.P. 2015. Number evaluation of finite set partitions. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 05(202); 38: 96-100.

9. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. 2015. Определение числа древесных графов над конечным множеством вершин. Белгородский государственный университет Научные ведомости. Математика и Физика. 11(208); 39: 37-43. Virchenko Yu.P., Ostapenko L.P.2015. Number evaluation of tree graphs with finite vertices set. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 11(208); 39: 37-43.

10. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П.2015. Определение числа связных графов над конечным множеством вершин. Белгородский государственный университет Научные ведомости. Математика и Физика. 17(214); 40: 28-34. Virchenko Yu.P., Ostapenko L.P.2015. Number evaluation of connected graphs with finite vertices set. Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. 17(214); 40: 28-34.

11. Ван дер Ваден Б.Л.,1979. Алгебра. М. : Наука, 648.
Van Der Waerden B.L. 1971. Algebra II. Berlin : Springer-Verlag.

12. Остапенко Л.П., Вирченко Ю.П. 2016. Число связных графов без вершин сочленения. Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна. Воронеж: Научная книга, 310-314. Virchenko Yu.P., Ostapenko L.P. 2016. Number of connected graphs without articulation vertices. Krein's Winter Mathematical School. Voronezh State University. 310-314.